Ministerul Educatiei si Tineretului al Republicii Moldova
Agentia de Evaluare si Examinare
Examenul de bacalaureat la matematica, 13 iunie 2008
Profilul real

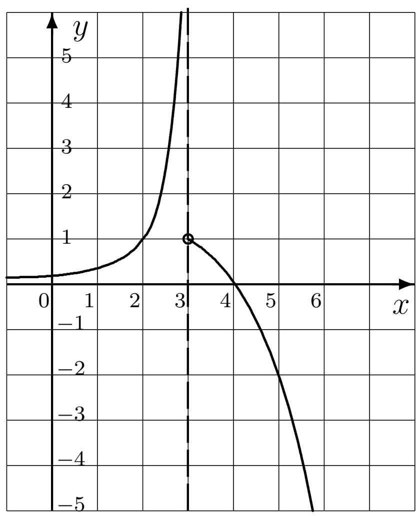
Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-3 completati spatiile rezervate astfel incat propozitiile obtinute sa fie adevarate.

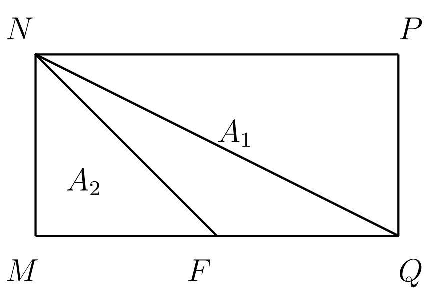
1. In desen este schitat graficul functiei $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \boxed{}$$



2. In dreptunghiul $MNPQ$ punctul F este mijlocul segmentului MQ. Daca aria trapezului $NPQF$ este egala cu A_1, iar aria triunghiului MNF este egala cu A_2, atunci $\dfrac{A_1}{A_2} = \boxed{}$.



3. Expresia $E = \sqrt{1 - \sin x}$ are sens pentru $x \in \boxed{}$.

II. In itemii 4-8 raspundeti la intrebari, scriind argumentarile si raspunsurile in spatiile rezervate.

4. Determinati valoarea de adevar a propozitiei si incercuiti litera **A**, daca propozitia este adevarata sau litera **F**, daca propozitia este falsa.

$$\text{"Daca } z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ z_2 = \frac{4}{\sqrt{3}-i},\ \text{atunci } (z_1+z_2)\in\mathbb{R}.\text{"}$$

Argumentati raspunsul.

5. Dintre cei 50 pepeni verzi, pe care ii vinde la piata un realizator, 40 sunt copti. Care este probabilitatea ca cumparand de la acest vanzator orice doi pepeni, acestea sa fie copti?

6. Rezolvati in $\mathbb{R}$ inecuatia $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+9) > -2$.

7. Completati caseta cu unul dintre semnele ">", "<", "=", astfel incat propozitia obtinuta sa fie adevarata.

$$\text{"Daca } A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x+1},\quad B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}x\,dx,\quad \text{atunci } A\boxed{}B.\text{"}$$

Argumentati raspunsul.

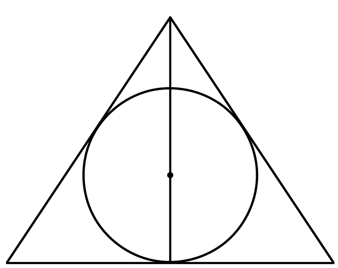
8. Determinati coordonatele piciorului perpendicularei, duse din punctul $A(-1;2)$ pe dreapta $l: 3x-5y-21=0$.

III. In itemii 9-12 scrieti pe foaia de test rezolvarile complete.

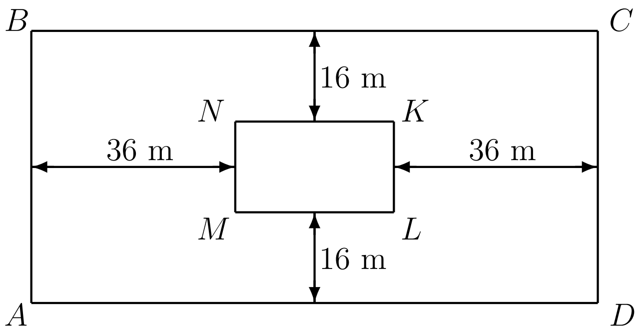
9. Determinati valorile reale ale parametrului m, pentru care solutiile ecuatiei $x^3+4x^2+m=0$ verifica conditia $x_3 = x_1 + x_2$.

10. Rezolvati in $\mathbb{R}$ ecuatia $|3^x-3| + 3^{2x} = 3$.

11. Sectiunea axiala a unui con circular drept este un triunghi echilateral. Determinati raportul dintre volumul conului circular drept si volumul corpului sferic inscris in acest con.



12. Pentru constructia edificiului unui spital, fundamentul caruia are forma unui dreptunghi $MNKL$ cu aria 400 m^2, este necesar un lot de forma dreptunghiulara $ABCD$, astfel incat edificiul spitalului sa fie situat la distantele de 36 m si 16 m de la marginile lotului (vezi desenul). Determinati lungimea si latimea fundamentului edificiului spitalului astfel incat aria lotului $ABCD$ sa fie minima.



