Ministerul Educatiei si Tineretului al Republicii Moldova
Agentia de Evaluare si Examinare
Examenul de bacalaureat la matematica, 17 iunie 2009
Profilul umanist, arte, sport

Timp alocat: 180 minute.

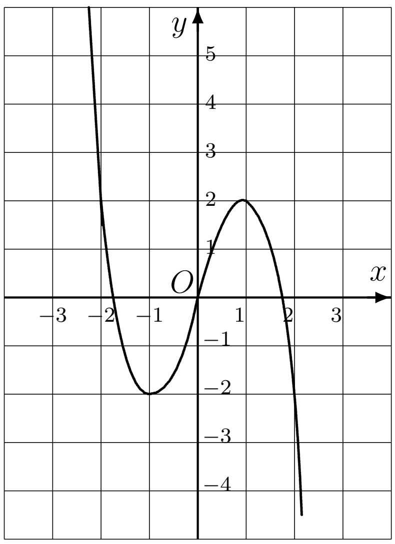
In itemii 1-4 completati casetele libere, astfel incat propozitiile obtinute sa fie adevarate.

1. Scrieti in casetele numerele $\log_7 8$ si $\ln 8$ astfel incat inegalitatea obtinuta sa fie adevarata.

$$\boxed{} < \boxed{}$$

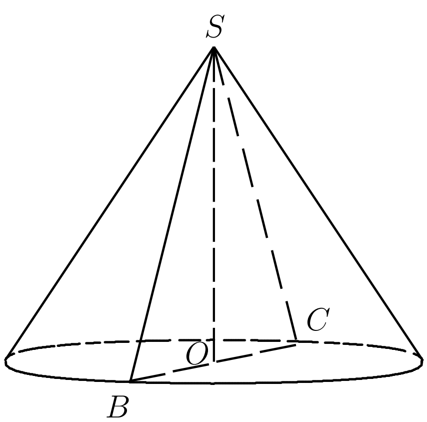
2. Pe desen este reprezentat graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - x^3$. Scrieti in caseta multimea tuturor valorilor lui x, pentru care $f(x) \leq -2$.

$$x \in \boxed{}$$



3. Daca $x \in \mathbb{R}$ si $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^n$, atunci $n = \boxed{}$.

4. Daca sectiunea axiala a conului circular drept este un triunghi echilateral, atunci generatoarea conului formeaza cu planul bazei un unghi, masura caruia este egala cu $\boxed{}$.



5. In mapa "Matematica" a calculatorului lui Eugen se contin 8 fisiere la geometrie si 12 – la algebra. Care este probabilitatea ca un fisier din aceasta mapa, deschis la intamplare, este la geometrie?

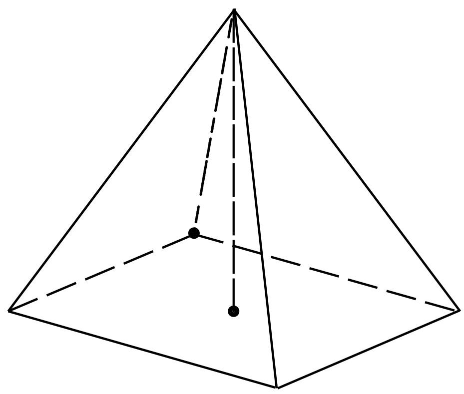
6. Fie polinomul $P(X) = 2X^3 - 3iX + a,\ a \in \mathbb{C}$. Determinati valoarea lui a, daca se stie ca $\alpha = 1 + i$ este radacina a polinomului $P(X)$.

7. Aflati cardinalul multimii solutiilor naturale ale inecuatiei $\dfrac{4}{x-2} \leq \dfrac{3}{x-4}$.

8. Determinati perimetrul trapezului isoscel cu lungimile bazelor egale cu 9 cm si 5 cm, iar masura unghiului ascutit este egala cu 30^o.

9. Determinati intervalele de monotonie ale functiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$.

10. Intr-o piramida patrulatera regulata din piciorul inaltimii se duce o perpendiculara la o muchie laterala. Aceasta perpendiculara formeaza cu inaltimea piramidei un unghi de masura egala cu 60^o. Determinati volumul piramidei, daca lungimea perpendicularei este egala cu 12 cm.



11. Fie functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 4$. Una dintre primitivele functiei f trece prin punctul $A\left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$. Scrieti ecuatia tangentei la graficul acestei primitive, punctul de tangenta fiind intersectia graficului acestei primitive cu axa ordonatelor.

12. Rezolvati in $\mathbb{R}$ ecuatia $(2x^2 - x + 1) \cdot |\log_2 x| = -\log_2 x$.

Solutii

1. $\log_7 8 < \ln 8$, deoarece $\log_7 8 = \dfrac{\ln 8}{\ln 7}$, iar $\ln 7 > \ln e = 1$.

2. $x \in \{-1\} \cup [2, +\infty)$.

3. $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x^{2+\frac{1}{3}} = x^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{7}{3}$.

4. 60^o (in triunghiul echilateral unghiurile sunt de 60^o).

5. Numarul total al fisierelor din mapa "Matematica" este egal cu $8+12=20$ (numarul total de cazuri), iar numarul fisierelor la geometrie – 8 (numarul cazurilor favorabile evenimentului "fisier deschis la intamplare esle la geometrie"). Cum avem schema evenimentelor echiprobabile, aplicand formula probabilitatii clasice, vom obtine:

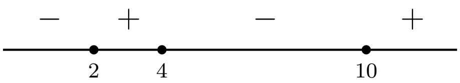
$$p = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Raspuns: $p = \frac{2}{5}$.

