Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, sesiunea iunie, 1999
Profilurile: chimie-biologie, chimie-fizica
Varianta II

1. Sa se determine carei multimi de numere apartine valoarea expresiei numerice

$$\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}.$$

Solutie. Se rationalizeaza numitorii si se obtine

$$\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}=\frac{3(6+2\sqrt{6})}{36-24}+\frac{3(6-2\sqrt{6})}{36-24}=\frac{18+6\sqrt{6}+18-6\sqrt{6}}{12}=\frac{36}{12}=3.$$

Raspuns: Multimii numerelor naturale.
Nota: Se tine seama ca $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}\ldots$

2. Dati exemplu de o ecuatie de gradul doi care admite radacini reale de semne diferite.
Solutie. Fie $x_1=1,\ x_2=-2$. Se utilizeaza teorema reciproca a lui Viette, si se obtine

$$x^2+x-2=0.$$

3. Sa se rezolve ecuatia $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0$.
Solutie.

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0,\\ x^2-4=0,\end{array}\right.\\ x\geq-1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2,\ x=-2,\end{array}\right.\\ x\geq-1,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2.\end{array}\right.$$

4. Sa se determine $p,q\in\mathbf{R}$ astfel incat polinomul $3x^4-4x^3+px^2+q$ sa se divida cu $(x-1)^2$.
Solutie. Cum $x=1$ este radacina de multiplicitatea doi a polinomului $p(x)=3x^4-4x^3+px^2+q$ rezulta ca $p(x_0)=0$ si $p'(x_0)=0$. De aici se obtine sistemul

$$\left\{\begin{array}{l}p(x_0)=0,\\ p'(x_0)=0,\end{array}\right.\quad\text{sau}\quad\left\{\begin{array}{l}p+q-1=0,\\ 2p=0,\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}q=1,\\ p=0.\end{array}\right.$$

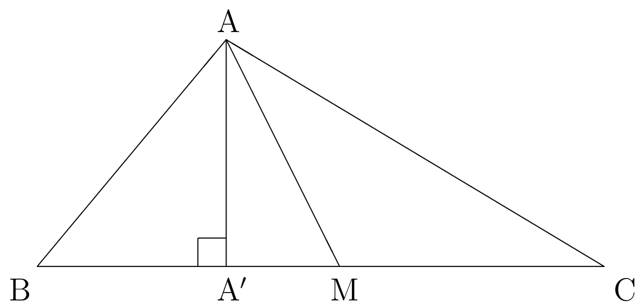
5. Fie functiile $f(x)=0,5\sqrt{x^3+1},\quad g(x)=xe^{-x}$. Demonstrati ca $f'(2)$ este radacina a ecuatiei $g'(x)$.
Solutie. Se determina $f'(x),\ f'(2)$ si $g'(x)$:

$$\begin{array}{l}f'(x)=(\frac{1}{2}\sqrt{x^3+1})'=\frac{1}{2}\left((x^3+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2;\\ f'(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{8+1}}\cdot 3\cdot 4=1;\\ g'(x)=(xe^{-x})'=x'\cdot e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(1-x).\end{array}$$

Ecuatia $g'(x) = 0$ are unica solutie $x = 1$, care coincide cu $f'(2)$.

6. Fie ABC un triunghi oarecare cu inaltimea AA' si mediana AM. Daca $AA' = 12cm$, $AM = 13cm$, $BC = 30cm$, sa se calculeze lungimile laturilor AB si AC a triunghiului.

Solutie.



Se considera triunghiul dreptunghic $AA'M$ ($AA' \perp BC$) si utilizand teorema lui Pitagora se determina $A'M$:

$$A'M = \sqrt{AM^2 - (AA')^2} = \sqrt{169 - 144} = 5(cm).$$

Cum AM mediana, rezulta $BM = MC = \frac{1}{2}BC = 15(cm)$ si $BA' = BM - A'M = 10(cm)$; $A'C = A'M + MC = 20(cm)$.

