Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, sesiunea iunie, 1999
Profilul umanist
Varianta IV

Timp de realizare - 180 minute

1. Sa se determine carei multimi de numere apartine valoarea expresiei numerice $25^{\log_5 6} + 7^{\frac{1}{\log_5 7}}$.

Solutie. Se utilizeaza identitatea de baza a logaritmului ($a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$), formula $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ ($a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$) si se obtine

$$25^{\log_5 6} + 7^{\frac{1}{\log_5 7}} = 5^{2\log_5 6} + 7^{\log_7 5} = \left(5^{\log_5 6}\right)^2 + 5 = 6^2 + 5 = 41.$$

Asadar, valoarea expresiei date este un numar natural.

Nota. Tinem sa mentionam, ca $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \ldots$

2. Dati exemplu de un sistem de doua ecuatii liniare compatibil nedeterminat.

Solutie. De exemplu, sistemul

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2, \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat. In adevar, solutiile acestui sistem sunt $x = 1 - a,\ y = a,\ a \in \mathbf{R}$.

3. Sa se determine domeniul de definitie al functiei $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \lg x$.

Solutie. Domeniul de definitie al functiei $f(x)$ se determina din sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x > 0, \end{cases}$$

(expresia de sub semnul radacinii de ordinul doi poate primi doar valori nenegative, iar cea de sub simbolul logaritmului doar valori pozitve). Rezolvand sistemul se obtine $D(f) = (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

4. Rezolvati ecuatia $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{2}$.

Solutie. DVA al ecuatiei este $x \in \mathbf{R}$. In DVA ecuatia este echivalenta cu ecuatia

$$2(e^x - \frac{1}{e^x}) = e^x + \frac{1}{e^x},$$

sau $e^x - \dfrac{3}{e^x} = 0$, de unde rezulta $e^{2x} = 3$ si $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

5. Sa se determine intervalele de monotonie ale functiei $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, si comparati valorile functiei in punctele $x_1 = \log_5 4$ si $x_2 = \log_5 3$.

Solutie. Cum $f'(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, utilizand metoda intervalelor se obtine ca $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1; +\infty)$ si $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0; 1)$. Prin urmare, pentru $x \in (0; 1)$ functia $f(x)$ este strict descrescatoare si cum

$$0 = \log_5 1 < \log_5 3 < \log_5 4 < \log_5 5 = 1$$

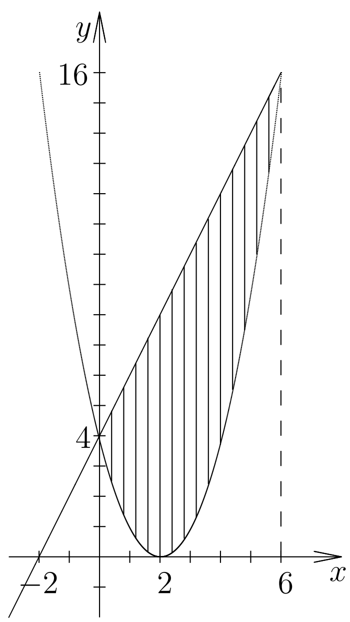
rezulta $f(\log_5 3) > f(\log_5 4)$.

6. Calculati aria multimii marginite de graficele functiilor $f(x) = x^2 - 4x + 4$ si $g(x) = 2x + 4$.

Solutie. Aria figurii marginite de graficele functiilor $f(x) = x^2 - 4x + 4$ si $g(x) = 2x + 4$ (a se vedea desenul) se determina utilizand formula:

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx,$$

unde a si b sunt limitele de integrare.



Pentru a determina a si b se rezolva ecuatia $f(x) = g(x)$, adica $x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$ sau $x^2 - 6x = 0$, de unde (tinand seama ca $a < b$) se obtine $a = x_1 = 0$ si $b = x_2 = 6$.

Asadar

$$S = \int_0^6 (2x+4-x^2+4x-4)dx = \int_0^6 (6x-x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 3\cdot 36 - 36\cdot 2 = 36(\textit{unit. de arie}).$$

7. Fie functia $f(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x}$. Sa se determine valoarea expresiei: $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

Solutie. Domeniul de definitie al functiei f este $\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.\right\}$ Se utilizeaza formulele de reducere $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$ si se obtine

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2\cos(\frac{\pi}{2} - x) + 1}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} + \frac{2\cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} =$$

$$= \frac{2\sin x + 1}{\sin x} + \frac{-2\sin x + 1}{-\sin x} = \frac{2\sin x + 1 + 2\sin x - 1}{\sin x} = \frac{4\sin x}{\sin x} = 4.$$

(se tine seama, ca daca $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$, atunci $\frac{\pi}{2} \pm x \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$).

8. Care termen din dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ nu-l contine pe a.

Solutie. Cum $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{3} = a^{\frac{3}{4}}$, binomul se scrie $\left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{3}{4}}\right)^{17}$. Utilizand formula coeficientului binomial

$$T_{k+1} = C_{17}^k \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k} \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^k,$$

se obtine ecuatia

$$\frac{-2(17-k)}{3} + \frac{3k}{4} = 0,$$

sau $-8(17-k) + 9k = 0$, de unde $k = 8$.

Asadar

$$T_9 = C_{17}^8 = \frac{17!}{8!9!} = 24310.$$

9. Intr-un corp sferic cu volumul $10cm^3$ este inscris un con, sectiunea axiala a caruia este un triunghi dreptunghic. Aflati volumul conului.

Solutie. Cum sectiunea axiala a conului este un triunghi dreptunghic (isoscel), rezulta ca ipotenuza lui coincide cu diametrul, adica raza bazei conului r, raza sferei R si inaltimea conului h sunt egale: $r = R = h$.

Cum $\frac{4\pi}{3}R^3 = 10$, rezulta $R^3 = \frac{30}{4\pi}$, iar volumul conului:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi\frac{30}{4\pi} = \frac{5}{2}(\textit{un. de volum}).$$