Ministerul Educatiei si Stiintei
Examenul de bacalaureat la matematica, sesiunea iunie, 1999
Profilul chimie-biologie, chimie-fizica
Varianta I

1. Fie functia
$$f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{2^x}{2^{2x} - 1}.$$
Calculati $f(\log_2 3)$.

Solutie.
$$f(\log_2 3) = \frac{2^{\log_2 3}}{2^{2\log_2 3} - 1}.$$
Utilizand proprietatile logaritmului se obtine: $2^{\log_2 3} = 3$ si $2^{2\log_2 3} - 1 = (2^{\log_2 3})^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$. Astfel $f(\log_2 3) = \frac{3}{8}$.

2. Scrieti o ecuatie de gradul doi cu radacini reale, astfel incat produsul radacinilor sa fie egal cu 4.

Solutie. Fie $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Atunci $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 4 = 4$, $x_1 + x_2 = 5$ si utilizand teorema reciproca a lui Viete, se obtine ecuatia patrata
$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

3. Fie perechea de numere reale $(x; y)$ ce verifica egalitatea $x - i = yi$. Sa se determine valorile reale ale lui a pentru care aceasta pereche de numere reale verifica si egalitatea $x - i^2 = 2a - y$.

Solutie. Avem $x - i = yi \ \Leftrightarrow\ x - i(y + 1) = 0$. Se utilizeaza definitia egalitatii a doua numere complexe: $Rez_1 = Rez_2$ si $Imz_1 = Imz_2$ si se obtine sitemul:
$$\begin{cases} x = 0, \\ y + 1 = 0, \end{cases}$$
de unde $x = 0$ si $y = -1$.

Cum $i^2 = -1$,
$$x - i^2 = 2a - y \ \Leftrightarrow\ x + 1 = 2a - y,$$
sau tinand seama ca $x = 0$ si $y = -1$, obtinem
$$1 = 2a + 1,$$
de unde $a = 0$.

4. Care termen din dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ nu-l contine pe a.

Solutie. Cum $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{3} = a^{\frac{3}{4}}$, binomul se scrie $\left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{3}{4}}\right)^{17}$. Utilizand formula coeficientului binomial
$$T_{k+1} = C_{17}^k \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k} \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^k,$$

se obtine ecuatia

$$\frac{-2(17-k)}{3}+\frac{3k}{4}=0,$$

sau $-8(17-k)+9k=0$, de unde $k=8$.

Asadar

$$T_9=C_{17}^8=\frac{17!}{8!9!}=24310.$$

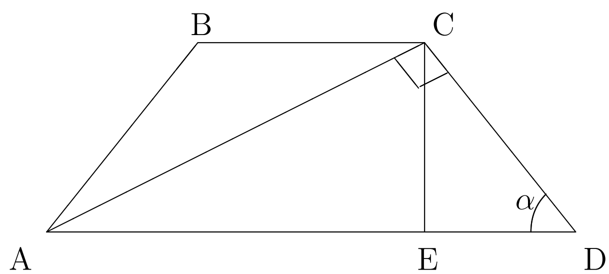
5. Pentru ce valori ale parametrului real p functia $f(x)=\cos x-px+2$ este monoton crescatoare pe $\mathbf{R}$.

Solutie. $f'(x)=(\cos x-px+2)'=-\sin x-p$. Functia f este monoton crescatoare pe $\mathbf{R}$, daca

$$-\sin x-p\geq 0 \quad \text{pentru} \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Cum $-1\leq \sin x\leq 1$ pentru $x\in\mathbf{R}$ inecuatia $\sin x\leq -p$ va avea solutiile $x\in\mathbf{R}$, daca si numai daca $-p\geq 1$ sau $p\leq -1$.

6. Un trapez isoscel are baza mica egala cu laturile neparalelele egale cu $16cm$, iar diagonala perpendiculara pe latura neparalela. Sa se afle lungimea diagonalei si aria trapezului.



Solutie. Fie $\angle CDA=\angle BCA=\alpha$ (trapez isoscel). Din $\triangle ACD$-dreptunghic ($AC\perp CD$) rezulta $\angle CAD=90^\circ-\alpha$ si $\angle CAD=\angle BCA$ (ca unghiuri alterne interne). Cum $AB=BC=16$ (ipoteza) rezulta ca triunghiul ABC este isoscel si $\angle BAC=\angle BCA=90^\circ-\alpha$.

Asadar AC - bisectoarea unghiului BAC si

$$\alpha=2(90^\circ-\alpha),$$

de unde $\alpha=60^\circ$. Din $\triangle ACD$ (dreptunghic) se obtine: $AD=2\cdot CD=2\cdot 16=32(cm)$ ($CD=16(cm)$ este cateta opusa unghiului de 30°) si $AC=CD\operatorname{tg}60^\circ=16\sqrt{3}(cm)$.

