Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, 2000
Profilurile: fizica-matematica, economie, informatica-matematica

Timp alocat: 180 minute.

1. Stabiliti carei multimi de numere ii apartine valoarea expresiei $\dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1}$. (5 puncte)

2. Fie functiile $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$; $g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $g(x)=2x-3$. Determinati $f(g(x))$. (4 puncte)

3. Determinati valorile parametrului real a pentru care ecuatia $\sqrt{3}\cos x+\sin x=a$ admite radacini. (6 puncte)

4. Determinati lungimea liniei definita de ecuatia $x^2+5x+y^2=0$. (7 puncte)

5. Rezolvati inecuatia $D(x)\geq 0$, unde

$$D(x)=\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

(8 puncte)

6. Determinati exponentul puterii la care trebuie ridicat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, folosind formula binomului, astfel incat $\dfrac{T_3}{T_4}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (8 puncte)

7. Calculati integrala

$$\int_0^1 \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx.$$

(9 puncte)

8. Centrul cercului inscris intr-un triunghi isoscel imparte inaltimea lui in segmente de lungime, respectiv de, 5 cm si 3 cm. Aflati lungimile laturilor triunghiului. (9 puncte)

9. Sa se determine pentru ce valori ale parametrului real m functia $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=e^x(m-3x-x^2)$ este monoton descrescatoare pe $\mathbf{R}$. (10 puncte)

10. Descompuneti in factori ireductibili polinomul $P(X)=X^4+13X^2+36$ peste multimea $\mathbf{C}$. (9 puncte)

11. Aria sectiunii diagonale a unei piramide patrulatere regulate este S. O muchie laterala a ei formeaza cu planul bazei piramidei un unghi de masura β. Aflati volumul piramidei. (12 puncte)

12. Determinati toate valorile parametrului real a, pentru care sistemul:

$$\begin{cases} y+\ln\dfrac{|y|}{y}=x \\ y+2(x+a)^2=x+2a+4 \end{cases}$$

admite o singura solutie. (13 puncte)

Solutii

1. Se observa ca $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4+5-2\cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ si se obtine

$$\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-2+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = 1.$$

Asadar, valoarea expresiei date este un numar natural.

Nota: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \ldots$ (a se vedea si **sesiunea 1999**).

2. Se utilizeaza definitia functiei compuse si se obtine

$$f(g(x)) = (2x-3)^2 - 3(2x-3) + 2 = 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 9 + 2 = 4x^2 - 18x + 20.$$

3. Ecuatia $a\sin x + b\cos x = c$ are solutii daca si numai daca $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ (a se vedea **Ecuatii trigonimetrice**, metoda unghiului auxiliar). Prin urmare, ecuatia data are solutii doar pentru $\left|\frac{a}{2}\right| \leq 1$, de unde $a \in [-2, 2]$.

4. Cum $x^2+5x+y^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+\frac{5}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, rezulta ca linia data este o circumferinta de raza $R = \frac{5}{2}$ cu centrul in punctul $M\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$. Se aplica formula pentru determinarea lungimii circumferintei si se obtine

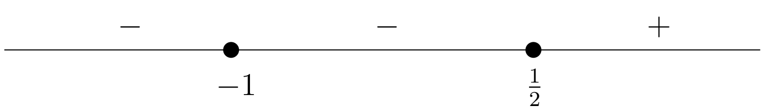
$$l = 2\pi R = 2\pi\frac{5}{2} = 5\pi(\text{un.lungime}).$$

5. Se utilizeaza proprietatile determinantilor si se obtine

$$D(x) = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = (2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & 0 & x+1 \\ x+1 & x+1 & 0 \end{vmatrix} = (2x-1)(x+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2x-1)(x+1)^2$$

Inecuatia $D(x) \geq 0$ devine $(2x-1)(x+1)^2 \geq 0$. Se rezolva utilizand metoda intervalelor



si se obtine $x \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

6. Se utilizeaza formula pentru termenul de rang k din dezvoltarea binomului lui Newton $(a+b)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (k = \overline{0, n}\ )$$

si se obtine

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{C_n^2(\sqrt{2})^{n-2}(\sqrt{3})^2}{C_n^3(\sqrt{2})^{n-3}(\sqrt{3})^3} = \frac{C_n^2}{C_n^3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

sau, tinand seama ca $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,

$$\frac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}} = \frac{3}{4},$$

de unde rezulta $n-2=4$ si $n=6$.

7. Cum integrantul reprezinta o functie rationala, il descompunem in fractii simple (tinand seama ca radacinile trinomului din numitor sunt reale si de multiplicitatea unu):

$$\frac{-7x-4}{3x^2+5x+2} = \frac{-7x-4}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(3x+2)}{(3x+2)(x+1)}.$$

Utilizand metoda coeficientilor nedeterminati se obtine $A=2$ si $B=-3$. Asadar

$$\int \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx = \int \left(\frac{2}{3x+2} - \frac{3}{x+1}\right) dx = 2\int \frac{dx}{3x+2} - 3\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x+2| - 3\ln|x+1| + C.$$

