Teste propuse la
a 46-Olimpiada de Matematica a Republicii Moldova
Chisinau, 10-13 martie 2002

Ziua a treia, 13 martie 2002
Barajul de selectie pentru Olimpiada Balcanica de Matematica

1. Fie sirul numerelor triunghiulare $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

a) Daca a_n este ultima cifra a numarului T_n, sa se arate ca sirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este periodic si sa se calculaze perioada lui principala.

b) Daca s_n este suma primilor n termeni ai sirului (T_n), sa se demonstreze ca pentru orice numar natural $n \geq 3$ intre nuimerele s_{n-1} si s_n exista cel putin un patrat perfect.

2. Fie multimea $A = \{1^3, 2^3, ..., 2000^3\}$. Sa se demonstreze ca exista o partitie a multimii A in 19 submultimi nevide astfel, incat suma elementelor fiecarei submultimi sa fie divizibila cu 2001^2.

3. Cercurile $C_1(O_1)$, $C_2(O_2)$ si $C_3(O_3)$ sunt tangente exterior doua cate doua, astfel ca $C_1 \cap C_2 = \{A\}$, $C_1 \cap C_3 = \{B\}$ si $C_2 \cap C_3 = \{C\}$. Punctele A_1 si B_1 sunt puncte diametral opuse arbitrare ale cercului C_1, situate in exteriorul triunghiului ABC astfel, incat $AB_1 \cap C_2 = \{M\}$, $BA_1 \cap C_3 = \{N\}$ si $AA_1 \cap BB_1 = \{P\}$. Sa se demonstreze ca punctele M, N si P sunt coliniare.

4. Fie sirul de polinoame $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $P_0(X) = X$, $P_1(X) = 4X^3 + 3X$, $P_{n+1}(X) = (4X^2+2)P_n(X) - P_{n-1}(X)$, $(\forall)n \geq 1$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ consideram multimea $A(m) = \{P_n(m) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sa se demonstreze ca multimile $A(m)$ si $A(m+4)$ nu au elemente comune.