Ministerul Educatiei si Tineretului al Republicii Moldova
Agentia de Evaluare si Examinare
Examenul de bacalaureat la matematica, 15 iunie 2009
Profilul umanist, arte, sport

Timp alocat: 180 minute.

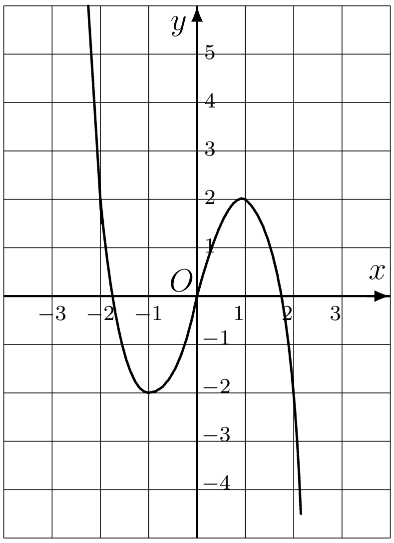
In itemii 1-4 completati casetele libere, astfel incat propozitiile obtinute sa fie adevarate.

1. Scrieti in casetele numerele $\lg 2$ si $\ln 2$ astfel incat inegalitatea obtinuta sa fie adevarata.

$$\boxed{} < \boxed{}$$

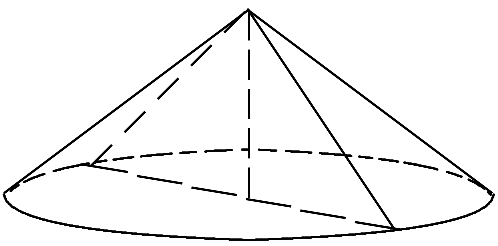
2. Pe desen este reprezentat graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - x^3$. Scrieti in caseta multimea tuturor valorilor lui x, pentru care $f(x) \geq 2$.

$$x \in \boxed{}$$



3. Daca $x \in \mathbb{R}$ si $x^3 \cdot \sqrt[3]{x} = x^n$, atunci $n = \boxed{}$.

4. Daca masura unghiului de la varf a sectiunii axiale a conului circular drept este egala cu 120^o, atunci generatoarea conului formeaza cu planul bazei un unghi, masura caruia este egala cu $\boxed{}$.



5. Intr-o sectie a unei agentii activeaza 6 barbati si 3 doamne. Unul dintre colaboratori urmeaza sa plece in deplasare. Care este probabilitatea ca colaboratorul care va pleca in deplasare este doamna, daca se stie ca toti colaboratorii sectiei au sanse egale sa plece in deplasare?

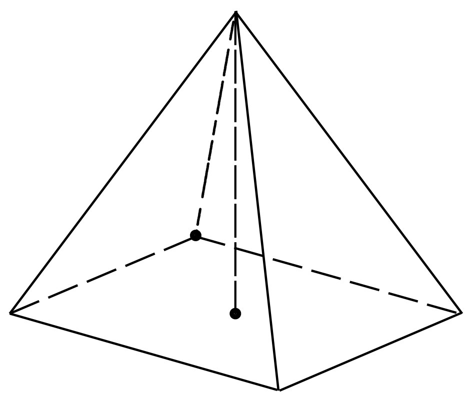
6. Fie polinomul $P(X) = 3X^3 + (10 - i)X + a,\ a \in \mathbb{C}$. Determinati valoarea lui a, daca se stie ca $\alpha = 1 - 2i$ este radacina a polinomului $P(X)$.

7. Aflati cardinalul multimii solutiilor naturale ale inecuatiei $\dfrac{3}{x-1} \leq \dfrac{2}{x-2}$.

8. Trapezul $ABCD$ este dreptunghic cu $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^o$, $AD = 5$ cm, $DC = AD$, $m(\angle DCB) = 150^o$. Determinati perimetrul trapezului $ABCD$.