Se determina inaltimea trapezului CE:

$$CE=\frac{AC\cdot CD}{AD} \quad \text{sau} \quad CE=\frac{16\sqrt{3}\cdot 16}{32}=8\sqrt{3}(cm).$$

si aria trapezului:

$$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot CE=\frac{16+32}{2}\cdot 8\sqrt{3}=192\sqrt{3}(cm^2).$$

7. Pentru ce valori ale parametrului real a se verifica egalitatea

$$2f'''(x)+3f''(x)-8f'(x)+3f(x)=0, \quad \text{unde} \quad f(x)=e^{ax}.$$

Solutie. Se determina primele trei derivate ale functiei f:

$$f'(x) = ae^{ax}, \quad f''(x) = a^2e^{ax}, \quad f'''(x) = a^3e^{ax}$$

si se obtine ecuatia

$$2a^3e^{ax} + 3a^2e^{ax} - 8ae^{ax} + 3e^{ax} = 0,$$

sau, cum $e^{ax} \neq 0$,

$$2a^3 + 3a^2 - 8a + 3 = 0.$$

Se grupeaza convenabil,

$$(2a^3 + 6a^2) - (3a^2 + 9a) + a + 3 = 0,$$

$$2a^2(a + 3) - 3a(a + 3) + (a + 3) = 0,$$

si se obtine

$$(a + 3)(2a^2 - 3a + 1) = 0$$

sau $(a + 3)(a - 1)(2a - 1) = 0$, de unde $a = -3$, $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$.

8. Determinati primitiva functiei $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{2}{x-1}$, graficul careia trece prin punctul $A(0; 4)$.

Solutie. Utilizand proprietatile integralei nedefinite se obtine:

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \sqrt{x+1} + 2\ln|x-1| + C.$$

Se determina constanta C (se tine seama ca $F(0) = 4$)

$$\sqrt{0+1} + 2\ln|0-1| + C = 4,$$

$$\sqrt{1} + 2 \cdot \ln 1 + C = 4, \quad 1 + 2 \cdot 0 + C = 4,$$

de unde $C = 3$. Asadar $F(x) = \sqrt{x+1} + 2\ln|x-1| + 3$.

9. Rezolvati inecuatia $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$, unde a este un parametru real, $a > 0$.

Solutie.

$$\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a - x < 0, \\ 2ax - x^2 \geq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a - x \geq 0, \\ 2ax - x^2 \geq (a - x)^2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Rezolvand primul sistem al totalitatii, se obtine

$$\left\{ \begin{array}{l} a - x < 0, \\ x(2a - x) \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > a, \\ 0 \leq x \leq 2a \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (a; 2a]$$

(s-a tinut seama ca $a > 0$).

Rezolvand al doilea sistem al totalitatii, se obtine

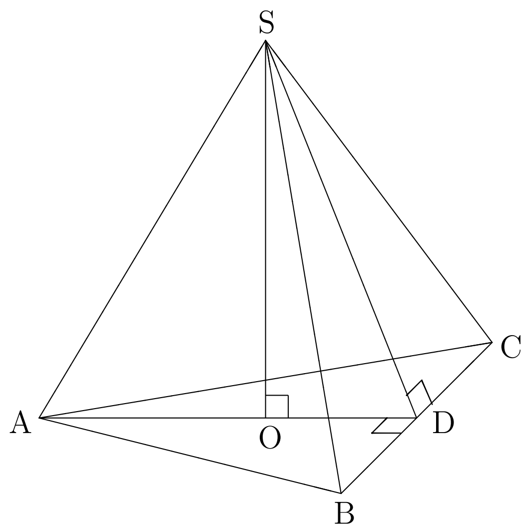
$$\left\{ \begin{array}{l} a - x \geq 0, \\ 2ax - x^2 \geq a^2 - 2ax + x^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq a, \\ 2x^2 - 4ax + a^2 \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le a, \\ a\left(a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \le x \le a\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in \left[a\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right); a\right].$$

Asadar, inecuatia data are solutiile

$$x \in \left[a\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right); 2a\right], \ a > 0.$$

10. Marimea unghiului dintre inaltimea piramidei triunghiulare regulate si apotema fetei laterale este $30°$. Aflati volumul piramidei, daca se stie ca lungimea apotemei este egala cu $12cm$.



Solutie. Fie SO inaltimea piramidei, SD-apotema ($SD \perp BC$). Atunci $AD \perp BC$ si $SO \perp AD$ (teorema celor trei perpendiculare). Din $\triangle SOD$ (dreptunghic):

$$SO = SD \cos \angle DSO = SD \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}(cm),$$

$$OD = SD \sin 30° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6(cm).$$

Cum inaltimea intr-o piramida triunghiulara regulata cade in punctul de intersectie al bisectoarelor (in acest caz si al medianelor) $OD = \dfrac{1}{3}AD \ \Rightarrow \ AD = 18$. Din $\triangle ABD$ (dreptunghic)

$$AB = \frac{AD}{\sin 60°} = \frac{36}{\sqrt{3}}(cm).$$

Atunci aria bazei piramidei

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin 60° = \frac{1}{2}\frac{36}{\sqrt{3}}\frac{36}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{36 \cdot 9}{\sqrt{3}}(cm^2)$$

si volumul piramidei

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3}\frac{36 \cdot 9}{\sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{3} = 648(cm^3).$$