Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, 2001
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

1. Intre care numere intregi consecutive se afla numarul $\log_{\frac{1}{7}} 143$?

2. Dati exemplu de o functie care nu este definita in punctul de abcisa $x = 3$, dar are limita finita in acest punct.

3. Determinati termenul al patrulea al dezvoltarii binomului $\left(\sqrt{2x} - \frac{x}{2}\right)^6$.

4. Cercurile de ecuatii $x^2 + y^2 = -4x$ si $x^2 + y^2 = 4y$ au o coarda comuna. Scrieti ecuatia dreptei ce contine aceasta coarda.

5. Fie polinomul $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 3$. Calculati restul impartirii polinomului $P(x)$ la binomul $x - a$, daca $\alpha = 3 - i$.

6. Rezolvati inecuatia $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 3}}{3x^2 - 4} \geq 0$.

7. Calculati volumul corpului de rotatie determinat de functia $f(x) = -x^2 + 4x$, daca $x \in [0; 2]$.

8. Determinati raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic cu lungimea unei catete egale cu 5cm si raza cercului inscris egala cu 2cm.

9. Rezolvati ecuatia

$$2 - 3\log_{125}(x+3)^2 = 4\log_{25}\frac{x-5}{x-3}.$$

10. Pentru ce valori ale parametrului real m functia $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = 2(m^2x + 3) - x(21 - mx)$ admite un minim de abcisa $x = 0,5$.

11. Rezolvati sistemul de ecuatii in multimea numerelor reale

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{y} + z^2 = 14, \\ 2\sin x + \sqrt{y} - z^2 = -3, \\ 3\sin x + \sqrt{y} - 2z^2 = -11. \end{cases}$$

12. Aria sectiunii diagonale a unei piramide patrulaterale regulate este egala cu aria bazei. Determinati volumul piramidei, daca lungimea muchiei laterale a piramidei este egala cu 5cm.

Solutii

1. Cum $49 < 143 < 343$, rezulta $\log_{\frac{1}{7}} 343 < \log_{\frac{1}{7}} 143 < \log_{\frac{1}{7}} 49$ (functia logaritmica $f(x) = \log_a x$ pentru $a \in (0; 1)$ este strict descrescatoare) sau

$$-3 < \log_{\frac{1}{7}} 143 < -2$$

adica numarul $\log_{\frac{1}{7}} 143$ se afla intre numerele consecutive intregi -3 si -2.

2. De exemplu, $f : R \setminus \{3\} \longrightarrow R$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. In adevar,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

3. Se aplica formula termenii de rangul $(k+1)$ in dezvoltarea binomului $(a+b)^n$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$

unde $n = 6$, $k+1 = 4$, de unde $k = 3$, $a = (2x)^{\frac{1}{2}}$ si $b = -\frac{x}{2}$. Rezulta $T_4 = C_6^3 (2x)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{x}{2}\right)^3 =$ $= -5\sqrt{2}x^4\sqrt{x}$.

4. Se rezolva sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4x, \\ x^2 + y^2 = 4y, \end{cases}$$

si se obtin punctele de intersectie ale cercurilor date: $A(0;0)$ si $B(-2;2)$. Se scrie ecuatia dreptei ce trece prin aceste puncte:

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{2-0}$$

de unde $y = -x$. Asadar ecuatia dreptei ce contine coarda data este $y = -x$.

5. Cum $P(3-i) = (3-i)^3 - 2(3-i) - 7(3-i) - 3 = 27 - 27i + 9i^2 - i^3 - 18 + 12i - 2i^2 - 21 + 7i - 3 =$ $= -22 - 7i$, rezulta ca restul impartirii polinomului data la $x - \alpha$, unde $\alpha = 3 - i$ este egal cu $-22 - 7i$.

6.

$$\frac{\sqrt{3x^2-3}}{3x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0, \\ 3x^2 - 4 \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 - 3 > 0, \\ 3x^2 - 4 > 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = -1, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right), \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right).$$

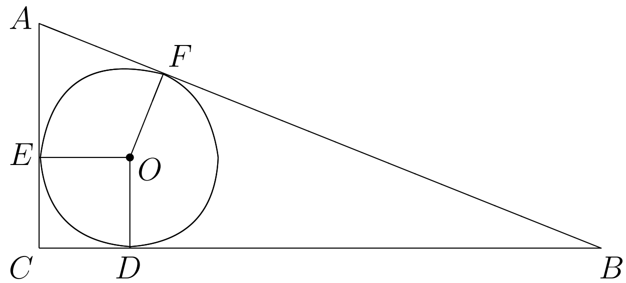
7. Se aplica formula pentru determinarea volumului corpului de rotatie generat de rotatia in jurul axei Ox a subgraficului functiei $f : [a,b] \longrightarrow R$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

si se obtine

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 4x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 - 8x^3 + 16x^2)dx =$$
$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right) \Bigg|_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - 32 + \frac{128}{3} \right) = \frac{256}{15}\pi(\text{un.vol.})$$

8.



