Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, июнь, 1999
Профиль: химия-биология, химия-физика
I Вариант

1. Пусть дана функция

$$f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{2^x}{2^{2x}-1}.$$

Вычислить $f(\log_2 3)$.

Решение.

$$f(\log_2 3)=\frac{2^{\log_2 3}}{2^{2\log_2 3}-1}.$$

Используя свойства логарифма, получим: $2^{\log_2 3}=3$ и $2^{2\log_2 3}-1=(2^{\log_2 3})^2-1=3^2-1=8$. Таким образом, $f(\log_2 3)=\dfrac{3}{8}$.

2. Напишите уравнение второго порядка с действительными корнями, произведение которых равнялось бы 4.

Решение. Пусть $x_1=1$, $x_2=4$. Тогда $x_1\cdot x_2=1\cdot 4=4$, $x_1+x_2=5$ и, используя обратную теорему Виета, получим квадратное уравнение

$$x^2-5x+4=0.$$

3. Пара действительных чисел $(x;y)$ удовлетворяет равенству $x-i=yi$. Определить действительные значения a, при которых данная пара удовлетворяет и равенству $x-i^2=2a-y$.

Решение. Имеем $x-i=yi \Leftrightarrow x-i(y+1)=0$. Используя определение равенства двух комплексных чисел ($Rez_1=Rez_2$ и $Imz_1=Imz_2$), получим систему

$$\begin{cases} x=0,\\ y+1=0,\end{cases}$$

откуда $x=0$ и $y=-1$.

Поскольку $i^2=-1$,

$$x-i^2=2a-y \ \Leftrightarrow\ x+1=2a-y,$$

или, учитывая что $x=0$ и $y=-1$, получим

$$1=2a+1,$$

откуда $a=0$.

4. Какой член разложения бинома $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ не содержит a?

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{3}=a^{\frac{3}{4}}$ запишем бином в форме $\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{4}}\right)^{17}$. Используя формулу биноминального коэффициента

$$T_{k+1}=C_{17}^{k}\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{k},$$

получим уравнение
$$\frac{-2(17-k)}{3}+\frac{3k}{4}=0,$$
или $-8(17-k)+9k=0$, откуда $k=8$.

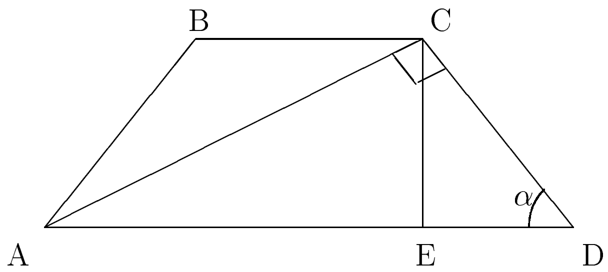
Следовательно,
$$T_9=C_{17}^8=\frac{17!}{8!9!}=24310.$$

5. При каких значениях действительного параметра p функция $f(x)=\cos x-px+2$ монотонно возрастает на $\mathbf{R}$?

Решение. $f'(x)=(\cos x-px+2)'=-\sin x-p$. Функция f монотонно возрастает на $\mathbf{R}$, если
$$-\sin x-p\geq 0 \quad \text{для} \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Поскольку $-1\leq\sin x\leq 1$ для $x\in\mathbf{R}$, неравенство $\sin x\leq -p$ имеет решения $x\in\mathbf{R}$, если и только если $-p\geq 1$, или $p\leq -1$.

6. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно непараллельным сторонам и равно 16см, а диагональ перпендикулярна непараллельной стороне. Найти длину диагонали и площадь трапеции.



Решение. Пусть $\angle CDA=\angle BCA=\alpha$ (равнобедренная трапеция). Из прямоугольного треугольника $\triangle ACD$ ($AC\perp CD$) следует $\angle CAD=90^\circ-\alpha$ и $\angle CAD=\angle BCA$ (внутренние накрест лежащие углы). Поскольку $AB=BC=16$, следует, что треугольник ABC - равнобедренный и $\angle BAC=\angle BCA=90^\circ-\alpha$.

Таким образом, AC - биссектриса угла BAC и
$$\alpha=2(90^\circ-\alpha),$$
откуда $\alpha=60^\circ$. Из $\triangle ACD$ получим $AD=2\cdot CD=2\cdot 16=32$(см) ($CD=16$(см) есть катет, противолежащий углу в 30°) и $AC=CD\,\mathrm{tg}\,60^\circ=16\sqrt{3}$(см).

