Ministerul Educatiei si Stiintei
Examen la matematica de absolvire a scolii de cultura generala, 2001

Timp alocat: 180 minute.

1. Calculati $\log_2\left(16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}}\right)$.

2. Determinati valoarea maxima a functiei $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

3. Bisectoarele unghiurilor A si B a paralelogramului $ABCD$ se intersecteaza in punctul O. Determinati masura unghiului AOB.

4. Fie functia $f : (-\infty; \frac{1}{3}) \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$. Determinati primitiva acestei functii, graficul careia trece prin punctul $A(0; \frac{2}{3})$.

5. Rezolvati ecuatia

$$\log_3(x-1) - \log_3(2x-7) = \log_3 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-4).$$

6. Determinati $\cos\alpha$, daca $\cos 2\alpha = 2\sqrt{2}\sin\alpha + 2$, iar $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

7. Rezolvati inecuatia

$$(x+4)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

8. Intr-o piramida triunghiulara regulata lungimea inaltimei ei este egala cu $\sqrt{3}$, iar muchia laterala formeaza cu planul bazei un unghi de masura de $30°$. Determinati volumul piramidei.

9. Determinati pentru ce valori ale parametrului real a dreapta $y = ax + 7$ este tangenta la graficul functiei $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2 + 6x + a$.

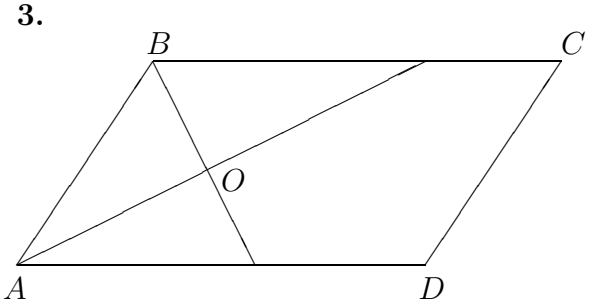
Solutii

1. $16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}} = 2^4(2^5 \cdot 2^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{(5+\frac{1}{5})\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{13}{20}} = 2^{4+\frac{13}{20}} = 2^{\frac{93}{20}}$, deci $\log_2 16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}} = \log_2 2^{\frac{93}{20}} = \frac{93}{20} = 4,65$.

2. Valoarea maxima a trinomului $ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ este egala cu $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. In cazul dat $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{-2\cdot 2} = \dfrac{3}{4}$ si, prin urmare

$$y_{max} = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{8}.$$

3.



Cum suma unghiurilor A si B ale paralelogramului $ABCD$ (a se vedea desenul) este egala cu $180°$, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90°$. Suma unghiurilor interioare ale triunghiului AOB este $180°$. Prin urmare

$$\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - 90° = 90°.$$

4. Cum $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$, si $F(0) = \frac{2}{3}$, rezulta $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3\cdot 0} + C = \frac{2}{3}$, de unde $C = \frac{4}{3}$. Asadar $F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + \frac{4}{3}$.

5. Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuatiei este intervalul $(4; +\infty)$, care se determina rezolvand sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \\ x - 4 > 0. \end{cases}$$

Utilizand proprietatile functiei logaritmice (a se vedea, de exemplu, **Ecuatii logaritmice**) in DVA se obtin urmatoarele echivalente

$$\log_3(x-1) - \log_3(2x-7) = \log_3 2 - \log_3(x-4) \Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(x-4) = \log_3 2 + \log_3(2x-7),$$

de unde $\log_3(x-1)(x-4) = \log_3 2(2x-7)$ sau

$$(x-1)(x-4) = 2(2x-7).$$

Se rezolva ecuatia patrata obtinuta $x^2 - 9x + 18 = 0$ de unde $x_1 = 3 \notin DVA$ si $x_2 = 6 \in DVA$. Asadar $x = 6$.

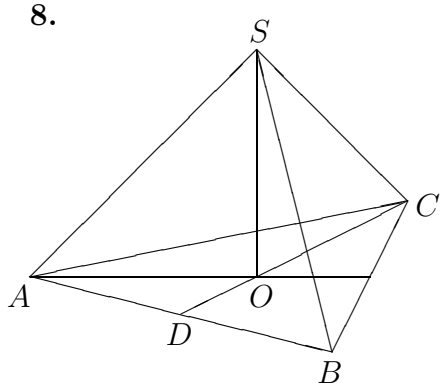
6. Cum $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, se obtine $1 - 2\sin^2\alpha = 2\sqrt{2}\sin\alpha + 2$ sau $2\sin^2\alpha + 2\sqrt{2}\sin\alpha + 1 = 0$, de unde $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se determina $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Cum α apartine cadranului IV, $\cos\alpha > 0$ si $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.

$$(x+4)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x + 4 \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1,\ x_2 = 2 \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \\ x \in [-4; +\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty).$$

8.



Fie $SABC$ - piramida triunghiulara regulata, $SO = h = \sqrt{3}$ - inaltimea ei, $\angle SCO = 30^\circ$, a - lungimea laturii triunghiului echilateral din baza piramidei. Atunci

$$CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad CO = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Din triunghiul dreptunghic SOC ($SO \perp OC$) se obtine

$$CO = SO \operatorname{ctg} \angle SCO = \sqrt{3} \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Asadar $\frac{a}{\sqrt{3}} = 3$, de unde $a = 3\sqrt{3}$. Se determina aria bazei piramidei:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(3\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

si volumul piramidei

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4}(\text{un.volum})$$

9. Dreapta $y = ax + 7$ este tangenta la graficul trinomului $x^2 + 6x + a$, daca ecuatia $ax + 7 = x^2 + 6x + a$, echivalenta cu ecuatia $x^2 + (6 - a)x + a - 7 = 0$ are o singura solutie. Ultima ecuatie are o singura solutie, daca discriminantul ei $D = (6 - a)^2 - 4(a - 7)$ este egal cu zero. Prin urmare

$$36 - 12a + a^2 - 4a + 28 = 0 \quad \text{sau} \quad a^2 - 16a + 64 = 0$$

de unde $a = 8$.