Ministerul Educatiei si Tineretului al Republicii Moldova
Agentia de Evaluare si Examinare
Examenul de bacalaureat la matematica, 12 iunie 2009
Profilul real

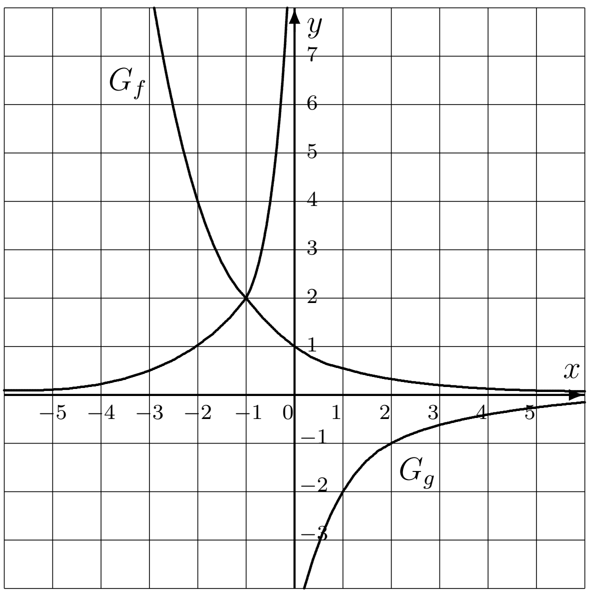
Timp alocat: 180 minute.

In itemii 1-3 completati casetele astfel incat propozitiile obtinute sa fie adevarate.

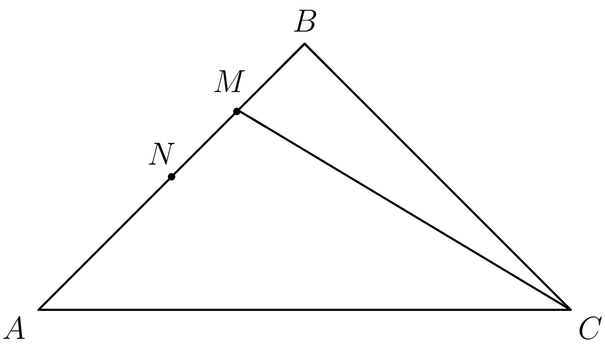
1. Valoarea expresiei $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este egala cu $\boxed{}$.

2. Pe desen sunt reprezentate graficele functiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ si $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{2}{x}$. Scrieti in caseta toate valorile lui x pentru care $f(x) \geq g(x)$.

$$x \in \boxed{}$$



3. In triunghiul ΔABC, reprezentat pe desen, punctul N este mijlocul segmentului $[AB]$, iar punctul M este mijlocul segmentului $[NB]$. Pe desen este hasurat $\boxed{}$% din aria $\triangle ABC$.



4. In cutia de bomboane "Lapte de pasare", 6 bomboane sunt cu umplutura de culoare alba, 6 – cu umplutura de culoare galbena si 8 – cu umplutura de culoare cafenie. Care este probabilitatea ca luand la intamplare 2 bomboane din aceasta cutie sa fie cu umplutura cafenie?

5. Calculati $|z_1 - z_2|$, daca se stie ca numerele z_1 si z_2 – sunt solutiile ecuatiei $z^2 - (5-2i)\cdot z + 5\cdot(1,5-i) = 0$.

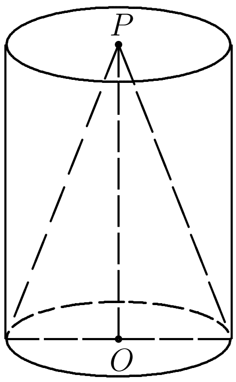
6. Punctele $A(0;-2), B(2;0)$ sunt varfurile triunghiului $\triangle ABC$. Aria triunghiului $\triangle ABC$ este egala cu 8 un. p. Aflati coordonatele varfului C, daca se stie ca punctul C apartine bisectoarei cadranelor II si IV.

7. Rezolvati in $\mathbb{R}$ inecuatia $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{3}}(4-x)}{x^2-2x} \leq 0$.

8. Fie functia $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{7x-6}$. Determinati coordonatele punctului graficului functiei f astfel incat tangenta la grafic dusa in acest punct este perpendiculara pe dreapta $l : 12x + 7y - 21 = 0$.

