Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat al matematica, sesiunea iunie, 1999
Profil umanist
Varianta II

Timp de realizare - 180 minute

1. Fie fucntia $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{2^x}{2^{2x}-1}$. Calculati $f(\log_2 3)$.

Solutie. Se utilizeaza identitatea de baza ($a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$) si se obtine

$$f(\log_2 3) = \frac{2^{\log_2 3}}{2^{2\log_2 3} - 1} = \frac{3}{\left(2^{\log_2 3}\right)^2 - 1} = \frac{3}{3^2 - 1} = \frac{3}{8}.$$

2. Scrieti o ecuatie de gradul doi cu radacini reale, astfel incat produsul radacinilor sa fie egal cu 4.

Solutie. Se utilizeaza teorema reciproca a lui Viete, de exemplu pentru $x_1 = 1$ si $x_2 = 4$ (atunci $x_1 \cdot x_2 = 4,\ x_1 + x_2 = 5$) si se obtine ecuatia patrata

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

3. Fie $z = \dfrac{1-i}{2+i}$. Sa se determine pentru ce valori ale lui a si b este adevarata egalitatea $\sqrt{5} \cdot z + a + bi = 5 - 3i$.

Solutie. Cum

$$z = \frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1-3i}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

egalitatea devine

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) + a + bi = 5 - 3i,$$

sau

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + a\right) + \left(b - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) i = 5 - 3i,$$

de unde, tinand seama de definitia egalitatii a doua numere complexe ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow Rez_1 = Rez_2$ si $Imz_1 = Imz_2$) se obtine sistemul

$$\begin{cases} a + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 5, \\ b - \dfrac{3}{\sqrt{5}} = -3, \end{cases}$$

cu solutiile $a = 5 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = \dfrac{3}{\sqrt{5}} - 3.$

4. Se da functia $f(x) = 1 - \cos x$. Calculati valoarea expresiei $f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Solutie. Se aplica formulele de reducere $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$ si se obtine

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1-\sin x+1+\sin x = 2.$$

5. Sa se determine pentru ce valori reale ale lui m polinomul $2x^3 - x^2 + mx - 2$ se divide cu $x - 2$.

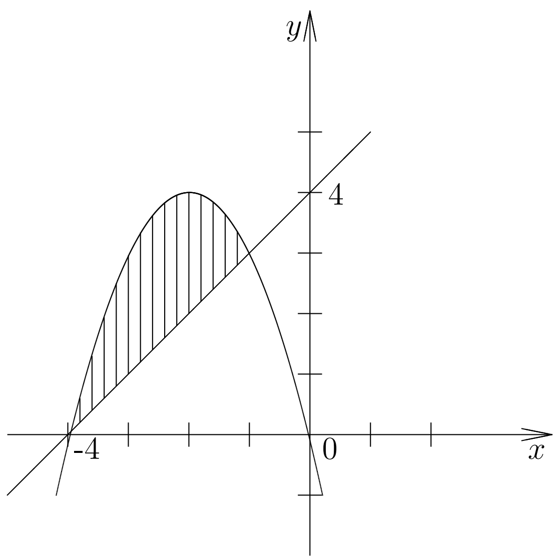
Solutie. Cum

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + m \cdot 2 - 2 = 10 + 2m,$$

rezultand ecuatia liniara $10 + 2m = 0$, se obtine $m = -5$.

6. Calculati aria multimii marginite de graficele functiilor $f(x) = -x^2 - 4x$ si $g(x) = 4 + x$.

Solutie.



Aria figurii, marginite de graficele functiilor $f(x) = -x^2 - 4x$ si $g(x) = x + 4$ (a se vedea desenul), se determina utilizand formula:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

unde a si b sunt limitele de integrare.

Pentru a determina a si b se rezolva ecuatia $f(x) = g(x)$, adica

$$-x^2 - 4x = 4 + x,$$

sau

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

de unde, tinand seama ca $a < b$, se obtine $x_1 = a = -4,\ x_2 = b = -1$.

