Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, 2000
Profilurile: filologie, istorie, limbi straine, arte

Timp alocat: 180 minute.

1. Calculati valoarea expresiei numerice:

$$4^{2,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot (0,8)^{3,5}.$$

(7 puncte)

2. Determinati domeniul de valori ale functiei $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. (7 puncte)

3. Determinati o ecuatie de gradul al doilea cu coeficienti reali, daca se stie ca una din radacini este $1 + i$. (7 puncte)

4. In triunghiul ABC, punctul $M \in (BD)$, (BD) este mediana. Aratati ca aria triunghiului ABM este egala cu aria triunghiului CMD. (10 puncte)

5. Rezolvati sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} 4x + y + z = 1, \\ x + 4y + z = 2, \\ x + y + 4z = 3. \end{cases}$$

(12 puncte)

6. Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 1}$ in punctul de intersectie a graficului cu axa ordonatelor. (13 puncte)

7. Rezolvati inecuatia $(0,4)^{1-x} \geq (2,5)^{\frac{2}{x}}$. (14 puncte)

8. Din mijlocul inaltimii unei piramide patrulatere regulate este coborata o perpendiculara, egala cu a, pe muchia laterala a piramidei. Aflati volumul piramidei, daca se stie ca unghiul format de perpendiculara si inaltimea piramidei este α. (15 puncte)

9. Pentru ce valori reale ale lui a, ecuatia $\dfrac{a(x+2)+1}{x-3} = 5$ are radacina mai mare ca 2. (15 puncte)

Solutii

1. Se utilizeaza proprietatile functiei exponentiale si se obtine

$$4^{2,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot (0,8)^{3,5} = \left(2^2\right)^{2,5} - \left(3^{-2}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3,5} =$$

$$= 2^5 - 3^3 + \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right)^{3,5} = 32 - 27 + 1 = 6.$$

2. Se separa un patrat perfect

$$-x^2 + 5x - 3 = -(x^2 - 5x) - 3 = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) - 3 =$$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Cum $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 \geq 0$, domeniul de valori al functiei date este $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$.

Nota: Domeniul de valori a unei functii generate de un trinom patrat poate fi determinat stabilind valoarea functiei in varful parabolei respective, si tinand seama de semnul coeficientului superior.

3. Cum numarul complex $z = 1 + i$ este radacina a ecuatiei

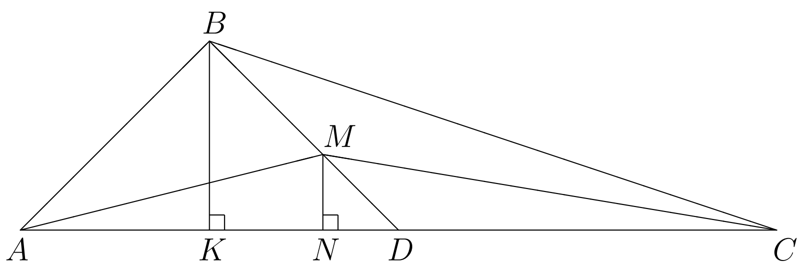
$$x^2 + px + q = 0, \qquad \{p, q\} \subset \mathbf{R} \tag{1}$$

conjugatul lui, $z = 1 - i$ la fel este radacina a ecuatiei (1). Utilizand teorema lui Viette se obtine

$$-p = (1 + i) + 1 - i = 2,$$
$$q = (1 + i)(1 - i) = 2,$$

si ecuatia devine $x^2 - 2x + 2 = 0$.

4.



Fie $BK -$ inaltimea in $\triangle ABC$, $BK \perp AC$. Atunci $(AD = DC)$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BK \tag{2}$$

Similar,

$$S_{\triangle AMD} = S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2} AD \cdot MN \tag{3}$$

$(MN -$ inaltimea in $\triangle AMC$, $MN \perp AC)$.

Cum

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AMD},$$
$$S_{\triangle BMC} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle MDC},$$

tinand seama de relatiile (2), (3) se obtine $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CMB}$.

5. Se utilizeaza regula Cramer de rezolvare a sistemelor de ecuatii liniare.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 54 \neq 0,$$

prin urmare, sistemul are solutie unica.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36.$$

Conform regulei Cramer,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{3}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{3}.$$

Nota. Sistemul poate fi rezolvat si prin metoda Gauss.