9. Determinati intervalele de monotonie ale functiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - \dfrac{54}{x}$.

10. Intr-o piramida patrulatera regulata din piciorul inaltimii se duce o perpendiculara la o muchie laterala care formeaza cu planul bazei piramidei un unghi de masura egala cu 60^o. Determinati volumul piramidei, daca lungimea perpendicularei este egala cu 6 cm.



11. Fie functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 4$. Una dintre primitivele functiei f trece prin punctul $A(1; -2)$. Scrieti ecuatia tangentei la graficul acestei primitive, punctul de tangenta fiind intersectia graficului acestei primitive cu axa ordonatelor.

12. Rezolvati in $\mathbb{R}$ ecuatia $(x^2 - 5x + 5) \cdot \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| = -\log_{\frac{1}{2}} x$.

Solutii

1. $\lg 2 < \ln 2$, deoarece $\lg 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$, iar $\ln 10 > \ln e = 1$.

2. $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$.

3. $x^3 \cdot \sqrt[3]{x} = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x^{3+\frac{1}{3}} = x^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{10}{3}$.

4. 30^o. Sectiunea axiala a conului circular drept reprezinta un triunghi isoscel, deci unghiul de la baza (unghiul format de generatoarea conului cu planul bazei) va fi egal cu $(180^o - 120^o) : 2 = 30^o$.

5. Numarul colaboratorilor din sectie este egal cu $6 + 3 = 9$ (numarul cazurilor totale), iar numarul doamnelor 3 (numarul cazurilor favorabile evenimentului "doamna va pleca in deplasare"). Cum avem schema evenimentelor echiprobabile, aplicand formula probabilitatii clasice, vom obtine:

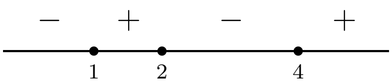
$$p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Raspuns: $p = \dfrac{1}{3}$.

6. Cum $P(1 - 2i) = 0$, se obtine:
$3(1-2i)^3 + (10-i)(1-2i) + a = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(1 - 6i + 12i^2 - 8i^3) + 10 - 20i - i + 2i^2 + a = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 3(-11 + 2i) + 8 - 21i + a = 0 \;\Leftrightarrow\; -33 + 6i + 8 - 21i + a = 0$, de unde $a = 25 + 15i$.

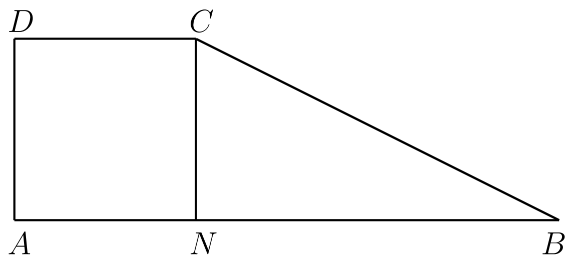
7. Aplicam metoda intervalelor:

$$\frac{3}{x-1} \le \frac{2}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3(x-2) - 2(x-1)}{(x-1)(x-2)} \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-4}{(x-1)(x-2)} \le 0.$$



Asadar $S = (-\infty; 1) \cup (2; 4]$. Cum $S \cap \mathbb{N} = \{0; 3; 4\}$, rezulta $card S_{\mathbb{N}} = 3$.

8.



Cum $m(\angle DCB) = 150^o$, rezulta $m(\angle CBA) = 30^o$.

Fie $CN \perp AB$. In $\triangle CNB$, dreptunghic in N, avem $\angle CBN = 30^o$, $CN = 5$ cm si, prin urmare,

$$BC = \frac{CN}{\sin(\angle CBA)} = \frac{5}{\sin 30^o} = 10 \text{ (cm)},$$

$$BN = CN \cdot \text{ctg } 30^o = 5 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Aflam $AB = AN + BN = 5 + 5\sqrt{3}$ (cm). Asadar, perimetrul trapezului:

$$P = AD + DC + BC + AB = 5 + 5 + 10 + (5 + 5\sqrt{3}) = 25 + 5\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

