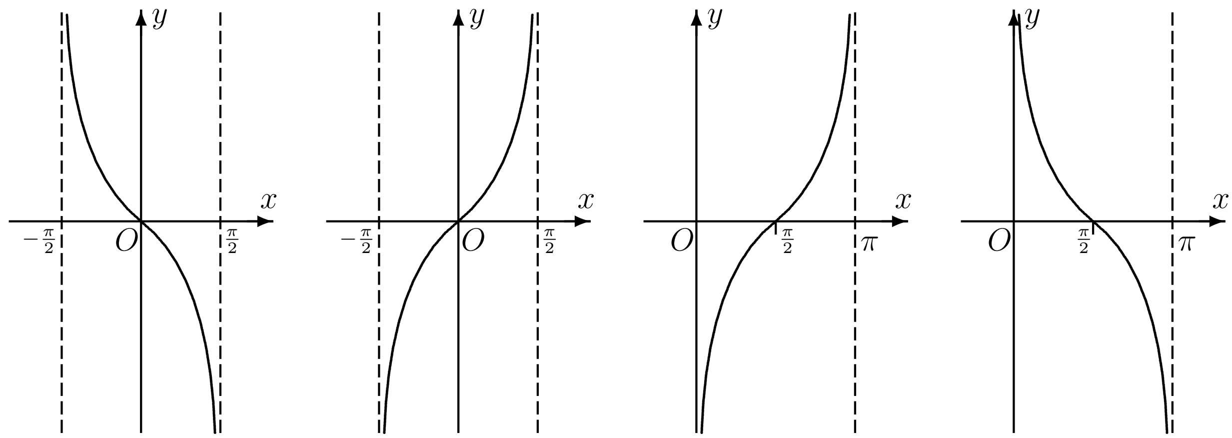
Ministerul Educatiei al Republicii Moldova
Directia Generala Invatamant Preuniversitar
Examenul de bacalaureat la matematica, iunie 2004
Profilul umanist

Timp alocat: 180 minute.

In itemii 1-4 incercuiti litera corespunzatoare variantei corecte de raspuns.

1. Carui interval de numere apartine numarul e?
a) (0;1) b) (1;2) c) (2;3) d) (3;4).

2. Care dintre desene reprezinta graficul functiei $f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{tg } x$.

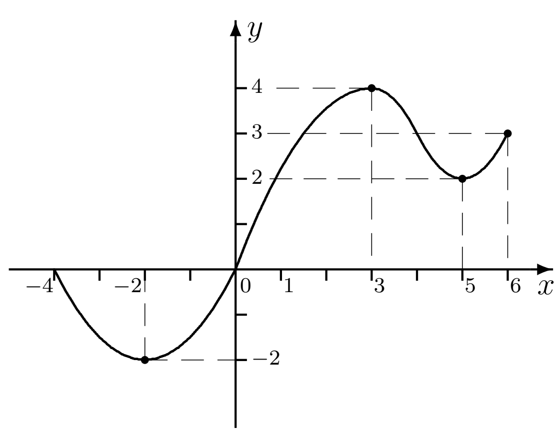


a b c d

3. Un cerc se poate circumscrie oricarui
a) romb b) paralelogram c) trapez d) dreptunghi.

4. Care dinre propozitiile scrise mai jos este adevarata?
a) $A_n^k = C_n^k \cdot P_n$ b) $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ c) $C_n^k = A_n^k \cdot P_k$ d) $P_k = C_n^k \cdot A_n^k$.

5. Utilizand graficul functiei $f : [-4; 6] \to \mathbb{R}$, completati spatiul liber astfel incat sa obtineti propozitii adevarate.



a) $f(x) > 0$ pentru $x \in \square$.
b) $f(x) < 0$ pentru $x \in \square$.
c) $f(x) = 0$ pentru $x_1 = \square$, $x_2 = \square$.
d) $\max\limits_{x\in[-4;6]} f(x) = f(\square) = \square$.
e) $\min\limits_{x\in[-4;6]} f(x) = f(\square) = \square$.

6. Completati caseta cu unul dintre semnele $<, =, >$, astfel incat sa obtineti propozitie adevarata.

$$\log_2 16 - \sqrt{25} \quad \square \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right).$$

Argumentati raspunsul.

7. Calculati perimetrul triunghilui ABC, daca $A(-1;5), B(-3;3), C(1;7)$.

8. Rezolvati in $\mathbb{R}$ ecuatia $4^{1+x} - 4^{1-x} - 15 = 0$.

9. Incercuiti litera **A**, daca propozitia este adevarata, sau litera **F**, daca propozitia este falsa:

$$\int\limits_1^{16} \frac{3}{\sqrt[4]{x}}dx = 2^{3\log_8 28}. \qquad \boxed{\mathbf{A}}\boxed{\mathbf{F}}$$

Argumentati raspunsul.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $f : M_2 \to M_2,\ f(x) = x^2 - I_2$. Calculati $f(2A)$.

11. Pentru ce valori ale lui $a,\ a \in \mathbb{R}$, ecuatia $\cos\frac{x}{2} = a^2 - a - 1$ admite solutii reale?

12. Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ in punctul de intersectie a graficului functiei cu axa ordonatelor.

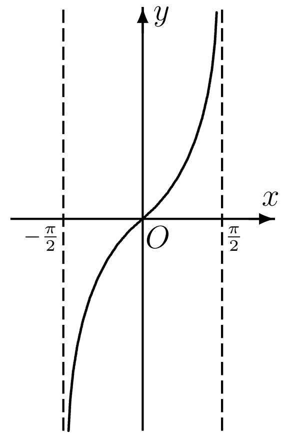
13. Fie $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 1 & 2x \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix}$. Rezolvati in $\mathbb{R}$ inecuatia $\dfrac{D(x)}{x+1} \geq 1$.

