Ministerul Educatiei, Tineretului si Sportului
Directia Evaluare Invatamant Preuniversitar
Examenul de bacalaureat la matematica, 9 iunie 2006
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-4 scrie pe foaia de test in spatiul indicat numai rezultatele. Poti folosi Maculatorul pentru efectuari de calcule.

1. Daca $x^{-3} = 64$, atunci valoarea numerica a expresiei $x^{\frac{1}{2}}$ este egala cu $\boxed{}$.

2. Functia definita prin formula $f(x) = \sin(x + \pi)$ este crescatoare in cadranele $\boxed{}$.

3. Tangenta la curba de ecuatie $y = xe^{-x}$ este orizontala cand $x = \boxed{}$.

4. Multimea punctelor $z = a + bi$ din planul complex pentru care $|z - i| = 1$ este cercul de ecuatie: $\boxed{}$.

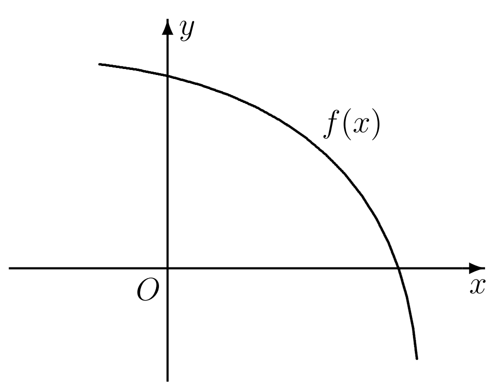
II. In itemii 5-11 raspunde la intrebari, scriind argumentarile si raspunsurile in spatiile rezervate.

5. Pe o strada dintr-un oras, la recensamantul numarul de copii din fiecare familie, s-au obtinut urmatoarele rezultate:

Nr. copii (x_i)	0	1	2	3	4	5
Nr. familii (n_i)	6	16	16	6	4	2
Frecvente relative (f_i)						
Frecvente procentuale						

a) Completeaza casetele libere din tabel;
b) Calculeaza numarul mediu de copii dintr-o familie (aproximare prin rotunjire).

6. In sistemul cartezian de coordonate este reprezentat graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx^2 + dx + e$. Utilizand desenul determina semnul fiecarui dintre coeficientii c, d, e. Argumenteaza raspunsul.

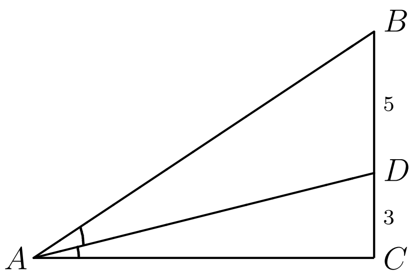


7. Determina pentru care valori pozitive ale lui x termenul al patrulea in dezvoltarea binomului $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^7$ este egal cu 280.

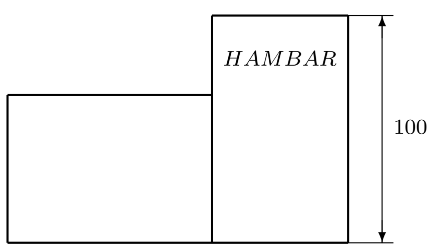
8. Determina multimea solutiilor intregi ale inecuatiei $\dfrac{\log_2\left(\dfrac{x}{3} - 2\right)}{\sqrt{x-7}} \leq 0$.

9. Fie date matricile $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina matricea C, astfel incat $2A^{-1} + C = B$.

10. In desenul alaturat bisectoarea AD imparte cateta BC a triunghiului dreptunghic ABC in segmentele de lungime 5 cm si 3 cm. Utilizand datele problemei si desenul determina lungimea catetei AC.

