Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalureat la matematica, 10 iunie 1999
Profilul real

1. Sa se calculeze

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right).$$

(3 puncte)

Solutie. Nedeterminare de tipul $\infty-\infty$. Se aduce la numitor comun si se obtine

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9-27}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{(x-3)(x^2+33x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+6)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x^2+3x+9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}.$$

2. Dati exemplu de o functie definita si continue pe un interval deschis (a,b) dar care nu este marginita pe acest interval. (3 puncte)

Solutie.

$$f:(a,b)\longrightarrow \mathbf{R} \qquad f(x)=\frac{1}{x-a}.$$

In adevar,

$$f\in C((a,b)) \text{ si } \lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty.$$

3. Fie $z=1+i$. Sa se determine numerele reale $a,b\in\mathbf{R}$, daca se stie ca $z^3=az+b$. (4 puncte)

Solutie. Se utilizeaza definitia egalitatii a doua numere complexe si se obtine:

$$(1+i)^3=az+b \;\Leftrightarrow\; 1+3i+3i^2+i^3=a(1+i)+b \;\Leftrightarrow\; 1+3i-3-i=a+b+ai \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -2-2i=(a+b)+ai \;\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2,\\ a=2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2,\\ b=-4.\end{cases}$$

4. Calculati integrala

$$I=\int_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx.$$

(5 puncte).

Solutie. Se tine seama ca integrantul reprezinta o functie para, deci $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$ si cum pentru $x\in[0;1]$ avem $2^x-2^{-x}\geq 0$ se obtine:

$$\int_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx=2\int_{0}^{1}(2^x-2^{-x})dx=2\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{\ln 2}.$$

5. Rezolvati ecuatia

$$3+4|\cos x|=b\cos 2x,$$

daca una din radacinile ei este $\dfrac{2\pi}{3}$. (6 puncte)

Solutie. Cum $x = \dfrac{2\pi}{3}$ verifica ecuatia, rezulta

$$3 + 4|\cos\frac{2\pi}{3}| = b\cos\frac{2\pi}{3} \quad \text{sau} \quad 3 + 4\cdot\frac{1}{2} = b\left(-\frac{1}{2}\right),$$

de unde $b = -10$. Inlocuind valoarea lui b in ecuatia initiala se obtine

$$3 + 4|\cos x| = -10\cos 2x \;\Leftrightarrow\; 10(2\cos^2 x - 1) + 4|\cos x| + 3 = 0.$$

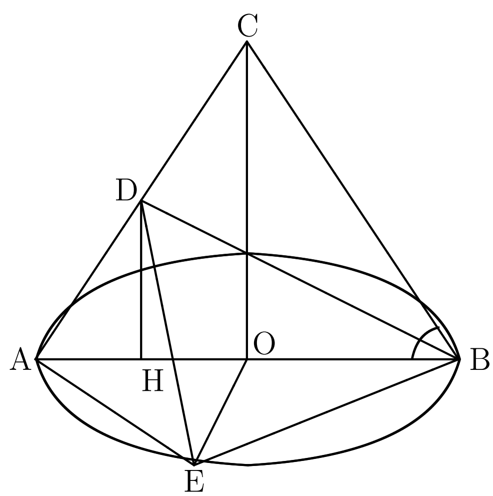
Se efectueaza substitutia $t = |\cos x|$, atunci $\cos^2 x = t^2$ si se obtine ecuatia patrata

$$20t^2 + 4t - 7 = 0$$

cu solutiile $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = \dfrac{-7}{10}$. Cum $t \in [0; 1]$, ramane $t = \dfrac{1}{2}$. Astfel

$$|\cos x| = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \pm\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. \qquad n, k \in \mathbf{Z}.$$

6. Inaltimea unui con circular drept este egala cu $6cm$, iar generatoarea conului formeaza cu planul bazei un unghi de $60°$. In con este asezata o piramida baza careia este un triunghi dreptunghic isoscel inscris in baza conului, iar varful piramidei este mijlocul unei generatoare a conului. Aflati volumul piramidei. (5 puncte)



Solutie. Se considera triunghiul dreptunghic $\triangle COB$ ($CO \perp OB$). Cum $\angle CBO = 60°$ (din enunt), si utilizand relatiile metrice in triunghi se obtine: $OB = CO \cdot \operatorname{ctg}(\angle CBO) = 6 \operatorname{ctg} 60° = = 2\sqrt{3}(cm)$. Astfel ipotenuza triunghiului dreptunghic AEB, AB fiind si diametrul cercului de raza OB, este egala $AB = 2OB = 4\sqrt{3}(cm)$, iar aria $\triangle AEB$ (aria bazei piramidei)

$$S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}AB \cdot EO = \frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 12(cm^2).$$

Inaltimea piramidei DH este linia mijlocie in $\triangle AOC$, deci este egala cu o doime din OC, $DH = \dfrac{1}{2}OC = 3$. Astfel,

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle AEB} \cdot DH = \frac{1}{3}\cdot 12 \cdot 3 = 12(cm^3).$$

7. Dreapta $x + y - 4 = 0$ este tangenta la elipsa

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde $b \in (0, 3)$. Sa se determine valoarea parametrului real b si coordonatele punctului de tangenta. (6 puncte)

Solutie. Ecuatia tangentei la elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ in punctul (x_0, y_0) este

