Universitatea de Stat din Moldova
Facultatea Matematica si Informatica
Admiterea 2000
Test de evaluare la matematica
Profilurile: informatica, informatica si limbi moderne aplicate, management informational.

(Toate raspunsurile sa se argumenteze)

1. De rezolvat inecuatia
$$\sqrt{4x+1}-\sqrt{2x+4}\geq 1$$
$A)\ x\in\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ $B)\ x\in[6;+\infty)$ $C)\ x\in\left[-\frac{1}{4};0\right]\cup[6;+\infty)$

$D)\ x\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$ $E)\ x\in\left(0;\frac{41}{6}\right]$.

2. Cate radacini ale ecuatiei
$$2\sin x\cdot\cos x-3(\sin x+\cos x)+3=0$$
apartin segmentului $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$A)$ una $B)$ nici una $C)$ doua $D)$ trei $E)$ patru.

3. De rezolvat inecuatia
$$\log_x^2 2-5\log_x 2+6\geq 0$$
$A)\ x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$ $B)\ x\in(0,1)\cup(1;\sqrt[3]{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$

$C)\ x\in(0;1)\cup[\sqrt{2};+\infty)$ $D)\ x\in(1;\sqrt[3]{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$

$E)\ x\in(1;\sqrt[3]{2})$

4. De gasit marimile unghiurilor intr-un triunghi, daca se stie ca inaltimea si mediana duse din acelasi varf al triunghiului impart unghiul respectiv in trei parti egale.

$A)\ 30^\circ,\ 30^\circ,\ 120^\circ$ $B)\ 45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$ $C)\ 30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$

$D)\ 60^\circ,\ 60^\circ,\ 60^\circ$ $E)\ 25^\circ,\ 55^\circ,\ 100^\circ$.

5. Care dintre urmatoarele afirmatii sunt juste? (Pentru afirmatiile juste sa se utilizeze semnul de incercuire $\bigcirc$, iar pentru cele false $\times$)

1) Pentru orice triunghi ABC este adevatata relatia
$$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2};$$

2) Daca un patrulater are centru de simetrie, atunci acest patrulater este un dreptunghi;

3) Intr-un tringhi isoscel centrul cercului inscris coincide cu centrul cercului circumscris acestui triunghi;

4) Intr-un trapez isoscel punctul de intersectie al diagonalelor este centru de simetrie al acestui trapez;
5) Intr-un triunghi dreptunghic centrul cercului circumscris coincide cu mijlocul ipotenuzei acestui triunghi.

Probe selectate de dr. S.Cataranciuc, conferentiar al USM.

Solutii

1. Inecuatia este echivalenta cu inecuatia

$$\sqrt{4x+1} \geq 1 + \sqrt{2x+4}.$$

Cum ambii membri ai inecuatiei sunt pozitivi, ridicand la patrat, se obtine inecuatia echivalenta

$$4x+1 \geq 1 + 2\sqrt{2x+1} + 2x + 4$$

sau, simplificand prin 2 si izoland radicalul,

$$x - 2 \geq \sqrt{2x+4}.$$

Ultima inecuatie este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ (x-2)^2 \geq 2x+4, \\ 2x+4 \geq 0. \end{cases}$$

Se rezolva sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-4x+4 \geq 2x+4, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x(x-6) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 6, \end{array} \right. \end{cases}$$

si se obtine $x \geq 6$.

Prin urmare, multimea solutiilor inecuatiei este $[6; +\infty)$.

Raspuns: B.

2. Se noteaza $\sin x + \cos x = t$, $(|t| \leq \sqrt{2})$, atunci $\sin x \cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$, si ecuatia devine

$$t^2 - 1 - 3t + 3 = 0$$

sau $t^2 - 3t + 2 = 0$, de unde $t_1 = 1$ si $t_2 = 2$ (nu verifica conditia $|t| \leq \sqrt{2}$). Asadar

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Se utilizeaza metoda unghiului auxiliar (a se vedea **Ecuatii trigonometrice**) si se obtine

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Cum $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, rezulta $x_1 = 0$ si $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ si, prin urmare, pe segmentul dat ecuatia are doua solutii.

Raspuns: C.