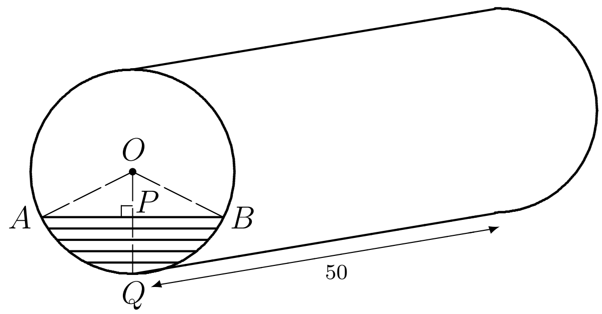


11. Un fermier are 160 m de gard pentru a ingradi un lot din patru parti. Pentru a face suprafata lotului cat e posibil de mare, el poate sa utilizeze si un perete, sau o parte din peretele hambarului (vezi desenul). Determina aria maximala posibila a lotului obtinut, daca lungimea hambarului este de 100 m.

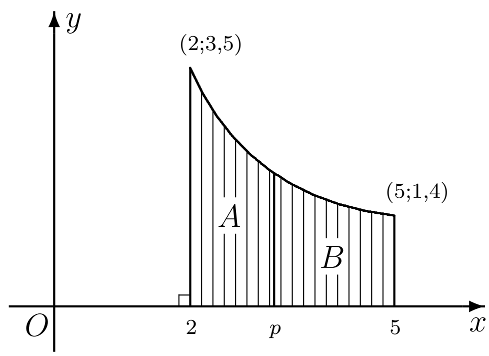


III. Rezolva problemele 12-14 si scrie pe foaia de test rezolvarile complete.

12. Un rezervor de forma cilindrica cu diametrul de 60 cm si lungimea de 50 cm (vezi desenul) a fost umplut partial cu apa. In desen segmental hasurat arata sectiunea transversala a apei. Inaltimea apei este de 15 cm. Determina cati cm^3 de apa e necesar de adaugat pentru a umplea pe jumatate rezervorul. (*Volumul apei care se afla initial in rezervor este egal cu produsul dintre aria segmentului de cerc si lungimea rezervorului*).



13. In sistemul cartezian de coordonate este reprezentat o parte a graficului functiei $f(x)$, ce trece prin punctele (2; 3,5) si (5; 1,4). Derivata functiei date intr-un punct oarecare $(x; y)$ este $f'(x) = -\dfrac{20}{x^3}$. Dreapta $x = p$ imparte domeniul hasurat in doua figure congruente A si B. Utilizand datele problemei si desenul determina valoarea lui p.



14. Determina pentru care valori reale ale lui p din punctul $B(p; -1)$ pot fi trasate la graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trei tangente diferite.

Solutii

1. $x^{-3} = 64 \ \Leftrightarrow\ x^3 = \dfrac{1}{64} \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{1}{4} \ \Leftrightarrow\ x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ $(x > 0)$.

2. Din reprezentarea grafica a functiei $f(x) = \sin(x + \pi)$ se obtine, ca functia f este crescatoare in cadranele II si III.

3. Se utilizeaza interpretarea geometrica a teoremei Fermat (tangenta la graficul functiei f in punctele de extrem este paralela cu axa OX) si se obtine:

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ e^{-x} - xe^{-x} = 0 \ \Leftrightarrow\ e^{-x}(x-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1.$$

Se verifica ca $x = 1$ este punctul de minim. Prin urmare, pentru $x = 1$ tangenta la graficul functiei $f(x) = xe^{-x}$ este orizontala (paralela cu axa OX).

4. $|z - i| = 1 \ \Leftrightarrow\ |a + bi - i| = 1 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 1 \ \Leftrightarrow\ a^2 + (b-1)^2 = 1.$

Rezulta multimea punctelor din planul complex, ce verifica relatia data este cercul de ecuatie $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

5. a) Aflam volumul seriei statistice $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 6 + 16 + 16 + 6 + 4 + 2 = 50$ si frecventele relative: $\omega_i = \frac{n_i}{n},\ \ i = \overline{1,6};\quad \omega_1 = \frac{6}{50};\ \omega_2 = \omega_3 = \frac{16}{50};\ \omega_4 = \frac{6}{50};\ \omega_5 = \frac{4}{50};\ \omega_6 = \frac{5}{50}$.

