

Ministerul Educatiei si Tineretului
Agentia de Evaluare si Examinare
Examenul de bacalaureat la matematica, 14 iunie 2007
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-4 scrie pe foaia de test in spatiul indicat numai rezultatele. Poti folosi maculatorul pentru efectuari de calcule.

1. Numarul $\log_3 9^{\lg \frac{1}{10}} + \cos \pi$ este egal cu .

2. Daca $A(x_0, y_0)$ este centrul cercului de ecuatie $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$, atunci $x_0 =$ si $y_0 =$.

3. Timpul in care 30 de elevi au rezolvat o problema este prezentat in tabelul de mai jos:

Timpul x_i (min)	15	5	11	6	16	9	12	7	13	8
Nr. elevilor - n_i	3	1	5	2	1	3	4	2	6	3

Scrie in spatiul indicat mediana acestei serii statistice .

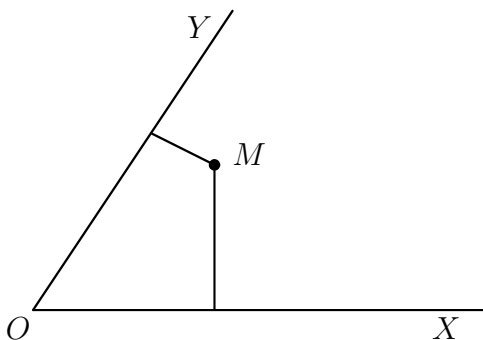
4. Ecuatia asimptotei orizontale la $+\infty$ a graficului functiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{7 - 9x + 8x^2}{3x^2 + 2x + 5}$ este .

II. In itemii 5-8 raspunde la intrebari, scriind argumentarile si raspunsurile in spatiile rezervate.

5. Determina primitiva functiei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, graficul careia contine punctul $A\left(\frac{\pi}{3}; 5 + \ln 2\right)$.

6. Determina pentru care valori reale ale parametrului m sistemul de ecuatii
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (m-2)x_2 + mx_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + (m+4)x_3 = 0 \end{cases}$$
 este compatibil determinat.

7. In interiorul unui unghi XOY de 60° se gaseste un punct M , care se afla la o distanta de 10 cm, respectiv 4 cm de laturile OX, OY ale unghiului. Determina distanta de la punctul M la varful O .

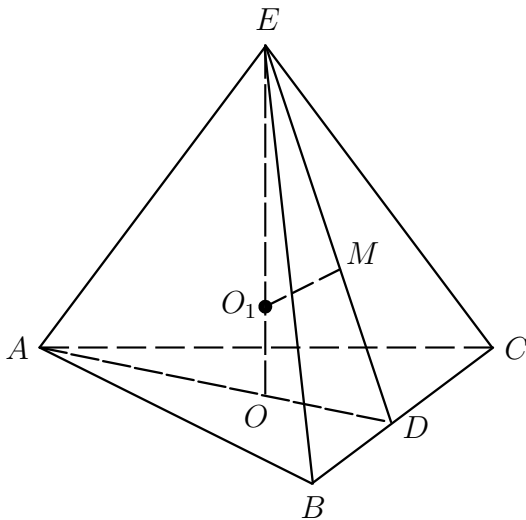


8. Determina cea mai mica solutie a ecuatiei $3^{\lg x^4} - 4 \cdot 3^{\lg x^2} + 3 = 0$.

III. Rezolva problemele 9-12 si scrie pe foaia de test rezolvarile complete.

9. Determina pentru cate valori intregi ale lui a numarul $(a + i)^4$ este intreg.

10. In desenul alaturat $EABC$ este o piramida triunghiulara regulata, muchia laterala a careia formeaza cu planul bazei un unghi de 60° . Determina raza sferei inscise in aceasta piramida, daca muchia laterala a piramidei este egala cu a (in desen O_1 este centrul sferei inscise, $O_1M = O_1O$ – raza sferei inscise).



11. Determina toate valorile reale ale lui a , pentru care tangenta la graficul functiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ in punctul de abscisa $x_0 = a$ intersecteaza axa absciselor in unul din punctele intervalului $[0, 1]$.

12. In desenul alaturat AB reprezinta o cale ferata, iar C un punct care se afla la distanta de 8 km de la aceasta cale ferata si la distanta de $\sqrt{4964}$ km de la punctul A . Pentru a transporta marfa din punctul A in punctul C se intentioneaza sa se construiasca o sosea (rectilie) din punctul C pana la un punct M al caii ferate. Se stie ca pretul pentru transportarea unei tone de marfa pe calea ferata este de 30 de lei (pentru un kilometru), iar pe sosea de 50 de lei (pentru un kilometru). Determina care trebuie sa fie distanta AM , astfel incat pretul pentru transportarea unei tone de marfa din A in C (pe calea AMC) sa fie minim.



