Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul la matematica pentru absolventii clasei 11, 8 iunie 1999

1. Sa se aduca la forma mai simpla expresia

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{x+1}{x(1-x^2)}$$

si sa se calculeze valoarea expresiei pentru $x=\frac{2}{3}$. (4 puncte)

Solutie. Domeniul valorilor admisibile (concis DVA) al expresiei date este $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1;0;1\}$. Se aduce la numitor comun, se tine seama de DVA, si se obtine

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x-1+2x+1}{x(x-1)}=\frac{3x}{x(x-1)}=\frac{3}{x-1}.$$

Pentru $x=\frac{2}{3}$ se obtine

$$\frac{3}{\frac{2}{3}-1}=-9.$$

2. Segmentul MB este perpendicular pe planul dreptunghiului $ABCD$. Punctul M este unit cu varfurile dreptunghiului. Numiti toate triunghiurile dreptunghice ce s-au format. (3 puncte)

Solutie. Se observa nemijlocit, utilizand teorema celor trei perpendiculare, ca toate fetele laterale formeaza triunghiuri dreptunghice. Asadar se obtin urmatoarele triunghiuri dreptunghice MBA, MBC, MAD si MCD.

3. Determinati domeniul de definitie al functiei

$$f(x)=\log_{0,5}(x+3)-\sqrt{1-2x}.$$

(3 puncte)

Solutie. Cum functia de sub semnul logaritmului poate lua doar valori pozitive, iar functia de sub semnul radicalului de ordinul doi - poate lua numai valori nenegative, domeniul de definitie se determina din sistemul:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ 1-2x\geq 0, \end{cases}$$

de unde rezulta $D(f)=(-3,\frac{1}{2}]$.

4. Aflati suma radacinilor ecuatiei $x^{1+\lg x}=100$. (5 puncte)

Solutie. DVA: $x>0$. Logaritmand ambele parti ale ecuatiei in baza 10 (in DVA ambii membri sunt pozitivi) se obtine

$$\lg x^{1+\lg x}=\lg 100$$

sau

$$(1+\lg x)\lg x=2.$$

Se noteaza $\lg x=t$ si se obtine ecuatia patrata

$$t(1+t)=2$$

cu solutiile $t_1 = -2,\ t_2 = 1$.

Se revine la necunoscuta initiala si se obtine totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ \lg x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{100}, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Ambele solutii sunt din DVA si insumandu-le se obtine ca suma lor este egala cu $10,01$.

5. Se considera functia

$$f(x) = 8 - x\sqrt{x}.$$

Sa se determine pentru ce valori ale lui x este adevarata egalitatea

$$f(x) + 2xf'(x) = 0. \tag{1}$$

(5 puncte)

Solutie. Domeniul de definitie al functiei date este $x \geq 0$. Reprezentam aceasta functie sub forma

$$f(x) = 8 - x^{\frac{3}{2}}.$$

Derivata acestei functii este

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Asadar, ecuatia (1) devine

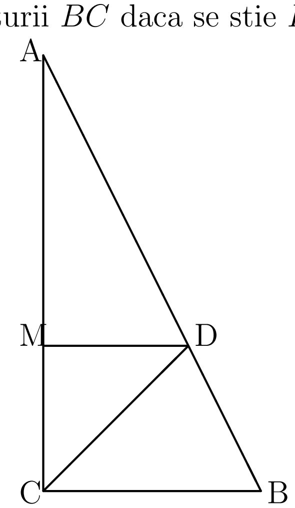
$$8 - x\sqrt{x} + 2x(-\frac{3}{2}\sqrt{x}) = 0$$

sau

$$x\sqrt{x} = 2,$$

de unde rezulta ca $x = \sqrt[3]{4}$. Aceasta valoare verifica DVA al ecuatiei ($x \geq 0$), deci este solutia ecuatiei (1).

6. In triunghiul ABC cu unghiul drept C, CD este bisectoare si $AD = 2\sqrt{3}cm$. Aflati lungimea laturii BC daca se stie $DM = \sqrt{3}cm$, DM este inaltimea triunghiului ADC. (6 puncte)



Solutie. Cum CD-bisectoarea unghiului drept, rezulta $\angle ACD = \angle BCD = 45°$. Triunghiul MDC este isoscel ($\angle MDC = \angle DCM = 45°$) de unde rezulta ca $MC = DM = \sqrt{3}$. Din triunghiul dreptunghic ADM se determina utilizand teorema lui Pitagora $AM = 3$. Astfel $AC =$

$AM + MC = 3 + \sqrt{3}$. $\triangle AMD$ este asemenea cu $\triangle ACB$ (triunghiuri dreptunghice si $\angle A$ comun), deci

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AC}, \text{ de unde } AB = \frac{AD \cdot AC}{AM} \text{ si } AB = \frac{2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{3} = 2(\sqrt{3}+1).$$

Deci

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4(\sqrt{3}+1)^2 - 3(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1.$$

7. Primitiva functiei

$$f(x) = 4x^3 + 2x,$$

pentru $x = 1$ ia valoarea 25. Aflati valoarea acestei primitive pentru $x = 2$. (5 puncte)

Solutie. Se determina primitiva functiei f:

$$F(x) = \int (4x^3 + 2x)dx = x^4 + x^2 + C.$$

Cum $F(1) = 25$ rezulta $1^4 + 1^2 + C = 25$, de unde $C = 23$ si $F(x) = x^4 + x^2 + 23$. Astfel $F(2) = 2^4 + 2^2 + 23 = 43$.