6. Cum $P(1+i)=0$, se obtine:
$2(1+i)^3 - 3i(1+i) + a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(1+3i+3i^2+i^3) - 3i - 3i^2 + a = 0 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2(-2+2i) - 3i + 3 + a = 0 \;\Leftrightarrow\; -4+4i-3i+3+a=0,$ de unde $a = 1-i$.

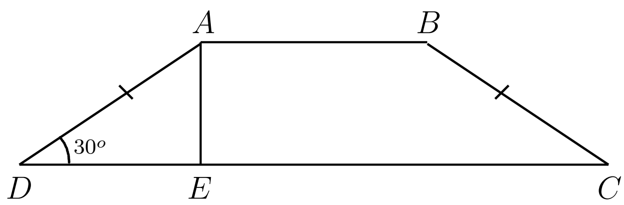
7. Aplicam metoda intervalelor:

$$\frac{4}{x-2} \le \frac{3}{x-4} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4(x-4)-3(x-2)}{(x-2)(x-4)} \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-10}{(x-2)(x-4)} \le 0.$$



Asadar $S = (-\infty; 2) \cup (4; 10]$. Cum $S \cap \mathbb{N} = \{0;1;5;6;7;8;9;10\}$, rezulta $cardS_{\mathbb{N}} = 8$.

8.



Fie $ABCD$ – trapez isoscel cu $AB = 5$ cm, $CD = 10$ cm si $m(\angle ADC) = 30^o$. Coboram $AE \perp CD$. Deoarece trapezul este isoscel $ED = \frac{CD - AB}{2} = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm).
Din triunghiul dreptunghic $\triangle AED$ obtinem:

$$AD = \frac{ED}{\cos 30^o} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

Aflam perimetrul trapezului:

$$P = AB + BC + CD + AD = 5 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + 9 + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 14 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

9. Aflam punctele critice din $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)' = 2x + \frac{2}{x^2} = 2\frac{x^3+1}{x^2} = 2\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}.$$

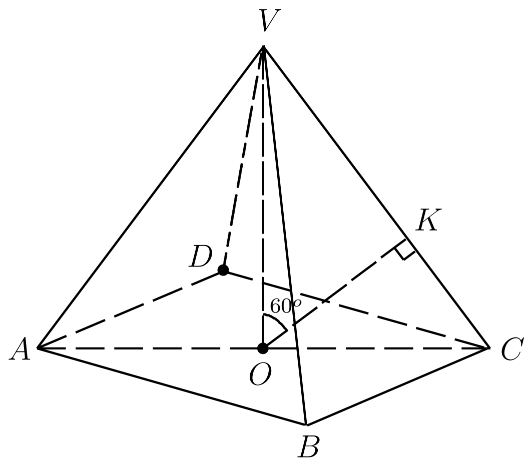
Din $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$.

Cercetam semnul derivatei, utilizand metoda intervalelor:

$-$		$+$		$+$
$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Asadar, $f(x)$ este crescatoare pe $[-1;0)$ si pe $(0;+\infty)$ si $f(x)$ este descrescatoare pe $(-\infty;-3]$.

10.



Fie $AB = a$, $VO \perp AC$, $VO = h$ – inaltimea piramidei, $OK \perp VC$, $OK = 12$ cm, $m(\angle VOK) = 60^o$.

Din $\triangle OKC$, dreptunghic in K, avem:

$$OC = \frac{OK}{\cos(\angle KOC)} = \frac{12}{\cos 30^o} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

iar din $\triangle VKO$, dreptunghic in K, avem:

$$VO = \frac{OK}{\cos 60^o} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24 \text{ (cm)}.$$

Cum $AC = 2OC$ (inaltimea cade in centrul de simetrie a bazei), rezulta

$$AC = 2 \cdot 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Din $\triangle ABC$, dreptunghic in B, avem: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $a^2 + a^2 = \left(16\sqrt{3}\right)^2$, $2a^2 = 256 \cdot 3$, $a^2 = 128 \cdot 3$ si $a = 8\sqrt{6}$ (cm).

Aflam volumul piramidei:

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot (128 \cdot 3) \cdot 24 = 128 \cdot 24 = 3072 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

11. Aflam integrala nedefinita din functia f:

$$\int f(x)dx = \int (3x-4)dx = \frac{3}{2}x^2 - 4x + C.$$

Cum una din primitive contine punctul $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ avem $-\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + C$, de unde $C = 1$ si $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$.

Aflam ordonata punctului de intersectie a primitivei cu axa ordonatelor:

$$F(0) = 0 - 4 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Scriem ecuatia tangentei la graficul functiei $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$ in punctul $(0; 1)$:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$$

sau $y - 1 = -4x, \quad 4x + y - 1 = 0.$

Raspuns: $4x + y - 1 = 0.$

12. $(2x^2 - x + 1) \cdot |\log_2 x| = -\log_2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2x^2 - x + 1)\log_2 x = -\log_2 x \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x^2 - x + 1)(-\log_2 x) = -\log_2 x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2x^2 - x + 2)\log_2 x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x^2 - x)\log_2 x = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x = 1 \end{array} \right. \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right. \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Raspuns: $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}.$

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 2 puncte
Nr. 5 — 4 puncte
Nr. 6 — 5 puncte
Nr. 7 — 6 puncte
Nr. 8 — 5 puncte
Nr. 9 — 6 puncte
Nr. 10 — 8 puncte
Nr. 11 — 8 puncte
Nr. 12 — 8 puncte
total: 58 puncte