Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, sesiunea iunie, 1999
Profilul umanist
Varianta III

Timp de realizare - 180 minute

1. Sa se determine carei multimi de numere apartine valoarea expresiei numerice

$$\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}.$$

Solutie. Se aduce la numitor comun si se obtine:

$$\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}=\frac{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{4^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{8}{16-12}=2.$$

Asadar valoarea expresiei numerice date este un numar natural.
Nota. Se tine seama ca $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}\ldots$

2. Scrieti o ecuatie polinomiala de gradul trei, una din radacini fiind $x=1$.
Solutie. Fie radacinile ecuatiei polinomiale de gradul trei $x_1=1,\ x_2=2$ si $x_3=3$. Atunci conform teoremei Bezu

$$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ \text{ sau }\ P_3(x)=x^3-6x^2+11x-6.$$

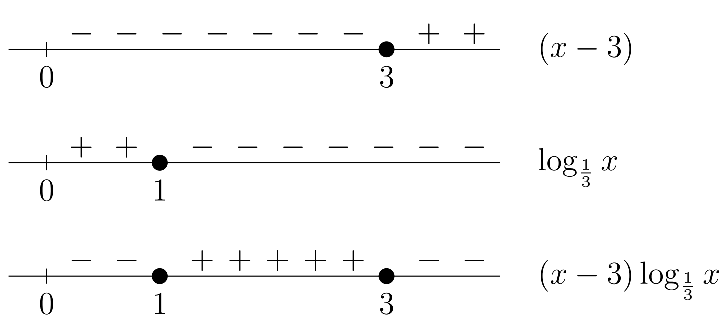
In general, daca coeficientii polinomului $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ verifica relatia $a_0+a_1+a_2+a_3=0$, $x=1$ este radacina a acestei ecuatii.

3. Aflati suma radacinilor reale ale ecuatiei $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.
Solutie. DVA al ecuatiei este $\mathbf{R}$. Se noteaza $\sqrt[3]{x}=t$ si se obtine ecuatia patrata $2t^2+t-3=0$ cu solutiile $t_1=1$ si $t_2=-\dfrac{3}{2}$.
Se revine la variabila intiala si se obtine

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=1,\\[2mm] \sqrt[3]{x}=-\dfrac{3}{2},\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x_1=1,\\[2mm] x_2=-\dfrac{27}{8},\end{array}\right.$$

si suma solutiilor reale $x_1+x_2=-\dfrac{19}{8}$.

4. Rezolvati inecuatia $(x-3)\cdot\log_{\frac{1}{3}}x\le 0$.
Solutie. DVA al inecuatiei este $x>0$. Se utilizeaza metoda generalizata a intervalelor

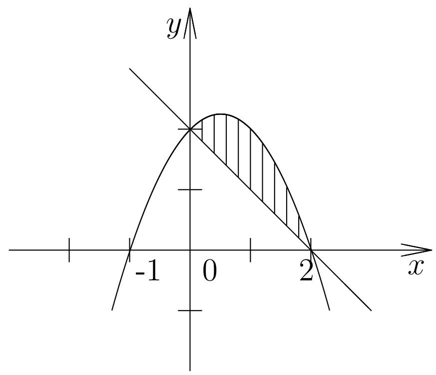


si se obtine $x\in(0,1]\cup[3;+\infty)$.

5. Aratati ca parabola $y = x^2 - x + 5,35$ nu intersecteaza graficul functiei $f(x) = 2\sin x + 3$.

Solutie. Cum $x^2 - x + 5,35 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5,35 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 5,1$, domeniul de valori ai functiei $y = x^2 - x + 5,35$ este $[5,1; +\infty)$. In acelasi timp, $|\sin x| \le 1$ implica $1 \le 2\sin x + 3 \le 5$ si prin urmare graficele acestei functii nu se intersecteaza.

6.Calculati aria multimii marginite de graficele functiilor $f(x) = 2 + x - x^2$ si $g(x) = 2 - x$.
Solutie.



Aria S a figurii marginita de graficele functiilor $f(x) = 2 + x - x^2$ si $g(x) = 2 - x$ (a se vedea desenul) se determina din formula

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

unde a si b sunt limitele de integrare, ce se determina rezolvand ecuatia $f(x) = g(x)$.
Asadar

$$2 + x - x^2 = 2 - x \quad \text{sau} \quad x^2 - 2x = 0$$

de unde, tinand seama ca $a < b$, se obtine $a = 0,\ b = 2$.
Prin urmare

$$S = \int_0^2 (2 + x - x^2 - 2 + x)dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}(un.arie).$$

7. Sa se determine pentru care valori ale parametrului real a sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ 3x + ay + z = 1, \\ 3x + y + az = 1, \end{cases}$ admite o singura solutie.

Solutie. Conform regulei Cramer, sistemul va avea o solutie unica daca determinantul principal al lui va fi diferit de zero:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin urmare, dezvoltand determinantul, se obtine

$$a^3 - 7a + 6 \neq 0,$$

sau, tinand seama ca

$$\begin{aligned} a^3-7a+6 &= a^3-a-6a+6 = a(a^2-1)-(6a-6) = a(a-1)(a+1)-6(a-1) = \\ &= (a-1)(a^2+a-6) = (a-1)(a+2)(a-3) \end{aligned}$$

se obtine $a \neq 1,\ a \neq -2$ si $a \neq 3$ sau $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$.

8. Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ in punctele de tangenta $x_0 = -3$.

Solutie. Ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul x_0 este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

unde $f'(x_0)$ este valoarea derivatei functiei in x_0.

Cum

$$f(x_0) = f(-3) = 2\cdot(-3)^2 + \frac{1}{3}(-3)^3 = 9,$$
$$f'(x) = (2x^2 + \frac{1}{3}x^3)' = 4x + x^2,$$
$$f'(-3) = 4\cdot(-3) + (-3)^2 = -3$$

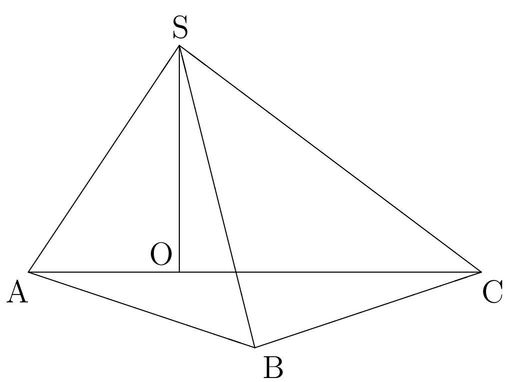
se obtine

$$y - 9 = -3(x+3)$$

sau, dupa transformari elementare, $y = -3x$.

9. Baza unei piramide triunghiulare regulate este un triughi dreptunghic cu catetele de $12cm$ si $16cm$. Aflati volumul piramidei daca muchiile laterale sunt congruente si au lungimea $2\sqrt{41}cm$.

Solutie.



Se observa ca cuvantul <u>*regulata*</u> in conditiile problemei este de prisos (altfel problema nu are sens).

Cum muchiile laterale sunt congruente, piciorul inaltimii cade in centrul circumferintei circumscrise bazei piramidei. Prin urmare, piciorul inaltimii piramidei se afla in mijlocul ipotenuzei AC.

Cum

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20(cm),$$
$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10(cm),$$
$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{164 - 100} = \sqrt{64} = 8(cm),$$
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96(cm^2)$$

se obtine

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 8 = 256(cm^3).$$