9. Aflam punctele critice din $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \left(x^2 - \frac{54}{x}\right)' = 2x + \frac{54}{x^2} = 2\frac{x^3 + 27}{x^2} = 2\frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x^2}.$$

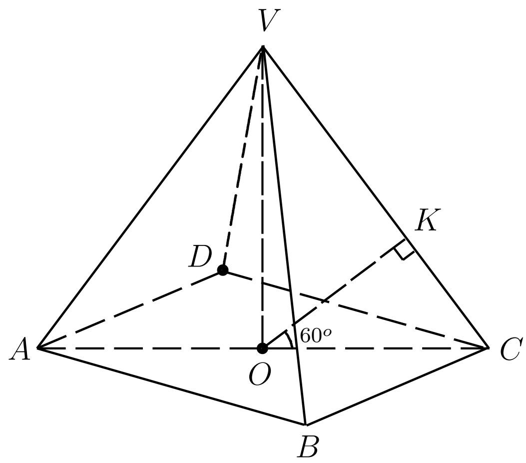
Din $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -3$.

Cercetam semnul derivatei, utilizand metoda intervalelor:

$-$		$+$		$+$
$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Asadar, $f(x)$ este crescatoare pe $[-3; 0)$ si pe $(0; +\infty)$ si $f(x)$ este descrescatoare pe $(-\infty; -3]$.

10.



Fie $AB = a$, $VO \perp AC$, $VO = h$ – inaltimea piramidei, $OK \perp VC$, $OK = 6$ cm, $m(\angle KOC) = 60^o$.

Din $\triangle OKC$, dreptunghic in K, avem:

$$OC = \frac{OK}{\sin 30^o} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ (cm)},$$

iar din $\triangle VKO$, dreptunghic in K, avem:

$$VO = \frac{OK}{\sin(\angle OVK)} = \frac{6}{\sin 60^o} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Cum $AC = 2OC$ (inaltimea cade in centrul de simetrie a bazei), rezulta

$$AC = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (cm)}.$$

Din $\triangle ABC$, dreptunghic in B, avem: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $a^2 + a^2 = 24^2$, $2a^2 = 576$, $a^2 = 288$ si $a = 12\sqrt{2}$ (cm).

Aflam volumul piramidei:

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 4\sqrt{3} = 384\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

11. Aflam integrala nedefinita din functia f:

$$\int f(x)dx = \int (2x-4)dx = x^2 - 4x + C.$$

Cum una din primitive contine punctul $(1; -2)$ avem $-2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + C$, de unde $C = 1$ si $F(x) = x^2 - 4x + 1$.

Aflam ordonata punctului de intersectie a primitivei cu axa ordonatelor:

$$F(0) = 0 - 4 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Scriem ecuatia tangentei la graficul functiei $F(x) = x^2 - 4x + 1$ in punctul $(0; 1)$:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$$

sau $y - 1 = -4x, \quad 4x + y - 1 = 0.$

Raspuns: $4x + y - 1 = 0.$

12. $(x^2 - 5x + 5) \cdot \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| = -\log_{\frac{1}{2}} x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x^2 - 5x + 5)\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_{\frac{1}{2}} x \\ 0 < x \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2 - 5x + 5)\left(-\log_{\frac{1}{2}} x\right) = -\log_{\frac{1}{2}} x \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x^2 - 5x + 6)\log_{\frac{1}{2}} x = 0 \\ 0 < x \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2 - 5x + 4)\log_{\frac{1}{2}} x = 0 \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ 0 < x \le 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. .$$

Raspuns: $S = \{1; 4\}$.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 2 puncte
Nr. 5 — 4 puncte
Nr. 6 — 5 puncte
Nr. 7 — 6 puncte
Nr. 8 — 5 puncte
Nr. 9 — 6 puncte
Nr. 10 — 8 puncte
Nr. 11 — 8 puncte
Nr. 12 — 8 puncte
total: 58 puncte