9. Determinati extremele globale ale functiei $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin 2x - 2x$.

10. Cilindrul circular drept si conul circular drept au baza comuna si inaltime comuna. Ariile suprafetelor laterale ale lor se raporta ca 4 : 3. Calculati masura unghiului format de generatoarea conului si planul bazei conului.



11. Fie functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 8x - 1$. Unul dintre punctele comune ale graficul derivatei functiei f si graficul unei primitive a functiei f are abscisa $x_1 = -1$. Determinati abscisele celorlalte puncte comune ale acestor doua grafice.

12. Determinati toate valorile reale ale parametrului m, pentru care ecuatia $5 \cdot 3^{x+1} - m = 10 \cdot (2 - m \cdot 3^x)$ nu admite solutii reale.

Solutii

1. $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \pi.$

Raspuns: π.

2. Raspuns: $x \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

3. Se utilizeaza proprietatea medianei: $S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle CNM} = \frac{1}{2} S_{\triangle CNB} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$. Prin urmare, $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ANC} + S_{\triangle CNM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$ si pe desen este hasurata $\frac{3}{4}$ din aria $\triangle ABC$, adica 75% din aria $\triangle ABC$.

Raspuns: 75%.

4. Se utilizeaza formula probabilitatii clasice (evenimentele sunt echiprobabile): $p = \frac{m}{n}$, unde m – numarul cazurilor favorabile evenimentului "s-au extras doua bomboane cu umplutura cafenie", n – numarul total de cazuri. Avem $6 + 6 + 8 = 20$ bomboane in cutie si, prin urmare,

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190,$$

$$m = C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28,$$

$$p = \frac{28}{190} = \frac{14}{95}.$$

Raspuns: $p = \frac{14}{95}$.

5. Rezolvam ecuatia patratica:

$$\Delta = (5 - 2i)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (1,5 - i) = 25 - 20i + 4i^2 - 30 + 20i = 25 - 4 - 30 = -9 = 9i^2 = (3i)^2.$$

$$z_1 = \frac{5 - 2i - 3i}{2} = \frac{5 - 5i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} i;$$

$$z_2 = \frac{5 - 2i + 3i}{2} = \frac{5 + i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} i.$$

Calculam $z_1 - z_2 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} i - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} i = -3i$. Prin urmare,

$$|z_1 - z_2| = |-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Raspuns: $|z_1 - z_2| = 3$.

6. Fie $C(x_0, y_0)$. Cum C apartine bisectoarei cadranelor II si IV ($y = -x$), rezulta $y_0 = -x_0$. Aflam aria $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\Delta|, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x_0 & -x_0 & 1 \end{vmatrix} = -2x_0 - 2x_0 + 4 = -4x_0 + 4.$$

Cum $S_{\triangle ABC} = 8$ (un. p.), rezulta $\frac{1}{2} |-4x_0 + 4| = 8$ sau $|x_0 - 1| = 4$, de unde $\left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = 4 \\ x_0 - 1 = -4 \end{array} \right.$ sau $\left[\begin{array}{l} x_0^{(1)} = 5 \\ x_0^{(2)} = -3 \end{array} \right.$, rezulta $\left[\begin{array}{l} y_0^{(1)} = -5 \\ y_0^{(2)} = 3 \end{array} \right.$. Asadar, exista doua puncte $C_1(5; -5)$ si $C_2(-3; 3)$ ce verifica conditiile problemei.

Raspuns: $C(5;-5)$ sau $C(-3;3)$.

7. $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{3}}(4-x)}{x^2-2x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log^2_{\frac{1}{3}}(4-x)=0 \\ x^2-2x\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x<0 \\ 4-x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x=1 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\} \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(0;2) \\ x<4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x\in(0;2) \end{array}\right.$.

Prin urmare, $S=(0;2)\cup\{3\}$.

8. Aflam panta dreptei l: $12x+7y-21=0$, $7y=-12x+21$, $y=-\dfrac{12}{7}x+3 \Rightarrow m_l=-\dfrac{12}{7}$. Cum tangenta se cere perpendiculara pe dreapta l, utilizand conditia de perpendicularitate, se obtine:

$$m_t\cdot m_l=-1 \Rightarrow m_t=-\frac{1}{m_l}=\frac{7}{12}.$$

Dar $m_t=f'(x_0)$, unde x_0 – punctul de tangenta. Cum

$$f'(x)=(\sqrt{7x-6})'=\frac{1}{2\sqrt{7x-6}}\cdot(7x-6)'=\frac{7}{2\sqrt{7x-6}},$$

rezulta $\dfrac{7}{2\sqrt{7x_0-6}}=\dfrac{7}{12}$, de unde $\sqrt{7x_0-6}=6$ si $x_0=6$ (apartine $D_f=\left[\frac{6}{7};+\infty\right)$). Aflam

$$f(x_0)=\sqrt{7x_0-6}=\sqrt{7\cdot 6-6}=\sqrt{36}=6.$$

Asadar punctul de tangenta are coordonate $(6;6)$.