6. Se determina punctul de intersectie a graficului functiei cu axa ordonatelor:

$$f(0) = \frac{2}{-1} = -2.$$

Ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul x_0 se determina prin formula

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4}$$

Cum

$$f(-2) = \frac{3 \cdot (-2)^2 + 2}{-2 - 1} = -\frac{14}{3},$$

$$f'(x) = \frac{6x(x-1) - (3x^2+2)}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - 2}{(x-1)^2}, \quad f'(-2) = \frac{22}{9},$$

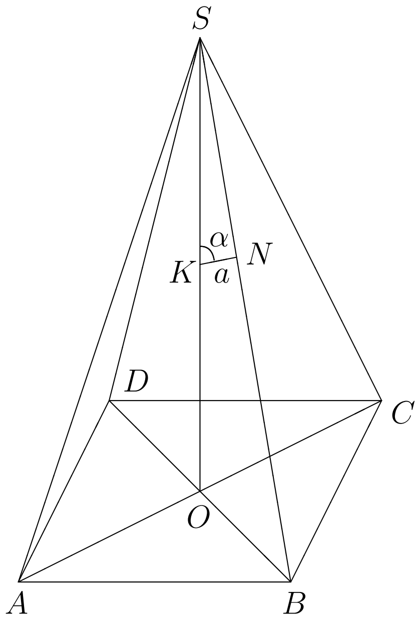
rezulta

$$y = -\frac{14}{3} + \frac{22}{9}(x+2) = \frac{22}{9}x + \frac{2}{9}.$$

7. $(0,4)^{1-x} \geq (2,5)^{\frac{2}{x}} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \;\Leftrightarrow\; x - 1 \geq \frac{2}{x} \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; \frac{x^2 - x - 2}{x} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)(x-2)}{x} \geq 0$, de unde, utilizand metoda intervalelor, se obtine

$$x \in [-1, 0) \cup [2, +\infty).$$

8. Fie $SABCD$ − piramida patrulatera regulata ($ABCD$ − patrat), $h = SO$ − inaltimea piramidei, piciorul careia se afla in punctul O − centul patratului $ABCD$. $SK = KO$ si $KN \perp SB$, $\angle SKN = \alpha$, $KN = a$.



Din triunghiul dreptunghic SKN se obtine $\dfrac{h}{2} = SK = \dfrac{KN}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, de unde $h = \dfrac{2a}{\cos\alpha}$.
Din tringhiul dreptunghic SOB ($\angle OSB = 90^\circ - \alpha$) se obtine

$$OB = SO\,\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\sin\alpha}.$$

Cum $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}OB^2$ si aria bazei piramidei $S = 4S_{\triangle AOB}$ se obtine $S = 2OB^2 = \dfrac{8a^2}{\sin\alpha}$ si

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\frac{8a^2}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{2a}{\cos\alpha} = \frac{16a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}(\text{un.cub.})$$

9. Domeniul valorilor admisibile ale ecuatiei (DVA) este multimea $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. In DVA ecuatia este echivalenta cu ecuatia

$$ax + 2a + 1 = 5x - 15$$

sau

$$(a-5)x = -2a - 16.$$

Daca $a = 5$, ecuatia devine $0 \cdot x = -26$ si, prin urmare, nu are solutii, iar daca $a \in \mathbf{R} \setminus \{5\}$, se obtine

$$x = -\frac{2a+16}{a-5}.$$

Se tine seama de DVA

$$-\frac{2a+16}{a-5} \neq 3,$$

de unde $-2a - 16 \neq 3a - 15$ si $a \neq -\dfrac{1}{5}$.

Pentru $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}; 5\right\}$ se rezolva inecuatia

$$-\frac{2a+16}{a-5} > 2.$$

Se utilizeaza metoda intervalelor

$$2+\frac{2a+16}{a-5}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4a+6}{a-5}<0 \;\Leftrightarrow\; a\in\left(-\frac{3}{2};5\right).$$

Se tine seama ca $a\neq-\frac{1}{5}$ si se obtine raspunsul

$$a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};5\right).$$