Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2000
Профиль: физика-математика, экономика, информатика-математика

Время: 180 минут.

1. Определить, какому числовому множеству принадлежит значение выражения $\dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1}$. (5 очков)

2. Пусть даны функции $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$; $g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $g(x)=2x-3$. Найдите $f(g(x))$. (4 очка)

3. При каких значениях действительного параметра a уравнение $\sqrt{3}\cos x+\sin x=a$ имеет решения? (6 очков)

4. Вычислить длину кривой $x^2+5x+y^2=0$. (7 очков)

5. Решить неравенство $D(x)\geq 0$ где

$$D(x)=\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

(8 очков)

6. Определить показатель степени, в котором нужно возвести $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, используя формулу бинома Ньютона, так чтобы $\dfrac{T_3}{T_4}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (8 очков)

7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx.$$

(9 очков)

8. Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его высоту на отрезки длины 5 см и 3 см. Найдите длины сторон треугольника. (9 очков)

9. При каких значениях действительного параметра m, функция $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=e^x(m-3x-x^2)$ монотонно убывает на $\mathbf{R}$? (10 очков)

10. Разложить на простые множители в $\mathbf{C}$ многочлен $P(X)=X^4+13X^2+36$. (9 очков)

11. Площадь диагонального сечения правильной прямоугольной пирамиды равна S. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды. (12 очков)

12. При каких значениях действительного параметра a, система

$$\begin{cases} y+\ln\dfrac{|y|}{y}=x \\ y+2(x+a)^2=x+2a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение? (13 очков)

Решения

1. Заметим, что $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4+5-2\cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ и получим

$$\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-2+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = 1.$$

Таким образом, значение данного выражения – натуральное число.

Замечание: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \ldots$ (см. и **варианты 1999 года**).

2. Используя определение сложной функции получим

$$f(g(x)) = (2x-3)^2 - 3(2x-3) + 2 = 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 9 + 2 = 4x^2 - 18x + 20.$$

3. Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ имеет решения если и только если $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ (следует из метода вспомогательного угла). Следовательно, данное уравнение имеет решения лишь при $\left|\dfrac{a}{2}\right| \leq 1$, откуда $a \in [-2, 2]$.

4. Так как $x^2+5x+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot\dfrac{5}{2}x+\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{4}+y^2=0 \Leftrightarrow (x+\dfrac{5}{2})^2+y^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$, то данная кривая есть окружность радиуса $R=\dfrac{5}{2}$ с центром в точке $M\left(-\frac{5}{2};0\right)$. Используя формулу для определения длины окружности, получим

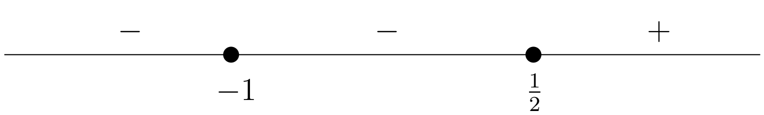
$$l = 2\pi R = 2\pi\frac{5}{2} = 5\pi(\text{ед.длины}).$$

5. Используя свойство определителей, получим

$$D(x) = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & 0 & x+1 \\ x+1 & x+1 & 0 \end{vmatrix} = (2x-1)(x+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2x-1)(x+1)^2$$

Неравенство $D(x) \geq 0$ примет вид $(2x-1)(x+1)^2 \geq 0$. Используя метод интервалов



получим $x \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

6. Используя формулу для k-го слагаемого в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$,

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (k=\overline{0,n}\ )$$

получим

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{C_n^2(\sqrt{2})^{n-2}(\sqrt{3})^2}{C_n^3(\sqrt{2})^{n-3}(\sqrt{3})^3} = \frac{C_n^2}{C_n^3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

или, учитывая что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,

$$\frac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}} = \frac{3}{4},$$

откуда следует $n-2=4$ и $n=6$.

7. Подинтегральная функция есть дробно-рациональная функция. Учитывая что корни трехчлена знаменателя есть действительные числа кратности один, разложим функцию на простые дроби

$$\frac{-7x-4}{3x^2+5x+2} = \frac{-7x-4}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(3x+2)}{(3x+2)(x+1)}.$$

Используя метод неопределенных коэффициэнтов, найдем $A=2$ и $B=-3$. Следовательно

$$\int \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx = \int\left(\frac{2}{3x+2} - \frac{3}{x+1}\right)dx = 2\int\frac{dx}{3x+2} - 3\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x+2| - 3\ln|x+1| + C.$$

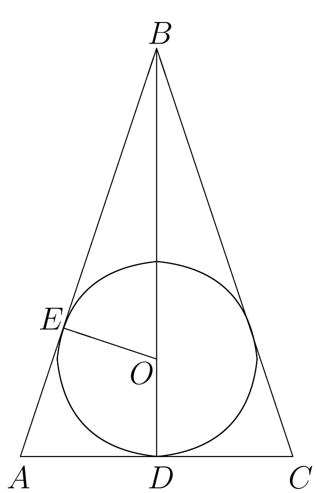
Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^1 \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx = \left(\frac{3}{2}\ln|3x+2| - 3\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}(\ln 5 - \ln 2) - 3\ln 2 = \frac{2}{3}\ln 5 - \frac{11}{3}\ln 2.$$

8. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AB=BC$), BD – высота ($BD \perp AC$) $O \in BD$ – центр вписанной окружности в $\triangle ABC$, $OB = 5$ см, $OD = 3$ см и, следовательно, $BD = 8$ (см). Пусть E – точка касания стороны AB с окружностью. Тогда $OE \perp AB$ и следовательно $\triangle BOE$ – прямоугольный. Так как $OE = OD = 3$, $BO = 5$, согласно теореме Пифагоры

$$BE = \sqrt{BO^2 - OE^2} = \sqrt{25-9} = 4(\text{см}).$$



Так как прямоугольные треугольники BOE и ABD подобны ($\angle B$ – общий), то

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{OE},$$

откуда

$$AB = \frac{BO \cdot BD}{BE} = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10(\text{см}),$$
$$AD = \frac{BD \cdot OE}{BE} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6(\text{см}).$$

Поскольку BD – высота опущенная на основание равнобедренного тркугольника ABC, то BD – медиана и $AC = 2AD = 12(\text{см})$.

Таким образом $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

9. Функция $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$ монотонно убывает на X если $f'(x) \leq 0$ для любого $x \in X$. Следовательно

$$f'(x) = e^x(m - 3x - x^2) + e^x(-3 - 2x) = -e^x(x^2 + 5x - m + 3) \leq 0.$$

Поскольку $e^x > 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$, неравенство примет вид

$$x^2 + 5x - m + 3 \geq 0.$$

Последнее неравенство справедливо для любого $x \in \mathbf{R}$, если и только если ее дискриминант неположителен (см. **Формулы, Словари, Квадратный трехчлен**).

Следовательно: $25 - 4(3 - m) \leq 0$, откуда $m \leq -\dfrac{13}{4}$.

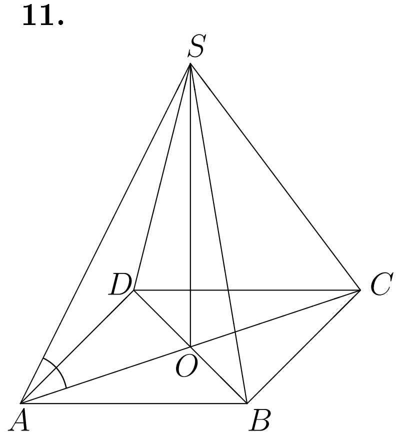
10. Рассмотрим биквадратное уравнение

$$x^4 + 13x^2 + 36 = 0,$$

корни которого (во множестве комплексных чисел) есть $x_1 = -2i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -3i$, $x_4 = 3i$. Следовательно

$$X^4 + 13X^2 + 6 = (X + 2i)(X - 2i)(X + 3i)(X - 3i).$$

11.



Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида ($ABCD$ – квадрат), площадь $\triangle SAC = S$, $\measuredangle SAC = \beta$, O – центр квадрата $ABCD$. Пусть $AO = a$. Тогда $AC = 2a$;

$SO = AO \cdot \operatorname{tg}\beta = a \operatorname{tg}\beta$ (из прямоугольного треугольника SAO) и площадь треугольника SAC

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{1}{2}2a \cdot a \operatorname{tg}\beta = a^2 \operatorname{tg}\beta$$

откуда $a^2 = S \operatorname{ctg}\beta$ и $a = \sqrt{S \operatorname{ctg}\beta}$. Следовательно $AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2S \operatorname{ctg}\beta$ (площадь основания пирамиды), $SO = a \operatorname{tg}\beta = \sqrt{S \operatorname{ctg}\beta} \cdot \operatorname{tg}\beta$ (высота пирамиды) и

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{2}{3}S \operatorname{ctg}\beta \cdot \sqrt{S \operatorname{ctg}\beta} \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}S\sqrt{S \operatorname{ctg}\beta}(\text{куб.ед.})$$

12. Из первого уравнения системы следует $y = x$ и $x > 0$ (выражение $\ln \frac{|y|}{y}$ определено лишь для $y > 0$ – см. **Формулы, Словари, Модуль**). Тогда второе уравнение примет вид

$$2(x+a)^2 = 2a + 4 \quad \text{или} \quad x^2 + 2ax + a^2 - a - 2 = 0.$$

Последнее уравнение имеет единственное решение, если

$$D = 4a^2 - (a^2 - a - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \text{и} \quad x = 2 \quad (x > 0)$$

и единственное положительное решение, если

$$\left[\begin{array}{l} a^2 - a - 2 < 0, \\ \left\{\begin{array}{l} a^2 - a - 2 = 0, \\ -a > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

откуда $a \in [-1; 2)$.

Таким образом, $a \in \{-2\} \cup [-1, 2)$.