Frecventele procentuale (**definitia lipseste din manualele existente**) sunt egale respectiv cu

$$\omega_1 = \frac{6}{50} \cdot 100\% = 12\%;\quad \omega_2 = \omega_3 = 32\%;\quad \omega_4 = 12\%;\quad \omega_5 = 8\%;\quad \omega_6 = 10\%.$$

b) Numarul mediu de copii dintr-o familie:

$$m = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{50} = \frac{92}{50} = 1,84 \approx 2.$$

6. Cum $f(0) = e$, rezulta $e > 0$. Ramurile parabolei sunt indreptate in jos, prin urmare $c < 0$. Varful parabolei se afla in punctul de abscisa $-\frac{d}{2c} < 0$, de unde $d < 0$. Asadar, $c < 0,\ \ d < 0,\ \ e > 0$.

Raspuns: $c < 0,\ \ d < 0,\ \ e > 0$.

7. Utilizand formula termenului de rang k $\ T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ se obtine

$$T_4 = C_7^3 (\sqrt{x})^4 (\sqrt[3]{x})^3 = \frac{7!}{3!4!} \cdot x^{\frac{4}{2}} \cdot x^{\frac{3}{3}} = 35x^{2+1} = 35x^3.$$

Cum $T_4 = 280$, rezulta ecuatia $35x^3 = 280$ echivalenta cu $x^3 = 8$, de unde $x = 2$.

Raspuns: $x = 2$.

8. $\dfrac{\log_2\left(\frac{x}{3} - 2\right)}{\sqrt{x-7}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\frac{x}{3} - 2\right) \leq 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x}{3} - 2 \leq 1 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < \frac{x}{3} \leq 3 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 < x \leq 9 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow 7 < x \leq 9.$

Cum $x \in \mathbb{Z}$, ramane $x \in \{8; 9\}$.

Raspuns: $x \in \{8; 9\}$.

9. $2A^{-1} + C = B \Leftrightarrow C = B - 2A^{-1}$. Se determina matricea inversa matricei A: $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ $\ (A^{-1}$ exista) si $\ A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Asadar,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Raspuns: $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

10. Se utilizeaza proprietatea bisectoarei $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$, si se obtine $AB = \frac{5}{3}AC$. Din teorema Pitagora rezulta

$$AC^2 = AB^2 - BC^2.$$

Cum $\ BC = BD + DC = 5 + 3 = 8,\quad AB = \frac{5}{3}AC,\ $ avem $AC^2 = \frac{25}{9}AC^2 - 64$, de unde $\frac{16}{9}AC^2 = 64\ $ si $\ AC^2 = 36,\ \ AC = 6$ (cm).

Raspuns: $AC = 6$ cm.

11. Fie dimensiunile lotului a si b. Atunci lungimea gardului ce ingradeste lotul va fi $l = 2a + b$. Cum $a > 0,\ b > 0$, utilizand inegalitatea dintre media aritmetica si cea geometrica (egalitatea se obtine pentru $2a = b$) se obtine

$$\frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2a \cdot b} \quad \text{sau} \quad 2a + b \geq 2\sqrt{2ab}.$$

Conform ipotezei $2a + b = 160$ (m), deci

$$160 \geq 2\sqrt{2ab} \quad \Leftrightarrow \quad 80 \geq \sqrt{2ab} \quad \Leftrightarrow \quad 6400 \geq 2ab,$$

de unde $ab = S \leq 3200$. Rezulta aria maxima a lotului este 3200 (m^2) si se obtine pentru $2a = b$. Prin urmare, $2a + b = 2b = 160$, de unde $b = 80$ m si $a = 40$ m.

Raspuns: $S = 3200$ m^2.

12. Fie R – raza bazei cilindrului, $R = \dfrac{60}{2} = 30$ (cm).

Consideram ΔAOB. Cum $OP = OQ - QP = 30 - 15 = 15$ (cm), $AO = 30$ cm, rezulta (din ΔAPO, dreptunghic in P) ca $\angle OAP = 30^o$ si, prin urmare,

$$\angle AOB = 180^o - (30^o + 30^o) = 120^o$$

si

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3}(\text{cm}^2).$$

Aflam aria segmentului de cerc AOB:

$$A = \frac{1}{2}R^2\alpha - S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 30^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - 225\sqrt{3} = (300\pi - 225\sqrt{3})(\text{cm}^2).$$