Solutii

1. $\log_3 9^{\lg \frac{1}{10}} + \cos \pi = \log_3 9^{\lg 10^{-1}} + (-1) = \log_3 9^{-1} - 1 = \log_3 3^{-2} - 1 = -2 - 1 = -3$.

2. Cum $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ si ecuatia cercului de raza R cu centrul in $O(x_0, y_0)$ este $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, rezulta $x_0 = 1$ si $y_0 = -2$.

3. Aranjam seria statistica crescator, tinand seama de frecventele termenilor:

5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 15, 15, 15, 16.

Cum mediana este valoarea centrala a seriei statistice ordonate crescator se obtine $Me = 11$ (seria contine 30 termeni si in asa caz mediana este media aritmetica a celor doi termeni centrali: $Me = \frac{11 + 11}{2} = 11$).

4. Dreapta $y = b$ este asimptota orizontala la graficul functiei $f(x)$ cand $x \rightarrow +\infty$, daca $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Cum

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - 9x + 8x^2}{3x^2 + 2x + 5} = \frac{8}{3},$$

rezulta $y = \frac{8}{3}$.

5. Cum

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C,$$

se obtine $F(x) = C - \ln |\cos x|$.

Deoarece $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$ si $|\cos x| = \cos x$, prin urmare, $F(x) = -\ln \cos x$. Cum graficul primitivei contine punctul A se obtine

$$5 + \ln 2 = C - \ln \cos \frac{\pi}{3}$$

sau $5 + \ln 2 = C - \ln \frac{1}{2}$, $5 + \ln 2 = C + \ln 2$, de unde $C = 5$.

Raspuns: $F(x) = \ln \cos x + 5$.

6. Conform regulii Cramer, sistemul este compatibil determinat, daca determinantul principal este diferit de zero. Cum

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & m-2 & m \\ 2 & -1 & m+4 \end{vmatrix} = (m-2)(m+4) - 2m - 4(m-2) + m = m^2 + 2m - 8 - 2m - 4m + 8 + m =$$

$= m^2 - 3m$, din conditia $m^2 - 3m \neq 0$ se obtine $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

7. Fie $MA \perp OX$, $MB \perp OY$, $A \in OX$, $B \in OY$, $MA = 10$ (cm), $MB = 4$ (cm). Prelungim AM pana la intersectie cu OY , C - punctul de intersectie.

$m(\angle COA) = 60^\circ$, $m(\angle CAO) = 90^\circ$, rezulta $m(\angle OCA) = 30^\circ$ si $CM = 2BM = 8$ cm (cateta opusa unghiului de 30°).

Din $\triangle OAC$ avem $OA = AC \operatorname{tg} 30^\circ = 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ (cm); iar din $\triangle OMA$, conform teoremei Pitagora: $OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 10^2} = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$ (cm).

8. DVA: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In DVA:

$$3^{\lg x^4} - 4 \cdot 3^{\lg x^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2 \lg x^2} - 4 \cdot 3^{\lg x^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0 \\ t = 3^{\lg x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \\ t = 3^{\lg x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\lg x^2} = 1 \\ 3^{\lg x^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^2 = 0 \\ \lg x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{10} \end{cases}.$$

Toate solutiile sunt din DVA, prin urmare, multimea solutiilor $S = \{-\sqrt{10}, -1, 1, \sqrt{10}\}$ si cea mai mica solutie din S este $x = -\sqrt{10}$.

9. Utilizand formula binomului Newton, se obtine

$$z = a^4 + 4a^3i + 6a^2i^2 + 4ai^3 + 1 = a^4 + 4a^3i - 6a^2 - 4ai + 1 = (a^4 - 6a^2 + 1) + (4a^3 - 4a)i.$$

Cum $z \in \mathbb{Z}$, rezulta $\operatorname{Im} z = 0$, adica $4a^3 - 4a = 0$, de unde $a \in \{0; -1; 1\}$. Cum cardinalul acestei multimi este 3 si pentru fiecare a din aceasta multime $a^4 - 6a^2 + 1 \in \mathbb{Z}$, obtinem raspunsul 3.

10. Deoarece piramida este regulata, rezulta ca inaltimea EO se proiecteaza in centrul cercului circumscris bazei.

In $\triangle EOA$ dreptunghic $OA = R = \frac{a}{2}$ (cateta opusa unghiului de 30°). Conform teoremei Pitagora

$$EO = \sqrt{EA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Sfera inscrisa este tangenta la fetele laterale in puncte de pe apotema. Fie raza sferei inscrise este $r = O_1O = MO_1$.

