Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, июнь, 1999
Профиль: химия-биология, химия-физика
II Вариант

1. Какому числовому множеству принадлежит значение выражения:

$$\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}.$$

Решение. Избавившись от иррациональности в знаменателях, получим

$$\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}=\frac{3(6+2\sqrt{6})}{36-24}+\frac{3(6-2\sqrt{6})}{36-24}=\frac{18+6\sqrt{6}+18-6\sqrt{6}}{12}=\frac{36}{12}=3.$$

Ответ. Множеству натуральных чисел.
Замечание. Нужно учесть что $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}\ldots$

2. Привести пример квадратного уравнения, корни которого противоположных знаков.
Решение. Пусть, например, $x_1=1,\ x_2=-2$. Используя обратную теорему Виета, получим

$$x^2+x-2=0.$$

3. Решить уравнение $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0$.
Решение.

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0,\\ x^2-4=0,\end{array}\right.\\ x\geq-1,\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2,\ x=-2,\end{array}\right.\\ x\geq-1,\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2.\end{array}\right.$$

4. Определить $p,q\in\mathbf{R}$ так, чтобы многочлен $3x^4-4x^3+px^2+q$ делился без остатка на $(x-1)^2$.

Решение. Поскольку $x_0=1$ есть корень двойной кратности многочлена $p(x)=3x^4-4x^3+$ $+px^2+q$, следует что $p(x_0)=0$ и $p'(x_0)=0$. Таким образом

$$\left\{\begin{array}{l}p(x_0)=0,\\ p'(x_0)=0,\end{array}\right.\quad\text{или}\quad\left\{\begin{array}{l}p+q-1=0,\\ 2p=0,\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}q=1,\\ p=0.\end{array}\right.$$

5. Пусть даны функции $f(x)=0,5\sqrt{x^3+1},\quad g(x)=xe^{-x}$. Доказать что $f'(2)$ есть решение уравнения $g'(x)=0$.

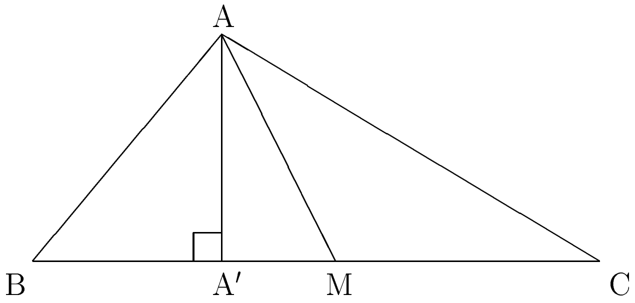
Решение. Определим $f'(x),\ f'(2)$ и $g'(x)$:

$$f'(x)=(\frac{1}{2}\sqrt{x^3+1})'=\frac{1}{2}\left((x^3+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot3x^2;$$
$$f'(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{8+1}}\cdot3\cdot4=1;$$
$$g'(x)=(xe^{-x})'=x'\cdot e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(1-x).$$

Уравнение $g'(x) = 0$ имеет единственное решение $x = 1$, которое совпадает с $f'(2)$.

6. Пусть ABC произвольный треугольник с высотой AA' и медианой AM. Найти длины сторон AB и AC треугольника, если $AA' = 12$см, $AM = 13$см, $BC = 30$см.

Решение.



Рассмотрим прямоугольный треугольник $AA'M$ ($AA' \perp BC$). Используя теорему Пифагоры найдем $A'M$:

$$A'M = \sqrt{AM^2 - (AA')^2} = \sqrt{169 - 144} = 5(\text{см}).$$

Поскольку AM - медиана, следует $BM = MC = \dfrac{1}{2}BC = 15(\text{см})$ и $BA' = BM - A'M = 10(\text{см})$; $A'C = A'M + MC = 20(\text{см})$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle AA'B$ найдем AB:

$$AB = \sqrt{(BA')^2 + (AA')^2} = \sqrt{100 + 144} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}(\text{см}),$$