Din $\triangle AA'B$ (dreptunghic) se determina AB:

$$AB = \sqrt{(BA')^2 + (AA')^2} = \sqrt{100 + 144} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}(cm).$$

Din $\triangle AA'C$ (dreptunghic) se determina AC:

$$AC = \sqrt{(A'C)^2 + (AA')^2} = \sqrt{400 + 144} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}(cm).$$

7. Pentru ce valori ale parametrului real a, dreapta $y = -10x + a$ este tangenta la graficul functiei $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

Solutie. Dreapta $y = -10x + a$ este tangenta la parabola $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$, daca si numai daca graficele acestor functii se intersecteaza o singura data, adica ecuatia $3x^2 - 4x - 2 = -10x + a$ are o singura radacina. Prin urmare este necesar ca discriminantul ecuatiei patrate

$$3x^2 + 6x - 2 - a = 0$$

sa fie egal cu zero. Deci, se obtine ecuatia

$$36 + 4 \cdot 3(2 + a) = 0,$$

cu solutia $a = -5$.

8. Determinati aria multimii marginite de graficul functiei $f(x) = 2x - 2$ si graficul primitivei functiei $F(x)$, daca $F(0) = 1$.

Solutie. Se determina primitiva functiei $f(x) = 2x - 2$:

$$F(x) = \int (2x - 2)dx = x^2 - 2x + C.$$

Cum $F(0) = 1$, rezulta $1 = C$ si, prin urmare se cere aria figurii marginite de graficele functiilor $f(x) = 2x - 2$ si $F(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Se determina limitele de integrare rezolvand ecuatia $f(x) = F(x)$ sau

$$2(x-1) = (x-1)^2,$$

de unde $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Asadar

$$S = \int_1^3 [2x - 2 - (x^2 - 2x + 1)]dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x\right)\Big|_1^3 = \frac{4}{3}(un.arie).$$

Nota: Problema data nu e formulata corect. Formularea corecta: Determinati aria multimii marginite de graficul functiei $f(x) = 2x - 2$ si graficul functiei $F(x)$, unde $F(x)$ este primitiva functiei $f(x)$ si $F(0) = 1$.

9. Rezolvati inecuatia $\log_{|2-x|}(x^2 - x - 2) \geq \log_{|2-x|}(x+6)$.

Solutie. Inecuatia este echivalenta cu totalitatea

$$\log_{|2-x|}(x^2 - x - 2) \geq \log_{|2-x|}(x+6) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2-x| > 1, \\ x^2 - x - 2 \geq x + 6, \\ x + 6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < |2-x| < 1, \\ x^2 - x - 2 < x + 6, \\ x^2 - x - 2 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-6; -2] \cup (2; 3] \cup [4; +\infty).$$

Rezolvarea primului sistem:

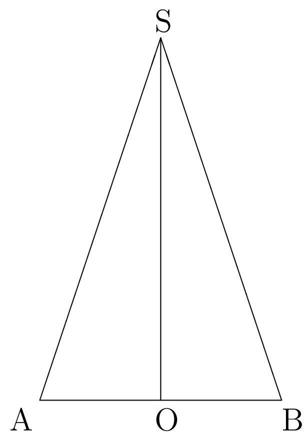
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 - x > 1, \\ 2 - x < -1, \end{array}\right. \\ x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x > -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x \leq -2, \end{array}\right. \\ x > -6, \end{cases} \Leftrightarrow\; x \in (-6; -2] \cup [4; +\infty).$$

Rezolvarea ultimului sistem al totalitatii

$$\begin{cases} -1 < 2 - x < 1, \\ x \neq 2, \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0, \\ x^2 - x - 2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ x \neq 2, \\ -2 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow\; x \in (2; 3).$$

10. Aria bazei unui con circular drept este $9\pi(cm^2)$, iar aria suprafetei totale este $24\pi(cm^2)$. Aflati volumul conului circular drept.

Solutie.



Fie $r = OB$ raza bazei conului, $l = SB$-generatoarea lui si $h = SO$-inaltimea.
Din ipoteza:

$$\begin{cases} \pi r^2 = 9\pi, \\ \pi r^2 + \pi r l = 24\pi, \end{cases}$$

de unde $r = 3cm$ si $l = 5cm$. Atunci inaltimea SO se determina din $\triangle SOB$ (dreptunghic)

$$h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25 - 9} = 4(cm).$$

Asadar

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi(cm^3).$$