Ministerul Educatiei al Republicii Moldova
Agentia de Evaluare si Examinare
Examenul de bacalaureat la matematica, 14 iunie 2010
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

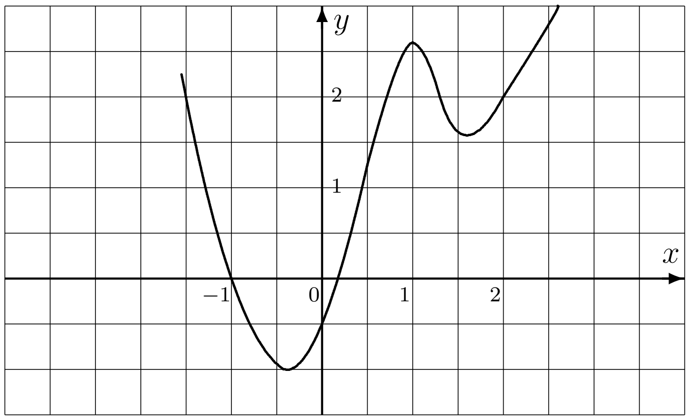
In itemii 1-4 completati spatiile rezervate, astfel incat propozitiile obtinute sa fie adevarate.

1. Completati caseta, astfel incat propozitia obtinuta sa fie adevarata.

$$10^{2-\lg 4} = \boxed{}.$$

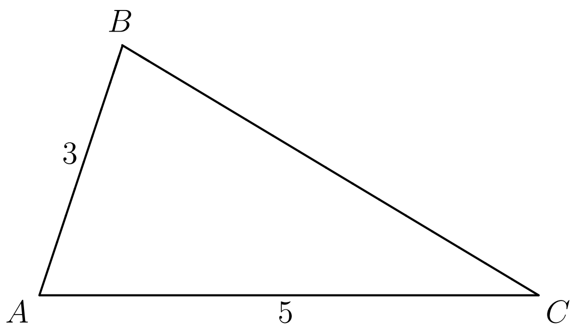
2. In desenul alaturat este reprezentat graficul functiei derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Scrieti in fiecare dintre casete cate unul dintre semnele ">", "<" sau "=", astfel incat propozitiile sa fie adevarate.

$$f'(-1)\boxed{}0,$$
$$f'(1)\boxed{}0,$$
$$f'(2)\boxed{}0.$$



3. Incercuiti **DA**, daca rezultatul obtinut este corect si **NU**, daca rezultatul obtinut este incorect.
Un elev a utilizat teorema sinusurilor in triunghiul ABC cu laturile $AB = 3$ cm si $AC = 5$ cm si a obtinut $\dfrac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)} = \dfrac{3}{5}$.

DA NU



4. In tabel sunt prezentate datele privind numarul de apartamente intr-o casa recent construita in dependenta de numarul de odai in apartamente:

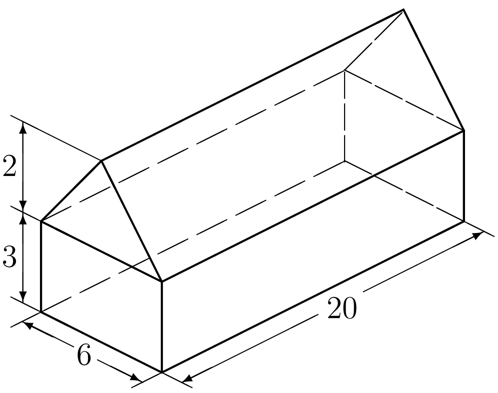
Nr. de odai in apartament	x_i	1	2	3	4	5	6
Nr. de apartamente in casa	n_i	15	32	28	24	6	3

Aflati moda M_o si mediana M_e ale acestei serii statistice.

$$M_o = \square; \qquad M_e = \square.$$

5. Scrieti numarul $z = (1-i)^2 + 4i$ in forma trigonometrica.
1) $(1-i)^2 + 4i =$
2) $r = |z| =$
3) $\varphi = arg z =$
4) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

6. Fanul a fost depozitat intr-un stog de forma reprezentata in desen (figura este compusa din doua prisme drepte). Utilizand datele din desen, calculati masa fanului din stog, daca masa 1 m^3 de fan este egala cu 85 kg.



