Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, sesiunea iunie, 1999
Profilul umanist
Variantul I

Timp de realizare - 180 minute

1. Fie functia $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{3^x}{3^{2x}-1}$. Calculati $f(\log_3 2)$.

Solutie. Se tine seama de identitatea logaritmica de baza $a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ si se obtine

$$f(\log_3 2) = \frac{3^{\log_3 2}}{3^{2\log_3 2}-1} = \frac{2}{\left(3^{\log_3 2}\right)^2 - 1} = \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3};$$

2. Dati exemplu de ecuatie de gradul doi care admite radacinile reale negative distincte.

Solutie. Se utilizeaza teorema reciproca a lui Viete de exemplu, pentru $x_1 = -1$ si $x_2 = -2$, si se obtine ecuatia patrata $x^2 + 3x + 2 = 0$. In caz general, o ecuatie patrata $ax^2 + bx + c = 0$ are doua solutii reale negative distincte daca si numai daca:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} > 0, \\ \dfrac{b}{a} > 0, \\ b^2 - 4ac > 0. \end{cases}$$

3. Pentru care valori reale ale lui x si y este adevarata egalitatea $\dfrac{x+y+(y-3)i}{5+3i} = 1 + i$.

Solutie. Egalitatea se scrie

$$x + y + (y-3)i = (1+i)(5+3i)$$

sau

$$x + y + (y-3)i = 2 + 8i,$$

de unde, tinand seama de definitia egalitatii a doua numere complexe z_1 si z_2 ($Rez_1 = Rez_2$ si $Imz_1 = Imz_2$), se obtine sistemul

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y - 3 = 8 \end{cases}$$

cu solutiile $x_1 = -9$ si $y = 11$.

4. Rezolvati ecuatia $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2} = 0$.

Solutie.

$$(x-4)\sqrt{3+2x-x^2} = 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 4 = 0, \\ 3 + 2x - x^2 = 0, \end{array} \right. \\ 3 + 2x - x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 4, \\ x_2 = -1,\ x_3 = 3, \end{array} \right. \\ -1 \leq x \leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 3. \end{array} \right.$$

5. Fie functia $f(x) = a\sin 4x + b\cos 2x$. Sa se determine parametrii reali a si b, daca se stie ca $f'\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = 4$ si $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2$.

0 Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician http://math.ournet.md

Solutie. Se determina derivata functiei $f(x)$:

$$f'(x) = (a \sin 4x + b \cos 2x)' = 4a \cos 4x - 2b \sin 2x.$$

Cum $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4$ si $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$, rezulta

$$\begin{cases} 4a \cos \frac{7\pi}{3} - 2b \sin \frac{7\pi}{6} = 4, \\ 4a \cos 3\pi - 2b \sin \frac{3\pi}{2} = 2, \end{cases}$$

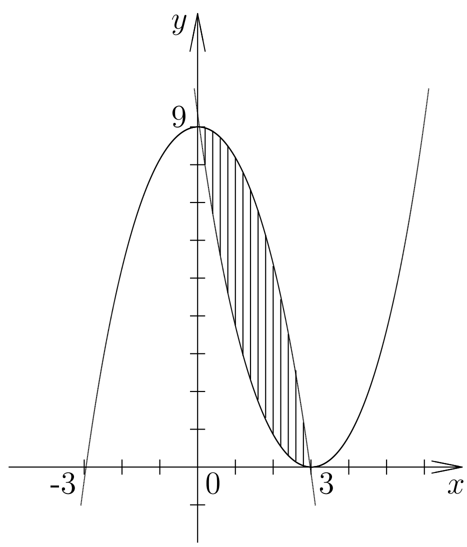
sau

$$\begin{cases} 2a + b = 4, \\ -4a + 2b = 2, \end{cases}$$

de unde $a = \frac{3}{4}$ si $b = \frac{5}{2}$.

6. Sa se calculeze aria multimii marginite de graficele functiilor $f(x) = 9 - x^2$ si $g(x) = x^2 - 6x + 9$.

Solutie.



Aria figurii marginite de graficele functiilor $f(x) = 9 - x^2$ si $g(x) = x^2 - 6x + 9$ (a se vedea desenul) se determina din formula

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

unde a si b sunt limitele de integrare, ce se obtin rezolvand ecuatia

$$f(x) = g(x),$$

adica $9 - x^2 = x^2 - 6x + 9$ sau $2x^2 - 6x = 0$, de unde (tinand seama ca $a < b$) se obtine $a = x_1 = 0$ si $b = x_2 = 3$.

[0] Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician http://math.ournet.md

Asadar

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^3 (9 - x^2 - x^2 + 6x - 9)dx = \int\limits_0^3 (6x - 2x^2)dx = \\ &= \left(3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 27 - 18 = 9(un.arie). \end{aligned}$$

7. Daca impartim polinomul $P(x) = 2x^3 - mx^2 + nx - 16$ la $x - 3$ si la $x + 1$, obtinem in ambele cazuri restul -2. Ce rest vom obtine, daca vom imparti polinomul $P(x)$ la $x - 1$.

Solutie. Cum

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - m \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 - 16 = -2,$$

$$P(-1) = 2(-1)^3 - m \cdot (-1)^2 + n \cdot (-1) - 16 = -2,$$

rezulta

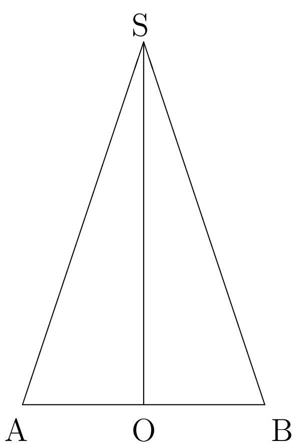
$$\begin{cases} -9m + 3n = -40, \\ -m - n = 16. \end{cases}$$

Rezolvand sistemul, se obtine $m = -\frac{2}{3}$ si $n = -\frac{46}{3}$. Asadar polinomul $P(x)$ devine $P(x) = 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{46}{3}x - 16$ si restul la impartirea lui la $(x - 1)$ este egal cu

$$P(1) = 2 + \frac{2}{3} - \frac{46}{3} - 16 = -\frac{86}{3}.$$

8. Aria bazei unui con circular drept este $9\pi cm^2$, iar aria suprafetei totale este $24\pi cm^2$. Aflati volumul conului circular drept.

Solutie.



Cum aria bazei $S_b = \pi R^2$ (R - raza bazei conului), aria suprafetei laterale $S_{lat} = \pi Rl$ (l - generatoarea conului), se obtine sistemul:

$$\begin{cases} \pi R^2 = 9\pi, \\ \pi Rl = 24\pi - 9\pi, \end{cases}$$

0 Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician http://math.ournet.md

de unde, $R = 3$ si $l = 5$. Din triunghiul dreptunghic SOA (a se vedea desenul), se determina inaltimea conului SO:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(cm).$$

Prin urmare, volumul conului

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3} 9\pi 4 = 12\pi(cm^3).$$

9. Rezolvati inecuatia $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \leq 1$.
Solutie.

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \leq \log_{2x} 2x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 \leq 2x, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 2x, \\ 2x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array} \right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < 2, \\ x > 3, \end{array} \right. \\ 1 \leq x \leq 6, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 6, \end{array} \right. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (\tfrac{1}{2}; 1] \cup (3; 6], \\ x \in (0; \tfrac{1}{2}), \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad x \in (0; \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}; 1] \cup (3; 6].$$

[0] Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician http://math.ournet.md