Asadar

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-4}^{-1}(-x^2-4x-x-4)dx = \int\limits_{-4}^{-1}(-x^2-5x-4)dx = -\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{-1} = \\ &= -\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4+\frac{64}{3}-40+16\right) = 4,5(un.arie). \end{aligned}$$

7. Fie functia $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\mathbf{D} \subset \mathbf{R})$, $f(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$. Rezolvati ecuatia $3f(x) = 2f'(x)$.

Solutie. Utilizand formula de derivare a functiei compuse se determina $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+1}} \cdot (x^2-3x+1)' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$$

si ecuatia devine

$$3\sqrt{x^2-3x+1} = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+1}},$$

sau

$$3(x^2-3x+1) = 2x-3,$$

de unde rezulta ecuatia patrata

$$3x^2-11x+6=0$$

cu solutiile $x_1 = \dfrac{2}{3}$ si $x_2 = 3$.

Se efectuiaza verificarea si ramane $x = 3$.

8. Rezolvati inecuatia $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1$.

Solutie. Se utilizeaza afirmatia 3 din inecuatii logaritmice si se obtine totalitatea de sisteme de inecuatii

$$\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ \dfrac{x+3}{x-1} > x, \\ x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{x+3}{x-1} < x, \\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0, \end{cases} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in (1;3), \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x \in (1;3).$$

In adevar, primul sistem al totalitatii, tinand seama ca $x > 1$, este echivalent cu sistemul

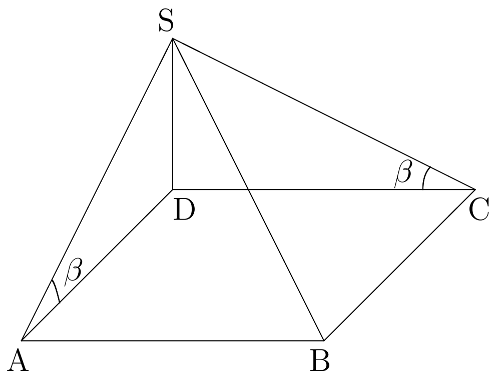
$$\begin{cases} x>1, \\ x+3 < x(x-1), \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x>1, \\ x^2-2x-3<0, \end{cases} \quad \text{de unde} \;\; x \in (1;3).$$

Al doilea sistem al totalitatii nu are solutii deoarece pentru $x \in (0;1)$ (prima restrictie) avem $\frac{x+3}{x-1} < 0$, ceea ce contrazice ultima inecuatie a sistemului.

Asadar, multimea solutiilor inecuatiei este (1;3).

9. Baza unei piramide este un patrat cu latura a. Doua fete laterale sunt perpendiculare pe planul bazei, iar alte doua fete formeaza cu planul bazei unghiul β. Aflati aria suprafetei laterale a piramidei.

Solutie.



Se considera triunghiul dreptunghic SDC ($SD \perp DC$) si utilizand relatiile metrice intr-un triunghi dreptunghic, se obtine

$$SD = \frac{CD}{\cos\angle DCS} = \frac{a}{\cos\beta},$$

$$SD = CD \operatorname{tg}\angle DCS = a \operatorname{tg}\beta,$$

si cum $\triangle SDC = \triangle SDA$ (SD - comuna, $AD = DC$) rezulta ca

$$S_{\triangle SDA} = S_{\triangle SDC} = \frac{1}{2} SD \cdot DC = \frac{1}{2} a \operatorname{tg}\beta \cdot a = \frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Cum $SA \perp AB$ ($SC \perp BC$) - rezulta din teorema celor trei perpendiculare,

$$S_{\triangle SCB} = \frac{1}{2} SC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos\beta} \cdot a = \frac{a^2}{2\cos\beta}.$$

Similar $S_{\triangle SAB} = \frac{a^2}{2\cos\beta}$.

Asadar, aria suprafetei laterale a piramidei este

$$S = S_{\triangle SDC} + S_{\triangle SDA} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} = a^2 \operatorname{tg}\beta + \frac{a^2}{\cos\beta} = a^2 \frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta}.$$