7. Rezolvati in $\mathbb{R}$ inecuatia $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 2}{\sqrt{2x+1}} \geq 0.$

8. Incercuiti litera **A**, daca propozitia este adevarata sau litera **F**, daca propozitia este falsa. Argumentati raspunsul.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx > \frac{1}{4} \qquad \boxed{\text{A}} \qquad \boxed{\text{F}}$$

9. Punctele $A(1;3)$ si $B(-3;1)$ apartin unui cerc. Calculati raza cercului daca se stie ca centrul acestuia apartine dreptei $l : 4x + y - 8 = 0$.

10. Scrieti in caseta numarul, astfel incat propozitia obtinuta sa fie adevarata.
"Dezvoltarea binomului $(\sqrt[4]{2} + \sqrt[7]{7})^{15}$ admite $\square$ termeni rationali".
Argumentati raspunsul.

11. Determinati punctele critice ale functiei

$$f:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\quad f(x)=2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x+7.$$

12. Determinati valorile reale ale parametrului m, pentru care polinomul $P(X)=mX^3-(m+1)X^2-(m+1)X+m$ admite trei radacini reale simple.

Solutii

1. $10^{2-\lg 4}=\dfrac{10^2}{10^{\lg 4}}=\dfrac{100}{4}=25.$
Raspuns: 25.

2. $f'(-1)<0$ (in vecinatatea punctului $x=-1$ functia f este strict descrescatoare), $f'(1)=0$ (in punctul $x=1$ functia f poseda un maxim local), $f'(2)>0$ (in vecinatatea punctului $x=2$ functia f este strict crescatoare).

3. Cum, conform teoremei sinusurilor

$$\frac{AC}{\sin(\angle ABC)}=\frac{AB}{\sin(\angle ACB)}\ \Rightarrow\ \frac{5}{\sin(\angle ABC)}=\frac{3}{\sin(\angle ACB)}\ \Rightarrow\ \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)}=\frac{5}{3},$$

elevul a obtinut un rezultat incorect.
Raspuns: NU.

4. $M_o=2; M_e=3.$

5. 1) $(1-i)^2+4i=1-2i+i^2+4i=1-2i-1+4i=2i.$
2) $r=|z|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2.$
3) $\varphi=arg z=\dfrac{\pi}{2}.$
4) $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right).$

6. Calculam volumul paralelipipedului dreptunghic de dimensiunile $6\times 3\times 20$:

$$V_1=6\cdot 3\cdot 20=360\ (\mathrm{m}^3).$$

Calculam volumul prismei triunghiulare drepte:

$$V_2=A_b\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\cdot 20=120\ (\mathrm{m}^3).$$

Calculam volumul stogului:

$$V=V_1+V2=360+120=480\ (\mathrm{m}^3).$$

Calculam masa fanului:

$$m=85\cdot 480=40800\ (\mathrm{kg}).$$

Raspuns: 40800 kg.

7. $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x^2+2}{\sqrt{2x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x^2+2 \geq 0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{\frac{1}{2}} |x| \geq -2 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} |x| \geq -1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} |x| \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| > 0 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{2};0\right) \cup (0;2].$

Raspuns: $S = \left(-\dfrac{1}{2};0\right) \cup (0;2]$.

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{d(e^x)}{e^{2x}+1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} e^x \Big|_0^{\frac{1}{2}\ln 3} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}0 > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \pi > \dfrac{3}{4}$ – inegalitate justa.

Raspuns: A.

9. Fie ecuatia cercului $C(a,b)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

unde (a,b) – centrul cercului, R – raza lui.