Fie ABC - triunghi dreptunghic ($AC \perp BC$) cu $AC = 5$cm si $OD = OE = OF = = r = 2$cm. (O - centrul cercului inscris in triunghiul ABC). Fie $BF = x$. Atunci $BD = x$ si cum $CE = 2$cm, ($OECD$ - patrat) rezulta $AE = AF = 3cm$ si $AB = 3 + x$. Se aplica teorema lui Pitagora

$$5^2 + (2 + x)^2 = (3 + x)^2,$$

si se obtine $x = 10$cm. Prin urmare ipotenuza $AB = 3 + 10 = 13$(cm), iar raza cercului circumscris acestui triunghi $R = \frac{c}{2} = 6,5$(cm) (centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic se afla in mijlocul ipotenuzei).

9. Domeniul valorilor admisibile (DVA) se determina din sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-3} > 0, \\ (x+3)^2 > 0 \end{cases}$$

de unde $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$.

In DVA ecuatia este echivalenta cu

$$2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \log_5 |x + 3| = 4 \cdot \frac{1}{2} \log_5 \frac{x-5}{x-3}$$

sau

$$1 - \log_5 |x + 3| = \log_5 \frac{x-5}{x-3},$$

$$1 = \log_5 \left(\frac{x-5}{x-3} \cdot |x + 3| \right)$$

de unde se obtine ecuatia

$$5 = \frac{x-5}{x-3} |x + 3|.$$

Se tine seama de DVA si se considera doua cazuri:

1. $x \in (-\infty; -3)$. Atunci $|x + 3| = -(x + 3)$ si ecuatia devine $5(x - 3) = -(x - 5)(x + 3)$. Se rezolva ecuatia patrata obtinuta $x^2 + 3x - 30 = 0$ si se obtine $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{129}}{2}$ si $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{129}}{2}$ (nu verifica conditia $x < -3$).

2. $x \in (-3; 3) \cup (5; +\infty)$. Atunci $|x + 3| = x + 3$ si ecuatia devine

   $$5(x - 3) = (x - 5)(x + 3)$$

   sau $x^2 - 7x = 0$, de unde $x_1 = 0$ si $x_2 = 7$.

Asadar, multimea solutiilor ecuatiei date este $\left\{\frac{-3-\sqrt{129}}{2}; 0; 7\right\}$.

10. Functia data, $f(x) = mx^2 + (2m^2 - 21)x + 6$ pentru $m \neq 0$, reprezinta un trinom patrat, ce admite minim in $x = \frac{1}{2}$, daca

$$\begin{cases} m > 0, \\ -\dfrac{2m^2 - 21}{2m} = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

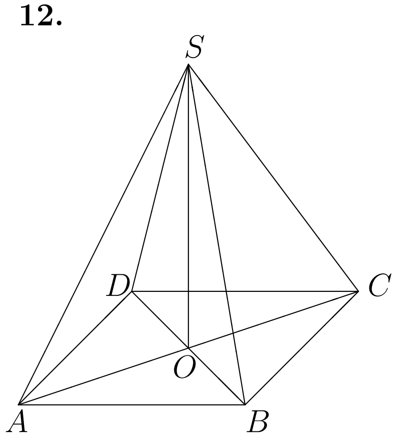
(parabola este cu ramurile in sus si varful ei se afla in $x = \frac{1}{2}$). Se rezolva sistemul si se obtine $m = 3$.

Pentru $m = 0$ functia f devine liniara si nu poate admite minim. Asadar $m = 3$.

11. Se aduna primele doua ecuatii si se obtine $3\sin x + 2\sqrt{y} = 11$. Se multiplica prima ecuatie cu 2 si se aduna cu a treia ecuatie: $5\sin x + 3\sqrt{y} = 17$. Din sistemul obtinut rezulta $\sqrt{y} = 4$ sau $y = 16$. In plus, $\sin x = 1$ sau $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. Se substituie x si y in prima ecuatie (de exemplu) si se obtine $z^2 = 9$, de unde $z = \pm 3$. Asadar:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \qquad y = 16, \qquad z = \pm 3.$$

12.



Fie SABCD - piramida patrulatera regulata cu $SB = SC = SD = SA = 5$cm, $AB = a$ (latura patratului din baza), $SO \perp AC$ ($h = SO$ - inaltimea piramidei). Atunci $AC = a\sqrt{2}$, $S_{\triangle SAC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}ah = \dfrac{1}{\sqrt{2}}ah$. $S_{ABCD} = a^2$. Conform ipotezei $a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}ah$, de unde $h = \sqrt{2}a$. Se considera triunghiul dreptunghic SOC si se obtine

$$OC^2 + SO^2 = SC^2, \quad \text{adica} \quad \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2 = 5^2$$

sau $\dfrac{a^2}{2} + 2a^2 = 25$, de unde $a^2 = 10$ si $a = \sqrt{10}$(cm).

Asadar,

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}10\sqrt{2}\sqrt{10} = \frac{20\sqrt{5}}{3}(\text{cm}^3)$$