Ministerul Educatiei si Stiintei
Examen la matematica de absolvire a scolii de cultura generala, 2001

Timp alocat: 180 minute.

1. Calculati $\log_2\left(16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}}\right)$.

2. Determinati valoarea maxima a functiei $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

3. Bisectoarele unghiurilor A si B a paralelogramului $ABCD$ se intersecteaza in punctul O. Determinati masura unghiului AOB.

4. Fie functia $f : (-\infty; \frac{1}{3}) \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$. Determinati primitiva acestei functii, graficul careia trece prin punctul $A(0; \frac{2}{3})$.

5. Rezolvati ecuatia

$$\log_3(x-1) - \log_3(2x-7) = \log_3 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-4).$$

6. Determinati $\cos\alpha$, daca $\cos 2\alpha = 2\sqrt{2}\sin\alpha + 2$, iar $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

7. Rezolvati inecuatia

$$(x+4)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

8. Intr-o piramida triunghiulara regulata lungimea inaltimei ei este egala cu $\sqrt{3}$, iar muchia laterala formeaza cu planul bazei un unghi de masura de $30°$. Determinati volumul piramidei.

9. Determinati pentru ce valori ale parametrului real a dreapta $y = ax + 7$ este tangenta la graficul functiei $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2 + 6x + a$.

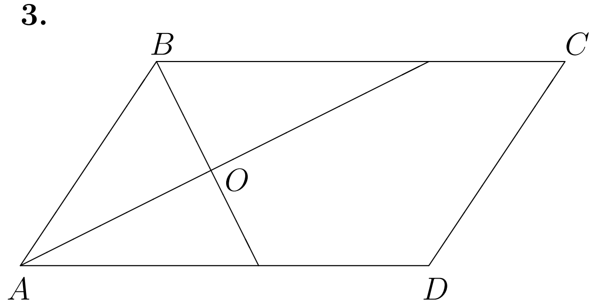
Solutii

1. $16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}} = 2^4(2^5 \cdot 2^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{(5+\frac{1}{5})\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{13}{20}} = 2^{4+\frac{13}{20}} = 2^{\frac{93}{20}}$, deci $\log_2 16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}} = \log_2 2^{\frac{93}{20}} = \frac{93}{20} = 4,65$.

2. Valoarea maxima a trinomului $ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ este egala cu $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. In cazul dat $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{-2\cdot 2} = \dfrac{3}{4}$ si, prin urmare

$$y_{max} = -2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{8}.$$

3.



Cum suma unghiurilor A si B ale paralelogramului $ABCD$ (a se vedea desenul) este egala cu 180°, $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90^\circ$. Suma unghiurilor interioare ale triunghiului AOB este 180°. Prin urmare

$$\angle AOB=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

4. Cum $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x}}=-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x}+C$, si $F(0)=\dfrac{2}{3}$, rezulta $-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-3\cdot 0}+C=\dfrac{2}{3}$, de unde $C=\dfrac{4}{3}$. Asadar $F(x)=-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-3x}+\dfrac{4}{3}$.

5. Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuatiei este intervalul $(4;+\infty)$, care se determina rezolvand sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} x-1>0\\ 2x-7>0\\ x-4>0.\end{cases}$$

Utilizand proprietatile functiei logaritmice (a se vedea, de exemplu, **Ecuatii logaritmice**) in DVA se obtin urmatoarele echivalente

$$\log_3(x-1)-\log_3(2x-7)=\log_3 2-\log_3(x-4)\Leftrightarrow\log_3(x-1)+\log_3(x-4)=\log_3 2+\log_3(2x-7),$$

de unde $\log_3(x-1)(x-4)=\log_3 2(2x-7)$ sau

$$(x-1)(x-4)=2(2x-7).$$

Se rezolva ecuatia patrata obtinuta $x^2-9x+18=0$ de unde $x_1=3\notin DVA$ si $x_2=6\in DVA$. Asadar $x=6$.

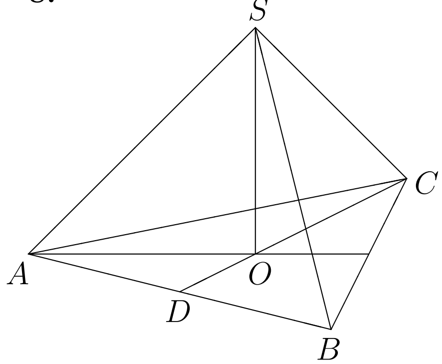
6. Cum $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, se obtine $1-2\sin^2\alpha=2\sqrt{2}\sin\alpha+2$ sau $2\sin^2\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha+1=0$, de unde $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se determina $\cos\alpha$: $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Cum α apartine cadranului IV, $\cos\alpha>0$ si $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

7.

$$(x+4)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0,\\ \begin{cases} x^2-x-2>0,\\ x+4\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1,\ x_2=2\\ \begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\\ x\in[-4;+\infty)\end{cases}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty).$$

8.



Fie $SABC$ - piramida triunghiulara regulata, $SO = h = \sqrt{3}$ - inaltimea ei, $\angle SCO = 30°$, a - lungimea laturii triunghiului echilateral din baza piramidei. Atunci

$$CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad CO = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Din triunghiul dreptunghic SOC ($SO \perp OC$) se obtine

$$CO = SO \operatorname{ctg} \angle SCO = \sqrt{3} \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Asadar $\frac{a}{\sqrt{3}} = 3$, de unde $a = 3\sqrt{3}$. Se determina aria bazei piramidei:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{1}{2}(3\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

si volumul piramidei

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4}(\text{un.volum})$$

9. Dreapta $y = ax + 7$ este tangenta la graficul trinomului $x^2 + 6x + a$, daca ecuatia $ax + 7 = x^2 + 6x + a$, echivalenta cu ecuatia $x^2 + (6 - a)x + a - 7 = 0$ are o singura solutie. Ultima ecuatie are o singura solutie, daca discriminantul ei $D = (6 - a)^2 - 4(a - 7)$ este egal cu zero. Prin urmare

$$36 - 12a + a^2 - 4a + 28 = 0 \quad \text{sau} \quad a^2 - 16a + 64 = 0$$

de unde $a = 8$.