Din enunt rezulta sistemul:

$$\begin{cases} (1-a)^2+(3-b)^2=R^2 \quad (A \in C(a,b)), \\ (-3-a)^2+(1-b)^2=R^2 \quad (B \in C(a,b)), \\ 4a+b-8=0 \quad ((a,b) \in l). \end{cases}$$

Rezolvand sistemul se obtine:

$$\begin{cases} 1-2a+a^2+9-6b+b^2=R^2 \\ 9+6a+a^2+1-2b+b^2=R^2 \\ 4a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a-4b=0 \\ (3+a)^2+(1-b)^2=R^2 \\ 4a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8a-4b=0 \\ 8a+2b=16 \\ (3+a)^2+(1-b)^2=R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-8 \\ 7^2+9^2=R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-8 \\ R^2=130 \end{cases}, \text{ de unde } R=\sqrt{130}.$$

Raspuns: $\sqrt{130}$.

10. Avem $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ sau $T_{k+1} = C_{15}^k 2^{\frac{1}{4}(15-k)} 7^{\frac{1}{7}k}$.

Pentru ca $T_{k+1} \in \mathbb{Q}$ este necesar si suficient ca

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq 15, \\ \dfrac{15-k}{4} \vdots\, 4, \\ k \vdots\, 7, \\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Rezolvam sistemul:

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq 15 \\ k \in \{3;7;11;15\} \\ k \in \{0;7;14\} \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow k=7.$$

Asadar, dezvoltarea binomului contine un singur termen rational.
Raspuns: 1.

11. Calculam derivata functiei:

$$f'(x) = 2\cos 2x \cdot (2x)' - 2\sqrt{3}(-\sin 2x) \cdot (2x)' + 0 = 4\cos 2x + 4\sqrt{3}\sin 2x.$$

Aflam punctele critice, rezolvand ecuatia $f'(x) = 0 \Rightarrow 4\cos 2x + 4\sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 0$ (ecuatie omogena de gradul I) $\Leftrightarrow \sqrt{3}\mathrm{tg}2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}2x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

Cum $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ avem:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{12} + \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{15}{12} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{7}{12}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

de unde $n_1 = 0$ si $n_2 = 1$. Asadar, avem 2 puncte critice: $x_1 = -\dfrac{\pi}{12}$; $x_2 = \dfrac{5\pi}{12}$.

Raspuns: $x_1 = -\dfrac{\pi}{12}$; $x_2 = \dfrac{5\pi}{12}$.

12. Daca $m = 0$, $gradP = 2$ si polinomul nu poate avea trei radacini.
Fie $m \neq 0$.
$mX^3 - (m+1)X^2 - (m+1)X + m = m(X^3+1) - (m+1)(X^2+X) =$ $= m(X+1)(X^2 - X + 1) - (m+1)X(X+1) = (X+1)[mX^2 - mX + m - mX - X] =$ $= (X+1)[mX^2 - X(2m+1) + m]$.
Asadar,

$$P(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X+1)\left[mX^2 - X(2m+1) + m\right] = 0.$$

Avem $x_1 = -1$.
Verificam daca $x = -1$ este radacina a polinomului $Q(x) = mx^2 - (2m+1)x + m$:

$$Q(-1) = m(-1)^2 - (2m+1)(-1) + m = m + (2m+1) + m = 4m + 1,$$

$$Q(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{1}{4}.$$

Asadar, $m = -\dfrac{1}{4}$ nu verifica conditiilor problemei.
Alte 2 radacini reale, distincte, simple se obtin daca

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4m^2 > 0$$

sau

$$(2m + 1 - 2m)(2m + 1 + 2m) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4m + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{1}{4}.$$

Asadar, daca $m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$ polinomul $P(X)$ admite trei radacini reale simple.

Raspuns: $m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 3 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 4 puncte
Nr. 5 — 4 puncte
Nr. 6 — 5 puncte
Nr. 7 — 7 puncte
Nr. 8 — 6 puncte
Nr. 9 — 8 puncte
Nr. 10 — 8 puncte
Nr. 11 — 7 puncte
Nr. 12 — 7 puncte
total: 63 puncte