а AC - из прямоугольного треугольника $\triangle AA'C$

$$AC = \sqrt{(A'C)^2 + (AA')^2} = \sqrt{400 + 144} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}(\text{см}).$$

7. При каких значениях действительного параметра a прямая $y = -10x + a$ является касательной графика функции $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

Решение. Прямая $y = -10x + a$ будет касательной к параболе $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$, если и только если уравнение $3x^2 - 4x - 2 = -10x + a$ имеет единственное решение. Следовательно, дискриминант квадратного уравнения

$$3x^2 + 6x - 2 - a = 0$$

должен быть равным нулю. Таким образом

$$36 + 4 \cdot 3(2 + a) = 0,$$

откуда $a = -5$.

8. Определить площадь фигуры ограниченной графиком функции $f(x) = 2x - 2$ и графиком первообразной этой функции $F(x)$, если $F(0) = 1$.

Решение. Находим первообразную функции $f(x) = 2x - 2$:

$$F(x) = \int (2x - 2)dx = x^2 - 2x + C.$$

Так как $F(0) = 1$, следует что $1 = C$ и, следовательно, необходимо найти площадь фигуры ограниченной графиками функций $f(x) = 2x - 2$ и $F(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Определим пределы интегрирования, решив уравнение $f(x) = F(x)$ или

$$2(x-1) = (x-1)^2,$$

откуда $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Таким образом

$$S = \int_1^3 [2x - 2 - (x^2 - 2x + 1)]dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x\right)_1^3 = \frac{4}{3}(\textit{кв.ед.}).$$

9. Решить неравенства $\log_{|2-x|}(x^2 - x - 2) \geq \log_{|2-x|}(x+6)$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности

$$\log_{|2-x|}(x^2 - x - 2) \geq \log_{|2-x|}(x+6) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |2-x| > 1, \\ x^2 - x - 2 \geq x + 6, \\ x + 6 > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < |2-x| < 1, \\ x^2 - x - 2 < x + 6, \\ x^2 - x - 2 > 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-6; -2] \cup (2; 3] \cup [4; +\infty).$$

Решение первой системы совокупности:

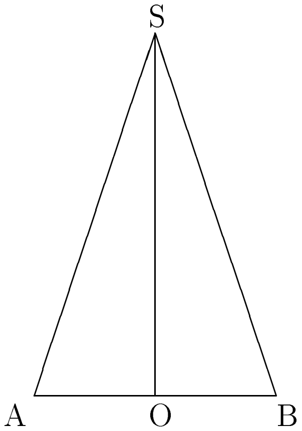
$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2 - x > 1, \\ 2 - x < -1, \end{array}\right. \\ x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x > -6, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x \leq -2, \end{array}\right. \\ x > -6, \end{array}\right. \Leftrightarrow\; x \in (-6; -2] \cup [4; +\infty).$$

Решение второй системы совокупности:

$$\left\{\begin{array}{l} -1 < 2 - x < 1, \\ x \neq 2, \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0, \\ x^2 - x - 2 > 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 < x < 3, \\ x \neq 2, \\ -2 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 2, \end{array}\right. \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x \in (2; 3).$$

10. Площадь основания прямого кругового конуса равна $9\pi(\text{см}^2)$, а площадь полной поверхности - $24\pi(\text{см}^2)$. Найти обьем конуса.

Решение.



Пусть $r = OB$ радиус основания конуса, $l = SB$ - его образующая и $h = SO$ - его высота. Согласно условиям

$$\begin{cases} \pi r^2 = 9\pi, \\ \pi r^2 + \pi r l = 24\pi, \end{cases}$$

откуда $r = 3$см и $l = 5$см. Тогда из прямоугольного треугольника $\triangle SOB$ находим высоту SO.

$$h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25 - 9} = 4(\text{см}).$$

Следовательно, объем конуса V равен:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi(\text{см}^3).$$