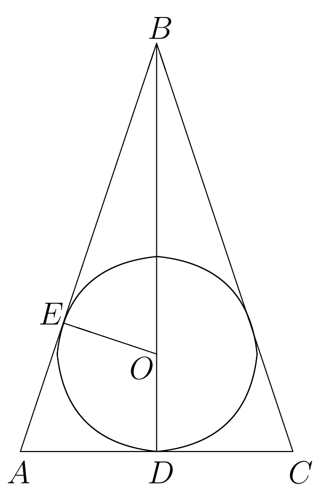
Conform formulei Newton-Leibniz

$$\int\limits_0^1 \frac{-7x-4}{3x^2+5x+2}dx = \left(\frac{3}{2}\ln|3x+2| - 3\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}(\ln 5 - \ln 2) - 3\ln 2 = \frac{2}{3}\ln 5 - \frac{11}{3}\ln 2.$$

8. Fie ABC − tringhiul isoscel ($AB = BC$), BD − inaltimea ($BD \perp AC$) $O \in BD$ − centrul cercului inscris in $\triangle ABC$, $OB = 5$cm, $OD = 3$cm, si prin urmare $BD = 8$(cm). Fie E − punctul de tangenta a laturii AB cu cercul. Atunci $OE \perp AB$ si prin urmare $\triangle BOE$ − dreptunghic. Cum $OE = OD = 3$, $BO = 5$, conform teoremei Pitagora

$$BE = \sqrt{BO^2 - OE^2} = \sqrt{25-9} = 4(\text{cm}).$$



Cum triunghiurile dreptunghice BOE si ABD sunt asemenea ($\angle B$ − comun), rezulta:

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{OE},$$

de unde

$$AB = \frac{BO \cdot BD}{BE} = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10(\text{cm}),$$
$$AD = \frac{BD \cdot OE}{BE} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6(\text{cm}).$$

Cum BD − inaltimea coborata pe baza tringhiului isoscel ABC, rezulta BD − mediana si $AC = 2AD = 12(\text{cm})$.

Asadar $AB = BC = 10\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

9. Functia $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$ este monoton descrescatoare pe X daca $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in X$. Rezulta

$$f'(x) = e^x(m - 3x - x^2) + e^x(-3 - 2x) = -e^x(x^2 + 5x - m + 3) \leq 0.$$

Cum $e^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, inecuatia devine

$$x^2 + 5x - m + 3 \geq 0.$$

Ultima inecuatie va avea solutii $x \in \mathbf{R}$ daca si numai daca discriminantul inecuatiei este nepozitiv (a se vedea **Formule, Dictionare, Trinomul patrat**).

Asadar: $25 - 4(3 - m) \leq 0$, de unde $m \leq -\frac{13}{4}$.

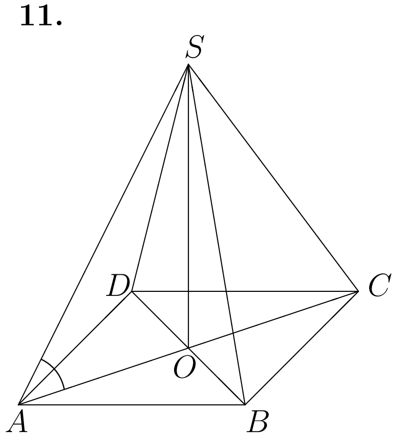
10. Se considera ecuatia bipatrata

$$x^4 + 13x^2 + 36 = 0,$$

solutiile careia (in multimea numerelor complexe) sunt $x_1 = -2i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -3i$, $x_4 = 3i$. Prin urmare

$$X^4 + 13X^2 + 6 = (X + 2i)(X - 2i)(X + 3i)(X - 3i).$$

11.



Fie $SABCD$ − piramida patrulaterala regulata ($ABCD$ − patrat), aria $\triangle SAC = S$, $\measuredangle SAC = \beta$, O − centrul patratului $ABCD$. Fie $AO = a$. Atunci $AC = 2a$; $SO = AO \cdot \operatorname{tg} \beta =$ $= a \operatorname{tg} \beta$ (din triunghiul dreptunghic SAO) si aria triunghiului SAC

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot SO = \frac{1}{2} 2a \cdot a \operatorname{tg} \beta = a^2 \operatorname{tg} \beta$$

de unde $a^2 = S\operatorname{ctg}\beta$ si $a = \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}$. Prin urmare $AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2S\operatorname{ctg}\beta$ (aria bazei piramidei), $SO = a\operatorname{tg}\beta = \sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\beta$ (inaltimea piramidei) si

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO = \frac{2}{3}S\operatorname{ctg}\beta\cdot\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}S\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta}(\text{un.cub.})$$

12. Din prima ecuatie a sistemului rezulta $y = x$ si $x > 0$ (expresia $\ln\dfrac{|y|}{y}$ este definita doar pentru $y > 0$ − a se vedea **Formule, Dictionare, Modul**). Atunci a doua ecuatie devine

$$2(x+a)^2 = 2a+4 \quad \text{sau} \quad x^2 + 2ax + a^2 - a - 2 = 0.$$

Ultima ecuatie are solutie unica daca:

$$D = 4a^2 - 4(a^2 - a - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \text{si} \quad x = 2 \quad (x > 0)$$

si o singura solutie pozitiva, daca

$$\left[\begin{array}{l} a^2 - a - 2 < 0, \\ \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0, \\ -a > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

de unde $a \in [-1; 2)$.

Asadar, $a \in \{-2\} \cup [-1, 2)$.