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

sau, in cazul dat,

$$\frac{x_0 x}{9} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

de unde

$$y = -\frac{x_0 b^2}{9 y_0} x + \frac{b^2}{y_0}.$$

Din enunt $(y = -x + 4)$ rezulta:

$$\begin{cases} -\dfrac{x_0}{9} \cdot \dfrac{b^2}{y_0} = -1, \\ \dfrac{b^2}{y_0} = 4, \end{cases}$$

de unde se obtine $x_0 = \dfrac{9}{4}$. Cum $y_0 = 4 - x_0 \ \Rightarrow \ y_0 = \dfrac{7}{4}$, si utilizand ecuatia elipsei se determina b:

$$\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16} + \frac{49}{16b^2} = 1,$$

de unde $9b^2 + 49 = 16b^2$ sau $b^2 = 7, \ b = \pm\sqrt{7}$ si cum $b \in (0, 3)$, ramane

$$b = \sqrt{7}.$$

Asadar $b = \sqrt{7}$, si punctul de tangenta $M\left(\dfrac{9}{4}, \dfrac{7}{4}\right)$.

8. Sa se determine termenul care il contine pe b^2 din dezvoltarea binomului $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^n$, stiind ca n este cel mai mare numar natural ce verifica inegalitatea

$$\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0.$$

(7 puncte)

Solutie. Scriem inecuatia in n sub forma

$$-\log_3 n + \frac{\log_3 n}{\log_3 n - 1} > 0.$$

Notam $log_3 n = t$ si obtinem

$$\frac{t(2-t)}{t-1} > 0.$$

Tinand seama ca $t > 0$ din ultima inecuatie avem

$$1 < \log_3 x < 2 \;\Leftrightarrow\; 3 < n < 9.$$

Cum $n \in \mathbf{N}$ si cel mai mare din intervalul (3;9), rezulta $n = 8$. Conform formulei lui Newton (binomiale)

$$T_{k+1} = C_8^k a^{\frac{8-k}{2}} b^{\frac{k}{3}},$$

de unde $\dfrac{k}{3} = 2$ sau $k = 6$. Asadar $T_7 = C_8^6 ab^2 = 28ab^2$.

9. Se considera functia

$$f : D \longrightarrow \mathbf{R}, \quad D \subset \mathbf{R}$$

astfel incat

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + 3x + b^2}.$$

Sa se determine a, b astfel incat valorile in punctele de extrem sunt egale cu -1 si -2. (8 puncte)

Solutie. Se determina punctele critice:

$$f'(x) = a\frac{(x^2 + 3x + b^2) - x(2x + 3)}{(x^2 + 3x + b^2)^2} = a\frac{b^2 - x^2}{(x^2 + 3x + b^2)^2}.$$

Asadar $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; b^2 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm b$.

Se observa ca $a \neq 0,\; b \neq 0$ (astfel se incalca conditiile problemei) si in vecinatatile punctelor $x = \pm b$ derivata isi schimba semnul, prin urmare $x = -b$ si $x = b$ sunt punctele de extrem.

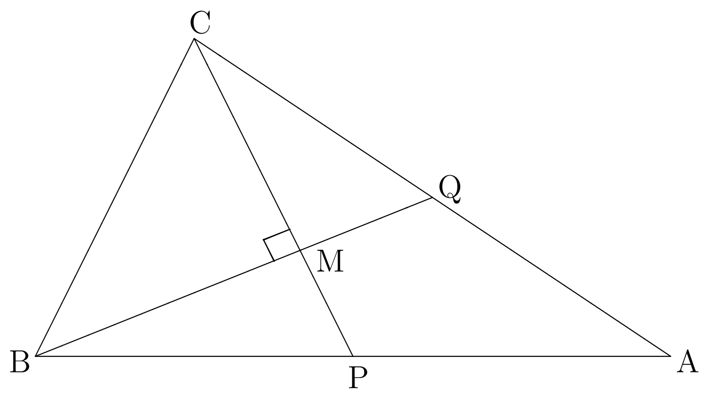
Se obtine urmatoarea totalitate de sisteme:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(b) = -1, \\ f(-b) = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} f(b) = -2, \\ f(-b) = -1, \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{a}{2b+3} = -1, \\ \dfrac{-a}{b2-3} = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{a}{2b+3} = -2, \\ \dfrac{-a}{2b-3} = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Din primul sistem se obtine $a = -4,\; b = \dfrac{1}{2}$, iar din al doilea $a = -4,\; b = -\dfrac{1}{2}$, in ambele cazuri functia f fiind

$$f(x) = \frac{-4x}{x^2 + 3x + \frac{1}{4}}.$$

10. Fie $\triangle ABC$ truinghi dreptunghic cu $\angle C = 90°$. Mediana CP este perpendiculara pe mediana BQ si latura BC este a. Calculati lungimea medianei BQ. (8 puncte)



Solutie. Fie $\angle CBA = \alpha$. Atunci $\angle BAC = 90° - \alpha$. Cum $CP = \frac{1}{2}AB = BP = PA$, rezulta $\angle BCP = \alpha$ si $\angle ACP = 90° - \alpha$. Din triunghiul dreptunghic CMQ se obtine $\angle CQB = \alpha$. Asadar $\triangle CBQ \sim \triangle ABC$ de unde

$$\frac{BQ}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{CQ}{BC}.$$

Cum $CQ = \frac{1}{2}AC$ (BQ-mediana) rezulta

$$\frac{a}{AC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{a},$$

de unde $AC = a\sqrt{2}$. Utilizand teorema lui Pitagora se obtine $AB^2 = a^2 + 2a^2$ sau $AB = a\sqrt{3}$. Asadar

$$\frac{BQ}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad BQ = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$