Raspuns: $(6;6)$.

9. Aflam derivata funciei f:

$$f'(x)=(\sin 2x-2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'-2=2\cos 2x-2.$$

Determinam punctele critice:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\cos 2x-2=0 \Leftrightarrow \cos 2x=1 \Leftrightarrow 2x=2\pi k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Selectam punctele critice ce intra in domeniul de definitie:

$$-\frac{\pi}{2}\le \pi k\le\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2}.$$

Si cum $k\in\mathbb{Z}$, rezulta $k=0$ si unicul punct critic ce apartine $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ este $x=0$.

Calculam $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), f(0), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(-\pi)-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0+\pi=\pi,$$

$$f(0)=\sin 0-2\cdot 0=0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}=0-\pi=-\pi.$$

Cum $-\pi < 0 < \pi$, rezulta
$$\sup_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$
$$\inf_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

10. Notam unghiul dintre generatoarea conului si planul bazei cu α, r – raza bazei conului (cilindrului), h – inaltimea conului (cilindrului).

Deoarece
$$S_{lat.cil.} = 2\pi rh, \quad S_{lat.con.} = \pi rG,$$
unde G – generatoarea conului, se obtine
$$\frac{2\pi rh}{\pi rG} = \frac{4}{3} \quad \text{sau} \quad \frac{h}{G} = \frac{2}{3}.$$
Cum $\sin\alpha = \dfrac{h}{G}$, avem $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ si $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{3}\left(\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Raspuns: $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{3}$.

11. Aflam derivata functiei f:
$$f'(x) = (3x^2 + 8x - 1)' = 6x + 8.$$
Aflam primitivele functiei f:
$$F(x) = \int (3x^2 + 8x - 1)dx = x^3 + 4x^2 - x + C.$$
Cum $F(-1) = f(-1)$, avem
$$(-1)^3 + 4\cdot(-1)^2 - (-1) + C = 6\cdot(-1) + 8,$$
$$4 + C = 2,$$
de unde $C = -2$ si $F(x) = x^3 + 4x^2 - x - 2$.

Determinam punctele comune, rezolvand ecuatia
$$x^3 + 4x^2 - x - 2 = 6x + 8 \quad \text{sau} \quad x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0.$$
Cum $x = -1$ este solutie, $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x+1)(x^2+3x-10) = (x+1)(x+5)(x-2)$. Prin urmare,
$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+5=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-5 \\ x=2 \end{array}\right. .$$
Asadar, abscisele celorlalte puncte sunt $x = -5$ si $x = 2$.

Raspuns: $x_2 = -5$ si $x_3 = 2$.

12. $5\cdot 3^{x+1} - m = 10\cdot(2 - m\cdot 3^x) \quad \Leftrightarrow \quad 15\cdot 3^x - m = 20 - 10m\cdot 3^x \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \quad 15\cdot 3^x + 10m\cdot 3^x = 20 + m \quad \Leftrightarrow \quad 3^x(15 + 10m) = 20 + m.$

Ecuatia data nu are solutii reale pentru

1. $\begin{cases} 15+10m=0 \\ 20+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ m=-\dfrac{3}{2},$

2. $\dfrac{20+m}{15+10m}\leq 0\ (3^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}),$ de unde $m\in\left[-20;-\dfrac{3}{2}\right).$

Asadar, ecuatia nu are solutii reale pentru $m\in\left[-20;-\dfrac{3}{2}\right].$

Schema de notare

Scor maxim
Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 5 puncte
Nr. 5 — 5 puncte
Nr. 6 — 8 puncte
Nr. 7 — 6 puncte
Nr. 8 — 8 puncte
Nr. 9 — 8 puncte
Nr. 10 — 6 puncte
Nr. 11 — 8 puncte
Nr. 12 — 7 puncte
total: 67 puncte