Din $\triangle EOD \sim \triangle EMO_1$ rezulta:

$$\frac{MO_1}{OD} = \frac{EO_1}{ED} \quad (*).$$

$OD = \frac{1}{2} \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$; $EO_1 = EO - O_1O = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r$. Din $\triangle EOD$ dreptunghic, conform teoremei Pitagora, obtinem:

$$ED = \sqrt{EO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Din (*) rezulta:

$$\frac{r}{\frac{a}{4}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r}{\frac{a\sqrt{13}}{4}} \Rightarrow r\sqrt{13} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r \Rightarrow r(1 + \sqrt{13}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{13})} \text{ (un. l.)}.$$

11. Ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul $(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

In cazul dat $x_0 = a$, $f(a) = a^2 - 2a + 2$, $f'(x) = 2x - 2$, $f'(a) = 2a - 2$ si ecuatia tangentei devine

$$y - (a^2 - 2a + 2) = (2a - 2)(x - a)$$

sau, dupa transformari elementare,

$$y = (2a - 2)x + 2 - a^2.$$

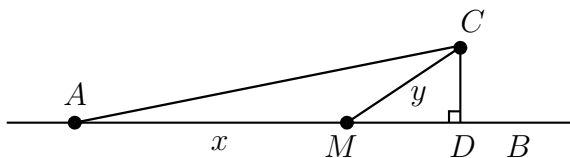
Determinam abscisa punctului de intersectie a tangentei cu axa OX :

$$(2a - 2)x + 2 - a^2 = 0,$$

de unde $x = \frac{a^2 - 2}{2a - 2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (daca $a = 1$, ecuatia tangentei devine $y = 1$ si nu intersecteaza axa OX).

$$\begin{aligned} \text{Cum } x \in [0, 1] \text{ se obtine sistemul de inecuatii } & \begin{cases} \frac{a^2 - 2}{2a - 2} \leq 1 \\ \frac{a^2 - 2}{2a - 2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 2 - 2a + 2}{2(a - 1)} \leq 0 \\ \frac{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{2(a - 1)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a(a - 2)}{a - 1} \leq 0 \\ \frac{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{a - 1} \geq 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-\infty; 0] \cup (1; 2] \\ a \in [-\sqrt{2}; 1) \cup [\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; 2]. \end{aligned}$$

12.



Coboram $CD \perp AB$, $D \in [AB]$. Conform enuntului $AC = \sqrt{4964}$, $CD = 8$. Fie $AM = x$, $MC = y$. Atunci pretul pentru transportarea unei tone va fi $C = 30x + 50y$.

Din triunghiul dreptunghic ADC determinam AD :

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{4964 - 64} = \sqrt{4900} = 70.$$

Din $\triangle MDC$ (dreptunghic) aflam CM :

$$CM = y = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + (70 - x)^2} = \sqrt{64 + (70 - x)^2}.$$

Cercetam la minim functia C :

$$C = 30x + 50y = 30x + 50\sqrt{64 + (70 - x)^2};$$

$$C' = 30 + 50 \frac{2 \cdot (70 - x)(-1)}{2 \cdot \sqrt{64 + (70 - x)^2}} = 30 - 50 \frac{70 - x}{\sqrt{64 + (70 - x)^2}} = \frac{30\sqrt{64 + (70 - x)^2} - 50(70 - x)}{\sqrt{64 + (70 - x)^2}}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Din } C' = 0 \text{ rezulta } 30\sqrt{64 + (70 - x)^2} - 50(70 - x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{64 + (70 - x)^2} = 5(70 - x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 9(64 + (70 - x)^2) = 25(70 - x)^2 \\ 70 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cdot 64 = 16 \cdot (70 - x)^2 \\ x \leq 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |70 - x| = 6 \\ x \leq 70 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = 64 \\ x = 76 \\ x \leq 70 \end{bmatrix} \\ \end{cases} \Leftrightarrow x = 64.
\end{aligned}$$

Verificam punctul $x = 64$ la extrema (semnul derivatei):

$$\begin{array}{c}
- \qquad \qquad + \\
\hline
\swarrow \quad 64 \quad \searrow
\end{array}$$

asadar, $x = 64$ este punct de minim, astfel distanta $AM = 64$ (km).

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
 Nr. 2 — 2 puncte
 Nr. 3 — 2 puncte
 Nr. 4 — 3 puncte
 Nr. 5 — 4 puncte
 Nr. 6 — 4 puncte
 Nr. 7 — 5 puncte
 Nr. 8 — 5 puncte
 Nr. 9 — 6 puncte
 Nr. 10 — 6 puncte
 Nr. 11 — 7 puncte
 Nr. 12 — 8 puncte
 total: 54 puncte