Determinam volumul cilindrului V_1:

$$V_1 = \pi R^2 H = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 45000\pi(\text{cm}^3),$$

volumul corpului format de apa ce se afla initial in rezervor V_2:

$$V_2 = A \cdot H = (300\pi - 225\sqrt{3}) \cdot 50 = (15000\pi - 11250\sqrt{3})\ \text{cm}^3$$

si volumul apei necesar de adaugat in rezervor pentru a-l umplea pe jumatate:

$$V = \frac{1}{2}V_1 - V_2 = 22500\pi - (15000\pi - 11250\sqrt{3}) = (7500\pi + 11250\sqrt{3})\ \text{cm}^3.$$

Raspuns: $(7500\pi + 11250\sqrt{3})$ cm^3.

13. Nota: figurile A si B nu sunt congruente, ci echivalente, adica au arii egale, in conditiile enuntate problema este lipsita de sens.

Determinam functia $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(-\frac{20}{x^3}\right) dx = -20\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{10}{x^2} + C.$$

Cum $f(2) = 3,5$, rezulta $3,5 = \dfrac{10}{4} + C$, de unde $C = 1$ si $f(x) = \dfrac{10}{x^2} + 1$. Ariile figurilor A si B:

$$S_A = \int_2^p \left(\frac{10}{x^2} + 1\right) dx = \left(-\frac{10}{x} + x\right)\Bigg|_2^p = -\frac{10}{p} + p + 5 - 2 = -\frac{10}{p} + p + 3;$$

$$S_B = \int_p^5 \left(\frac{10}{x^2} + 1\right) dx = \left(-\frac{10}{x} + x\right)\Bigg|_p^5 = -2 + 5 + \frac{10}{p} - p = \frac{10}{p} - p + 3.$$

Din echivalenta figurilor A si B, rezulta

$$-\frac{10}{p} + p + 3 = \frac{10}{p} - p + 3, \quad \text{sau} \quad \frac{10}{p} - p = 0,$$

de unde $p = \pm\sqrt{10}$. Cum $p \in (2; 5)$, ramane $p = \sqrt{10}$.

Raspuns: $p = \sqrt{10}$.

14. Utilizand ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

se obtine:

$$y - (x_0^3 - 3x_0^2 + 3) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0).$$

Cum punctul $B(p; -1)$ apartine tangentei,

$$-1 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 3) = (3x_0^2 - 6x_0)(p - x_0),$$

$$-x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 3x_0(x_0 - 2)(p - x_0),$$

$$-(x_0 - 2)^2(x_0 + 1) = 3x_0(x_0 - 2)(p - x_0),$$

de unde rezulta in $x_0 = 2$ poate fi trasata o tangenta la graficul functiei f oricare ar fi $p \in \mathbb{R}$.

Asadar, fie $x_0 \neq 2$, atunci

$$-(x_0 - 2)(x_0 + 1) = 3x_0(p - x_0),$$

$$3x_0^2 - 3x_0 p - x_0^2 + x_0 + 2 = 0,$$

$$2x_0^2 - x_0(3p - 1) + 2 = 0.$$

Pentru verificarea conditiilor problemei este necesar ca determinantul ultimei ecuatiei sa fie strict pozitiv: $\Delta = (3p - 1)^2 - 16 > 0$ sau

$$(3p - 1 - 4)(3p - 1 + 4) > 0,$$

$$(3p - 5)(3p + 3) > 0,$$

de unde $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

Cum $p \neq 2$, rezulta $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Raspuns: $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 2 puncte
Nr. 5 — 6 puncte
Nr. 6 — 6 puncte
Nr. 7 — 5 puncte
Nr. 8 — 5 puncte
Nr. 9 — 4 puncte
Nr. 10 — 6 puncte
Nr. 11 — 6 puncte
Nr. 12 — 7 puncte
Nr. 13 — 8 puncte
Nr. 14 — 9 puncte
total: 70 puncte

Nota

"10" — 64-70 puncte
"9" — 57-63 puncte
"8" — 49-56 puncte
"7" — 40-48 puncte
"6" — 32-39 puncte
"5" — 21-31 puncte
"4" — 15-20 puncte
"3" — 9-14 puncte
"2" — 4-8 puncte
"1" — 0-3 puncte