8. Aflati valoarea maxima si minima a functiei

$$f(x) = \cos 2x - 4\cos x$$

pe intervalul $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. (6 puncte)

Solutie. Se determina derivata functiei $f(x)$:

$$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 + 4\sin x$$

de unde, tinand seama ca $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,

$$f'(x) = 4\sin x - 4\sin x \cdot \cos x = 4\sin x(1 - \cos x).$$

Egaland derivata cu zero se obtine ecuatia

$$4\sin x(1 - \cos x) = 0.$$

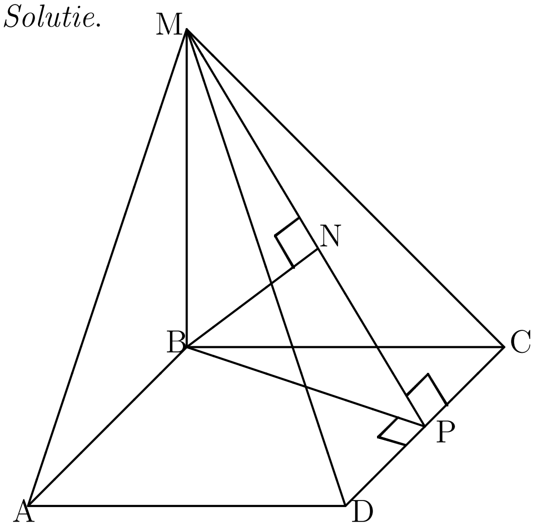
Aceasta ecuatie are o singura solutie pe segmentul $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, si anume $x = 0$. Cum

$$f(0) = -3,$$
$$f(-\tfrac{\pi}{2}) = -1,$$
$$f(\tfrac{\pi}{2}) = -1,$$

deducem ca cea mai mica valoare a functiei initiale este -3 pentru $x = 0$, iar cea mai mare este -1 pentru $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

9. Baza unei piramide este un romb cu unghiul obtuz de $120°$. Piciorul inaltimii piramidei este varful acestui unghi din care se duce o perpendiculara de lungimea $12cm$ pe fata laterala opusa. Sa se calculeze volumul piramidei daca aceasta perpendiculara formeaza cu planul bazei un unghi de $60°$. (7 puncte)

Solutie.



Cum BM perpendiculara pe planul $ABCD$ rezulta ca punctul N apartine inaltimii MP a triunghiului MDC (acest fapt nu este atat de evident, dar poate fi demonstrat utilizand definitia distantei de la un punct pana la un plan). De aici, $\angle NBP = 60°$, iar $\angle MBN = 30°$. Aflam inaltimea BM si latura BP din triunghiurile MBN si BNP, respectiv. Astfel

$$h = MB = \frac{BN}{\cos \angle MBN} = \frac{12}{\cos 30°} = \frac{24}{\sqrt{3}},$$
$$BP = \frac{BN}{\cos 60°} = 24.$$

La randul sau BP este inaltimea rombului $ABCD$. Din $\triangle BPC$

$$BC = \frac{BP}{\sin 60°} = \frac{24}{\sin 60°} = \frac{48}{\sqrt{3}}.$$

Se afla aria bazei piramidei:

$$S = CD \cdot BC \cdot \sin 60° = \frac{1152}{\sqrt{3}}$$

si volumul piramidei:

$$V = \frac{1}{3}Sh = 3072(un.cubice).$$

10. Pentru ce valori ale parametrului real a ecuatia

$$\frac{(2^x - a)(2^x + a)}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

admite o radacina reala. (8 puncte)

Solutie. DVA: $x \in \mathbf{R} \setminus \{2; 3\}$. In DVA ecuatia initiala este echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = a, \\ 2^x = -a. \end{array} \right.$$

Pentru $a = 0$ solutii nu sunt ($2^x > 0$).
Daca $a > 0$ avem

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = a, \\ 2^x = -a, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \log_2 a, \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x = \log_2 a.$$

Tinand seama de DVA in acest caz se obtine $\log_2 a \neq 2,\ \log_2 a \neq 3$ sau $a \neq 4,\ a \neq 8$. Similar, pentru $a < 0$ se obtine o singura solutie $x = \log_2(-a)$ daca $a \neq -4,\ a \neq -8$. Asadar, ecuatia are o solutie reala daca $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; \pm 4; \pm 8\}$.

Note:
1. Timp de lucru 3 ore astronomice, adica 180 minute.
2. In dependenta de punctaj notele vor fi

Nota	**puncte**
10	49 – 52
9	44 – 48
8	38 – 43
7	31 – 37
6	23 – 30
5	17 – 22