Находим высоту CE трапеции:
$$CE=\frac{AC\cdot CD}{AD} \quad \text{или} \quad CE=\frac{16\sqrt{3}\cdot 16}{32}=8\sqrt{3}(\text{см}).$$
и площадь трапеции
$$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot CE=\frac{16+32}{2}\cdot 8\sqrt{3}=192\sqrt{3}(\text{см}^2).$$

7. При каких действительных значениях параметра a справедливо равенство

$$2f'''(x) + 3f''(x) - 8f'(x) + 3f(x) = 0, \quad \text{где} \quad f(x) = e^{ax}?$$

Решение. Определим первые три производные функции f:

$$f'(x) = ae^{ax}, \quad f''(x) = a^2e^{ax}, \quad f'''(x) = a^3e^{ax}$$

и получим уравнение

$$2a^3e^{ax} + 3a^2e^{ax} - 8ae^{ax} + 3e^{ax} = 0,$$

или, поскольку $e^{ax} \neq 0$,

$$2a^3 + 3a^2 - 8a + 3 = 0.$$

Удобно группируя, получим

$$(2a^3 + 6a^2) - (3a^2 + 9a) + a + 3 = 0,$$

$$2a^2(a + 3) - 3a(a + 3) + (a + 3) = 0,$$

или

$$(a + 3)(2a^2 - 3a + 1) = 0$$

откуда $(a + 3)(a - 1)(2a - 1) = 0$, и $a = -3$, $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$.

8. Определите первообразную функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{2}{x-1}$, график которой проходит через точку $A(0; 4)$.

Решение. Используя свойства неопределенного интеграла, получим

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{2}{x-1}\right) dx = \sqrt{x+1} + 2\ln|x-1| + C.$$

Определим значение постоянной C $(F(0) = 4)$

$$\sqrt{0+1} + 2\ln|0-1| + C = 4,$$

$$\sqrt{1} + 2 \cdot \ln 1 + C = 4, \quad 1 + 2 \cdot 0 + C = 4,$$

откуда $C = 3$. Таким образом, $F(x) = \sqrt{x+1} + 2\ln|x-1| + 3$.

9. Решить неравенства $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$, где a - действительный параметр, $a > 0$.

Решение.

$$\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a - x < 0, \\ 2ax - x^2 \geq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a - x \geq 0, \\ 2ax - x^2 \geq (a - x)^2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решая первую систему совокупности, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a - x < 0, \\ x(2a - x) \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > a, \\ 0 \leq x \leq 2a \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (a; 2a]$$

(здесь было использовано, что $a > 0$).

Решая вторую систему совокупности, получим

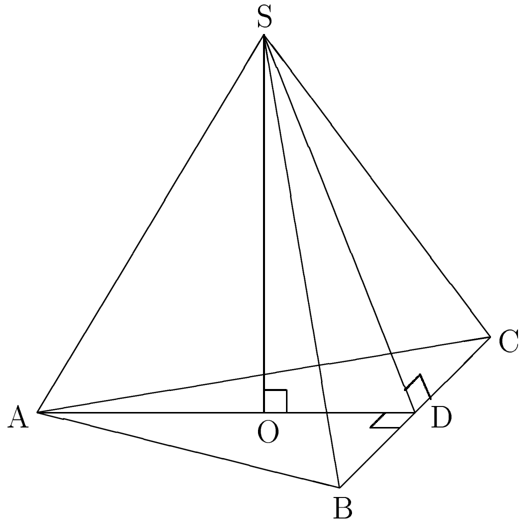
$$\begin{cases} a - x \ge 0, \\ 2ax - x^2 \ge a^2 - 2ax + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le a, \\ 2x^2 - 4ax + a^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le a, \\ a\left(a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \le x \le a\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in \left[a\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right); a\right].$$

Таким образом, неравенство имеет решения

$$x \in \left[a\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right); 2a\right], \ a > 0.$$

10. Величина угла между высотой правильной треугольной пирамиды и апофемой боковой грани равна 30°. Найти объем пирамиды, если длина апофемы равна 12см.



Решение. Пусть SO - высота пирамиды, SD - апофема ($SD \perp BC$). Тогда $AD \perp BC$ и $SO \perp AD$. Из прямоугольного треугольника $\triangle SOD$

$$SO = SD \cos\angle DSO = SD \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}(\text{см}),$$

$$OD = SD \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6(\text{см}).$$

Так как высота правильной треугольной пирамиды падает в точку пересечения биссектрис (в этом случае и медиан), $OD = \dfrac{1}{3}AD \ \Rightarrow \ AD = 18$. Из прямоугольного треугольника $\triangle ABD$

$$AB = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{36}{\sqrt{3}}(\text{см}).$$

Следовательно, площадь основания пирамиды равна

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\frac{36}{\sqrt{3}}\frac{36}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{36 \cdot 9}{\sqrt{3}}(\text{см}^2)$$

и её объем

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \frac{36 \cdot 9}{\sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{3} = 648(\text{см}^3).$$