Solutii

1. $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = 1.$

2. $\dfrac{A_1}{A_2} = 3.$

3. $x \in \mathbb{R}.$

4. **F**, deoarece $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i;$
$z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{4(\sqrt{3}+i)}{3+1} = \sqrt{3}+i;\quad z_1 + z_2 = -\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i = 2i \notin \mathbb{R}.$

5. Folosim formula probabilitatii clasice $p = \dfrac{m}{n}$, unde m – numarul cazurilor favorabile, n – numarul total de cazuri.

$$n = C_{50}^2 = \frac{50!}{2!48!} = \frac{50\cdot 49}{2};\quad m = C_{40}^2 \cdot C_{10}^0 = \frac{40!}{2!38!}\cdot 1 = \frac{40\cdot 39}{2};\quad p = \frac{\frac{40\cdot 39}{2}}{\frac{50\cdot 49}{2}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{39}{49} = \frac{156}{245}.$$

Raspuns: $\dfrac{156}{245}$.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 9) > -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2 > -2 \Leftrightarrow -2\log_3|x-3| > -2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_3|x-3| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| < 3, \\ |x-3| > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x-3 < 3, \\ x \neq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6, \\ x \neq 3, \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (0;3) \cup (3;6).$
Raspuns: $S = (0;3) \cup (3;6)$.

7. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{2}\ln 2,$

$B = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 - \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2,$ rezulta

$A = B$.

8. Panta dreptei $l : 3x - 5y - 21 = 0$ este $m_1 = \dfrac{3}{5}$. Panta perpendicularei $m_2 = -\dfrac{5}{3}$ (din conditia de perpendicularitate a dreptelor $m_1 \cdot m_2 = -1$).

Ecuatia perpendicularei $y - 2 = -\dfrac{5}{3}(x+1)$ sau $3y - 6 = -5x - 5$, $5x + 3y - 1 = 0$.

Aflam coordonatele piciorului perpendicularei, rezolvand sistemul:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 21 = 0, \\ 5x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Inmultind prima ecuatie a sistemului cu 5, iar a doua ecuatie cu (-3), si adunand, obtinem:

$$-34y - 102 = 0, \quad \text{de unde} \quad y = -3.$$

Atunci $5x + 3 \cdot (-3) - 1 = 0$, $5x = 10$ si $x = 2$.

Asadar, coordonatele piciorului perpendicularei sunt $(2; -3)$.

Raspuns: $(2; -3)$.

9. Conform teoremei Viete:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = -m, \end{cases}$$

in plus, $x_1 + x_2 = x_3$. Din aceasta conditie si prima relatie avem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 = x_3, \end{cases}$$

de unde $2x_3 = -4$ si $x_3 = -2$.

Cum $x_3 = -2$ este solutie a acestei ecuatii:

$$(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + m = 0,$$

$$-8 + 16 + m = 0,$$

$$m + 8 = 0,$$

$$m = -8.$$

Raspuns: $m = -8$.

10. $$|3^x - 3| + 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ -3^x + 3 + 3^{2x} = 3 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ 3^x - 3 + 3^{2x} = 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ 3^{2x} - 3^x = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ 3^{2x} + 3^x - 6 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ 3^x(3^x-1)=0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ (3^x-2)(3^x+3)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ 3^x = 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} 3^x-2=0 \\ 3^x+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ x = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} 3^x=2 \\ 3^x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ x = \log_3 2 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x = 0.$$

Raspuns: $S = \{0\}$.

11. Fie a – latura triunghiului echilateral din sectiunea axiala a conului, R_c – raza bazei conului, H_c – inaltimea conului, r – raza corpului sferic. Atunci

$$R_c = \frac{a}{2}; \qquad H_c = \frac{a}{2}\text{tg}60^o = \frac{a}{2}\sqrt{3}; \qquad r = \frac{a}{2}\text{tg}30^o = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Aflam volumul conului:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi R_c^2 H_c = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

Aflam volumul sferei:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{a^3}{8\cdot 3\cdot\sqrt{3}} = \frac{\pi a^3}{18\sqrt{3}}.$$

Aflam raportul:

$$\frac{V_c}{V_s} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}\cdot\frac{18\sqrt{3}}{\pi a^3} = \frac{3\cdot 3}{4} = \frac{9}{4}.$$

Raspuns: $\frac{9}{4}$.

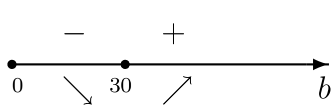
12. Fie $a = |MN|$, $b = |ML|$. Atunci conform conditiilor A=400 m^2, adica $ab = 400$. Aria dreptunghiului $ABCD$ va fi

$$S = (36+36+b)(16+16+a) = (72+b)(32+a).$$

Avem $a = \frac{400}{b}$ si $S = (72+b)\left(32 + \frac{400}{b}\right)$. Cercetam functia S la minim:

$$S' = 32 + \frac{400}{b} + (72+b)\left(-\frac{400}{b^2}\right) = 32 - \frac{72\cdot 400}{b^2} = 32\left(1 - \frac{18\cdot 50}{b^2}\right) = 32\left(1 - \frac{900}{b^2}\right);$$

$$S' = 0 \;\Rightarrow\; 32\left(1 - \frac{900}{b^2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{b^2-900}{b^2} = 0, \text{ de unde } b = \pm 30.$$



Avem $b_{min} = 30$ si $a = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}$.

Raspuns: latimea $\frac{40}{3}$ m, lungimea 30 m.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 4 puncte
Nr. 5 — 5 puncte
Nr. 6 — 5 puncte
Nr. 7 — 6 puncte
Nr. 8 — 7 puncte
Nr. 9 — 7 puncte
Nr. 10 — 8 puncte
Nr. 11 — 8 puncte
Nr. 12 — 8 puncte
total: 64 puncte

Nota

"10" — 62-64 puncte
"9" — 57-61 puncte
"8" — 50-56 puncte
"7" — 39-49 puncte
"6" — 30-38 puncte
"5" — 17-29 puncte
"4" — 14-16 puncte
"3" — 9-13 puncte
"2" — 5-8 puncte
"1" — 0-4 puncte