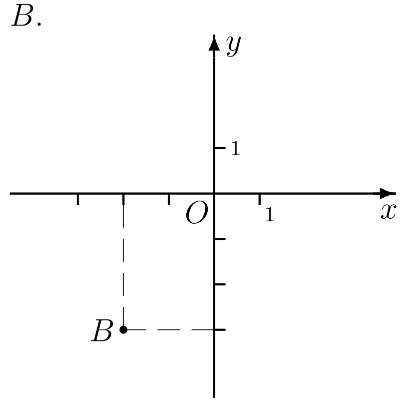
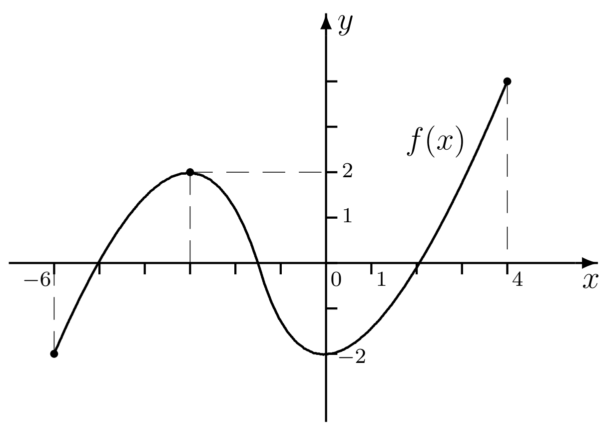
Ministerul Educatiei al Republicii Moldova
Examenul de bacalaureat la matematica, 2 iunie 2003
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

1. Scrieti in forma algebrica numarul complex z, a carui reprezentare geometrica este punctul B.



2. Pe desen este reprezentat graficul functiei $f : [-6; 4] \longrightarrow \mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui a ecuatia $f(x) = a$ admite 3 radacini reale distincte?



3. Scrieti ecuatia cercului cu diametrul AB, daca $A(3; 2)$, $B(-1; 6)$.

4. Se arunca o moneda de 3 ori. Care este probabilitatea ca pajura sa cada de 2 ori?

5. Termenul al noualea al dezvoltarii binomului $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ nu contine x. Calculati A_n^2.

6. Calculati $\int\limits_0^1 \dfrac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

7. Rezolvati inecuatia $(\sin 2)^{x^2 - x} \geq \sin^2 2$.

8. Aria sectiunii axiale a unui cilindru este Q. Determinati aria suprafetei laterale a cilindrului.

9. Determinati radacinile polinomului $P(X) = X^3 + 2aX^2 - 5X - a - 9$, $a \in \mathbb{R}$, daca se stie ca restul impartirii lui $P(X)$ la binomul $(X - 2)$ este egal cu restul impartirii lui $P(X)$ la binomul $X + 1$.

10. Determinati aria triunghiului format de bisectoarele unghiurilor de coordonate si tangenta la graficul functiei $f : [\sqrt{5}; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ in punctul $M(3; 2)$.

11. Rezolvati ecuatia $\log_2(x^2 - x + b) = \log_2(-3x + b)$ pentru orice parametrul real b.

12. In triunghiul ABC mediana AM $(M \in (BC))$ este perpendiculara pe mediana BN $(N \in (AC))$. Deternimati aria triunghiului, daca se stie ca $AM = a$, $BN = b$.

Solutii

1. Cum reprezentarea geometrica a numarului complex $z = a + bi$ este punctul $B(a; b)$ si cum punctul B are coordonate $(-2; -3)$, rezulta $z = -2 - 3i$.

Raspuns: $z = -2 - 3i$.

2. Ecuatia $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ admite trei radacini reale distincte pentru $a \in (-2; 2)$, deoarece numai pentru aceste valori ale lui a dreapta $y = a$ intersecteaza graficul functiei $f(x)$ in trei puncte distincte.

Raspuns: $a \in (-2; 2)$.