3. *DVA* al inecuatiei este multimea $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Se noteaza $\log_x 2 = t$ si se obtine inecuatia patratica $t^2 - 5t + 6 \geq 0$ cu solutiile $t \leq 2$ sau $t \geq 3$. Asadar

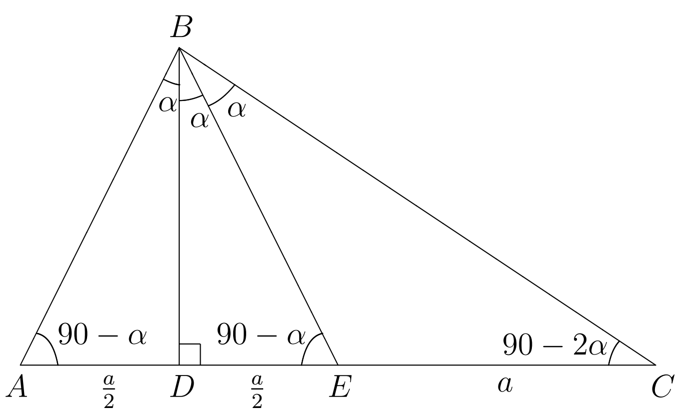
$$\left[\begin{array}{l} \log_x 2 \leq 2, \\ \log_x 2 \geq 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (0;1), \\ \left[\begin{array}{l} \log_x 2 \leq \log_x x^2, \\ \log_x 2 \leq \log_x x^3, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (1;+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} \log_x 2 \leq \log_x x^2, \\ \log_x 2 \geq \log_x x^3, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (0,1), \\ \left[\begin{array}{l} 2 \geq x^2, \\ 2 \leq x^3, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (1,+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} 2 \leq x^2, \\ 2 \geq x^3, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{2}, \\ x \geq \sqrt[3]{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x > 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{2}, \\ x \leq \sqrt[3]{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (0,1), \\ x \in (1, \sqrt[3]{2}) \cup [\sqrt{2}, +\infty), \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x \in (0,1) \cup (1, \sqrt[3]{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty).$$

Raspuns: B.

4. Fie in triunghiul ABC $BD \perp AC$ (inaltime), $BE-$ mediana ($AE = EC = a$) $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC = \alpha$.



Cum BD inaltime si bisectoare, $\triangle ABE$ este isoscel si, prin urmare, BD − mediana,

$$AD = \frac{a}{2} = DE.$$

Din $\triangle ABD$: $AB = \dfrac{AD}{\cos \angle BAD} = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}$. Se utilizeaza teorema sinusurilor:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \quad \text{sau} \quad \frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos 2\alpha}$$

de unde

$$4\sin\alpha\cos 2\alpha = \sin 3\alpha, \quad \text{sau} \quad 4\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) = \sin\alpha(3-4\sin^2\alpha).$$

Cum $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, rezulta

$$4 - 8\sin^2\alpha = 3 - 4\sin^2\alpha, \quad \text{sau} \quad 4\sin^2\alpha = 1$$

de unde $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ ($\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$ nu verifica conditiile problemei) si $\alpha = 30°$. Asadar unghiurile triunghiului sunt $\angle ABC = 3\alpha = 90°$, $\angle BAC = 90 - \alpha = 60°$, $\angle BCA = 30°$.

Raspuns: C.

5.

1) Afirmatie justa. Cum $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ (R (r) $-$ raza cercului circumscris (inscris) in triunghi), iar $2r \leq R$, rezulta

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2) Afirmatie falsa. De exemplu, rombul are centru de simetrie, dar nu numaidecat este dreptunghi.

3) Afirmatie falsa. De exemplu, intr-un triunghi isoscel dreptunghic centrul cercului circumscris coincide cu mijlocul ipotenuzei, iar centrul cercului inscris se afla in interiorul triunghiului.

4) Afirmatie falsa. Rezulta din definitia centrului de simetrie.

5) Afirmatie justa. Rezulta din teorema sinusurilor $\dfrac{c}{\sin 90°} = 2R \;\Rightarrow\; c = 2R$ si $R = \dfrac{c}{2}$ (c $-$ ipotenuza, R $-$ raza cercului circumscris).

Raspuns: 1) si 5) sunt afirmatii juste.