14. Aria laterala a unei piramide patrulaterale regulate este egala cu 48 cm^2. Unghiul format de fata laterala si planul bazei piramidei este egal cu 60^o. Calculati volumul piramidei.

Solutii

1. Cum $e \approx 2,718,\ e \in (2;3)$.

2.



b

3. d) dreptunghi.

4. b) $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

5. a) $f(x) > 0$ pentru $x \in (0;6]$.
b) $f(x) < 0$ pentru $x \in (-4;0)$.
c) $f(x) = 0$ pentru $x_1 = -4,\ \ x_2 = 0$.
d) $\max\limits_{x\in[-4;6]} f(x) = f(3) = 4$.
e) $\min\limits_{x\in[-4;6]} f(x) = f(-2) = -2$.

6. $\log_2 16 - \sqrt{25} = \log_2 2^4 - 5 = 4\log_2 2 - 5 = 4\cdot 1 - 5 = -1 < 0$;
$\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} - 2\left(\sin\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} + 1 = 2 - \sqrt{3} > 0.$
Rezulta, $\log_2 16 - \sqrt{25} < \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} - 2\left(\sin\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$.

7. Utilizand formula distantei dintre doua puncte date $M_1(x_1;y_1)$ si $M_2(x_2;y_2)$, $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$, calculam lungimile laturilor triunghiului.

$$AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2};$$
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2};$$
$$BC = \sqrt{(1+3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}.$$

Cum $AB + BC = AC \Rightarrow$ punctele A, B, C sunt colineare si asa triunghi nu exista.
Raspuns: nu exista triunghi cu asa coordonate.

8. $4^{1+x} - 4^{1-x} - 15 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot 4^x - \dfrac{4}{4^x} - 15 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot 4^{2x} - 15\cdot 4^x - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 4^x = 4; \\ 4^x = -\frac{1}{4}; \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x = 1.$
Raspuns: $x = 1$.

9. $\int\limits_1^{16} \frac{3}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int\limits_1^{16} x^{-\frac{1}{4}}dx = 3\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}\Bigg|_1^{16} = 3\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\Bigg|_1^{16} = 4\sqrt[4]{x^3}\Big|_1^{16} = 4(8-1) = 4\cdot 7 = 28;$
$2^{3\log_8 28} = 8^{\log_8 28} = 28.$ Rezulta ca propozitia este adevarata.

10. $f(2A) = (2A)^2 - I_2 = 4A^2 - I_2.$
Cum $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,
$4A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$,
se obtine
$$f(2A) = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Raspuns: $f(2A) = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$.

11. Cum $\left|\cos\frac{x}{2}\right| \le 1$, rezulta $|a^2 - a - 1| \le 1$, de unde
$\begin{cases} a^2 - a - 1 \le 1, \\ a^2 - a - 1 \ge -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 \le 0, \\ a^2 - a \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le a \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 1, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-1;0] \cup [1;2].$

Raspuns: $a \in [-1;0] \cup [1;2]$.

12. Determinam coordonatele punctului de intersectie M a graficului functiei f cu axa Oy: pentru $x_0 = 0$ se obtine $y_0 = -2$. Asadar, $M(0;-2)$.

Ecuatia tangentei la graficul functiei f in punctul M este $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Cum $f'(x) = \left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-2x(x-2)}{(x^2+1)^2}$, rezulta $f'(0) = 1$ si se obtine ecuatia
$$y - (-2) = 1(x - 0) \qquad \text{sau} \qquad y = x - 2.$$

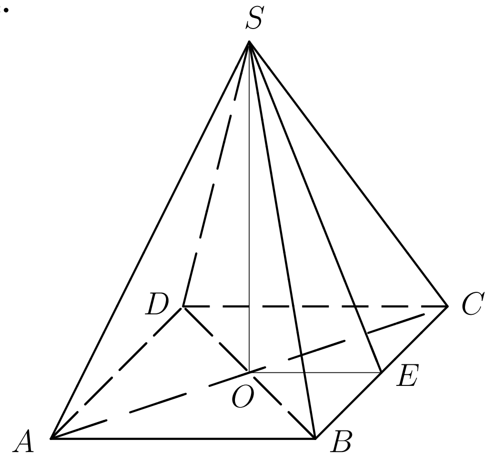
Raspuns: $y = x - 2$.

13. Determinam $D(x)$:
$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 1 & 2x \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6x^2 - 2x + 3 - 2x^2 - 8x = 4x^2 - 10x + 7.$$

Rezolvam inecuatia, utilizand metoda intervalelor:
$\frac{4x^2-10x+7}{x+1} \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^2-10x+7-x-1}{x+1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^2-11x+6}{x+1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \frac{4(x-2)(x-\frac{3}{4})}{x+1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1;\frac{3}{4}] \cup [2;+\infty).$

Raspuns: $x \in (-1;\frac{3}{4}] \cup [2;+\infty)$.

14.



Fie latura patratului din baza piramidei regulate a, $SO = h$ – inaltimea piramidei, $SE = b$ – apotema, $SE \perp BC$, $OE = \frac{a}{2}$, $OE \perp BC$ si $\angle SEO = 60^o$. Din conditii $4 \cdot \frac{ab}{2} = 48$, de unde $ab = 24$.

In $\triangle SOE$ (dreptunghic in O) cateta OE este opusa unghiului de 30^o ($\angle OSE = 90^o - \angle SEO = 30^o$), prin urmare, $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}b$, de unde $a = b$, iar

$$h = OE \cdot \text{tg}60^o = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Cum

$$\begin{cases} ab = 24, \\ a = b, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}, \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{2},$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 3\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ (un. vol.)}.$$

Raspuns: $V = 24\sqrt{2}$ (un. vol.).