3. Cum segmentul AB este diametru, coordonatele mijlocului acestui segment sunt coordonatele centrului cercului. Utilizand formulele pentru determinarea coordonatelor $(x_0; y_0)$ mijlocului segmentului cu extremitatile $A(x_1; y_1)$ si $B(x_2; y_2)$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

se obtine $x_0 = 1$ si $y_0 = 4$.

Aplicand formula distantei dintre doua puncte date $A(x_1; y_1)$ si $B(x_2; y_2)$,

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

se obtine lungimea diametrului AB:

$$d = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$$

Cum raza cercului R este egala cu jumatate din diametru, rezulta $R = 2\sqrt{2}$. Ecuatia cercului de raza R cu centrul in punctul $O(x_0; y_0)$ este

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Substituind $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ si $R = 2\sqrt{2}$, se obtine $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$.

Raspuns: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$.

4. Se aplica schema binomiala (Bernoulli):

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde n – numarul de experiente independente;

k – numarul de realizari a evenimentului A $(0 \leq k \leq n)$;

p – probabilitatea realizarii evenimentului A intr-o experienta aparte (aceeasi la fiecare experienta);

$q = 1 - p$;

$p_n(k)$ – probabilitatea realizarii evenimentului A de k ori in n experiente independente.

Probabilitatea aparitiei pajurei p in fiecare din cele trei $(n = 3)$ aruncari (evenimente independente) este aceeasi si egala cu $\frac{1}{2}$. Prin urmare,

$$p_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-1} = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

Raspuns: $p_3(2) = \dfrac{3}{8}$.

5. Utilizand formula pentru al $(k+1)$-lea termen al dezvoltarii binomului la putere $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ se obtine:

$$T_9 = T_{8+1} = C_n^8\ (\sqrt[3]{x})^{n-8} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8 = C_n^8\ x^{\frac{n-8}{3}} x^{-4} = C_n^8\ x^{\frac{n-20}{3}}.$$

Cum termenul al noualea nu contine x, rezulta $\dfrac{n-20}{3} = 0$, de unde $n = 20$. Prin urmare,

$$A_n^2 = A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 19 \cdot 20 = 380.$$

Raspuns: $A_{20}^2 = 380$.

6. Se observa ca $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$ si, utilizand formula Newton-Leibnitz, se obtine:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 d(\sqrt{1+x^2}) = \sqrt{1+x^2}\ \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

Raspuns: $\int_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} - 1$.

7. Cum $0 < \sin 2 < 1$, functia $(\sin 2)^x$ este o functie descrescatoare. Prin urmare,

$$(\sin 2)^{x^2-x} \geq \sin^2 2 \ \Leftrightarrow\ x^2 - x \leq 2 \ \Leftrightarrow\ x^2 - x - 2 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ (x+1)(x-2) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ -1 \leq x \leq 2\ .$$

Raspuns: $x \in [-1; 2]$.

8. Fie h – inaltimea si d – diametrul bazei cilindrului. Cum sectiunea axiala a unui cilindru este un dreptunghi cu laturile h si d avem $Q = \pi dh$. Cum aria suprafetei laterale a cilindrului $S_{lat.} = dh$ si $dh = Q$, se obtine $S_{lat.} = \pi Q$.
Raspuns: $S_{lat.} = \pi Q$.

9. Utilizand teorema lui Bézout, se obtine relatia $P(2) = P(-1)$, adica

$$8 + 8a - 10 - a - 9 = -1 + 2a + 5 - a - 9,$$

de unde $a = 1$. Prin urmare, $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X - 10$. Radacinile polinomului $P(X)$ se determina rezolvand ecuatia $P(X) = 0$.
$X^3 + 2X^2 - 5X - 10 = 0 \ \Leftrightarrow\ (X^3 - 5X) + (2X^2 - 10) = 0 \ \Leftrightarrow\ X(X^2-5) + 2(X^2-5) = 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ (X^2-5)(X+2) = 0 \ \Leftrightarrow\ (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})(X+2) = 0,$
de unde $X_1 = \sqrt{5},\ X_2 = -\sqrt{5},\ X_3 = -2.$
Raspuns: radacinile polinomului sunt $P(X)$ sunt $-\sqrt{5}, -2, \sqrt{5}$.

10. Ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul $(x_0; f(x_0))$ este

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

In cazul dat $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}$, $f'(3) = \dfrac{3}{2}$ si ecuatia tangentei la graficul functiei f in punctul $M(3;2)$ este

$$y = \frac{3}{2}(x-3)+2 \qquad \text{sau} \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

Determinam coordonatele varfurilor triunghiului format de bisectoarele unghiurilor de coordonate ($y = x$ si $y = -x$) si tangenta la graficul functiei f, rezolvand sistemele de ecuatii liniare:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}, \\ y = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}, \\ y = -x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x, \\ y = -x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Aplicand formula pentru aria triunghiului cu varfurile date $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right|$$

se obtine

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| -5-5 \right| = \frac{1}{2}\left| -10 \right| = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

Raspuns: $S = 5$ (un.p.).

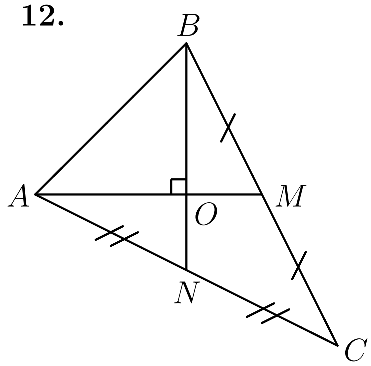
11. $\log_2(x^2-x+b) = \log_2(-3x+b) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+b = -3x+b, \\ -3x+b > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x = 0, \\ x < \dfrac{b}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \end{array} \right. \\ x < \dfrac{b}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ x < \dfrac{b}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ x < \dfrac{b}{3}, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ b > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ b > -6, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \varnothing, \\ b \in (-\infty; -6], \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ b \in (-6; 0], \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \end{array} \right. \\ b \in (0; +\infty). \end{cases} \end{array} \right.$$

Raspuns: $S = \begin{cases} \varnothing, & \text{daca } b \in (-\infty; -6]; \\ \{-2\}, & \text{daca } b \in (-6; 0]; \\ \{-2; 0\}, & \text{daca } b \in (0; +\infty). \end{cases}$

12.



Fie $\{AM\} \bigcap \{BN\} = \{O\}$. Cum $BN \perp AM$ si $AO = \frac{2}{3}a$ (medianele triunghiului in punctul de intersectie se impart in raportul 2:1 socotind de la varf), $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} BN \cdot AO = \frac{1}{2} b \cdot \frac{2}{3} a = \frac{ab}{3}$. Cum $S_{\triangle ABC} = 2 S_{\triangle ABN}$ (proprietatea medianei), rezulta

$$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{ab}{3} = \frac{2ab}{3} (\text{un. p.})$$

Raspuns: $S = \frac{2ab}{3}$ (un.p.).

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 3 puncte
Nr. 2 — 3 puncte
Nr. 3 — 3 puncte
Nr. 4 — 4 puncte
Nr. 5 — 5 puncte
Nr. 6 — 5 puncte
Nr. 7 — 5 puncte
Nr. 8 — 4 puncte
Nr. 9 — 7 puncte
Nr. 10 — 8 puncte
Nr. 11 — 8 puncte
Nr. 12 — 6 puncte
total: 61 puncte

Nota

"10" — 60-61 puncte
"9" — 55-59 puncte
"8" — 48-54 puncte
"7" — 39-47 puncte
"6" — 30-38 puncte

"5" — 21-29 puncte
"4" — 13-20 puncte
"3" — 6-12 puncte
"2" — 2-5 puncte
"1" — 0-1 puncte