Teste propuse la
a 46-Olimpiada de Matematica a Republicii Moldova
Chisinau, 10-13 martie 2002

Ziua a doua, 12 martie 2002
Clasa a VII-a

7.5 Volumul A reprezinta a patra parte din suma volumelor B si C, iar volumul B este a sasea parte din suma volumelor A si C. Ce parte din suma volumelor A si B reprezinta volumul C?

7.6 Sunt date cinci parcele de pamant. Numim divizare a unei parcele de pamant impartirea ei in 3 sau 4 parcele mai mici. Unele din cele 5 parcele se divid, apoi unele din toate parcelele obtinute iarasi se divid, s.a.m.d. In asa mod se continua pana cand numarul total de parcele obtinute este de 4 ori mai mare decat numarul total de divizari efectuate. Sa se afle numarul total de parcele obtinute.

7.7 In triunghiul ABC bisectoarea interioara BD, $D \in (AC)$, taie cercul circumscris triunghiului ABC in punctul E. Cercul circumscris triunghiului DEA intersecteaza dreapta AB in punctul F. Sa se demonstreze ca triunghiurile DBC si DBF sunt congruente.

7.8 Sa se demonstreze ca exista o infinitate de triplete (a, b, c) de numere intregi care verifica sirul de rapoarte egale

$$\frac{2a-b+6}{4a+c+2} = \frac{b-2c}{a-c} = \frac{2a+b+2c-2}{6a+2c-2}.$$

Clasa a VIII-a

8.5 In timpul recreatiei elevii au scris pe tabla rezolvarea unei probleme. Profesorul de matematica a intrat in clasa in momentul cand elevul de serviciu stergea tabla. El a observat doar ca aria unui dreptunghi cu lungime laturilor si diagonalelor exprimate in numere intregi era egala cu 2002. Profesorul le-a sugerat elevilor sa caute o greseala in calcule. De ce era asa de sigur profesorul?

8.6 Dintr-o totalitate finita de numere naturale consecutive s-a scos un numar astfel incat media aritmetica a numerelor ramase este egala cu 50,55. Sa se afle totalitatea initiala de numere si numarul inlaturat.

8.7 In triunghiul ABC punctele B_1 si C_1 sunt picioarele bisectoarelor interioare duse respectiv din varfurile B si C, iar punctul T este mijlocul segmentului $[AB_1]$. Dreptele BT si B_1C_1 se taie in punctul E, iar dreptele AB si CE se taie in punctul L. Sa se demonstreze ca dreptele TL si B_1C_1 sunt concurente.

8.8 Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ sa se afle valorile cea mai mare si cea mai mica ale expresiei $E = \dfrac{(1+x)^8 + 16x^4}{(1+x^2)^4}$.

Clasa a IX-a

9.5 Numerele intregi $a_1, a_2, ..., a_9$ satisfac relatia $a_{k+1} = a_k^3 + a_k^2 + a_k + 2$, $(\forall) k = 1, 2, ..., 8$. Sa se demonstreze ca printre aceste numere exista cel putin trei cu un divizor comun mai mare ca 1.

9.6 Coeficientii ecuatiei $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, satisfac inegalitatea $(a+b+c)(4a-2b+c) < 0$. Sa se demonstreze ca ecuatia data are doua solutii reale distincte.

9.7 Sa se demonstreze ca pentru orice numerele reale strict pozitive a, b, c este adevarata inegalitatea $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

9.8 Fie cercurile $C_1(O_1)$ si $C_2(O_2)$ exterioare. Tangenta comuna exterioara care nu taie segmentul (O_1O_2) este tangenta la C_1 in punctul A si la C_2 in punctul B. Daca punctul C este simetricul punctului A in raport cu O_1O_2, dreptele O_1O_2 si AC se taie in punctul P, iar dreapta BP taie cercul C_2 in punctul L, sa se demonstreze ca dreapta CL este tangenta la cercul C_2.

Clasa a X-a

10.5 Sa se determine toate tripletele de numere prime de forma $(p,\ 2p+1,\ 4p+1)$.

10.6 Numerele reale a, b, c satisfac relatiile $a \geq b \geq c > 1$. Sa se demonstreze ca este adevarata inegalitatea $\log_c \log_c b + \log_b \log_b a + \log_a \log_a c \geq 0$.

10.7 Intr-o companie sunt 16 oameni. Fiecare din ei simpatizeaza 8 oameni din companie. Sa se demonstreze ca exista cel putin doi oameni in aceasta companie care se simpatizeaza reciproc.

10.8 Triunghiul ADB_1 nu este dreptunghic in A. Pe laturile acestui triunghi sunt construite in exterior patratele $ABCD$ si $AB_1C_1D_1$ cu centrele O_1 si, respectiv, O_2. Sa se demonstreze ca cercurile cercumscrise triunghiurilor BAB_1, DAD_1 si O_1AO_2 mai au un punct comun, diferit de punctul A.

Clasa a XI-a

11.5 Sa se rezolve in $\mathbb{R}$ ecuatia $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

11.6 Exista oare o partitie a unui patrat cu lungimea laturii de 1024 m in 31 de patrate? Exista oare o partitie a unui patrat cu lungimea laturii de 1023 m in 30 de patrate astfel incat unul din patrate sa aiba lungimea laturii cel mult egala cu 1 m?

11.7 Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ si $a \neq b$. Sa se demonstreze inegalitatile $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$.

11.8 In tetraedrul $ABCD$ raza sferei circumscrise este egala cu R, iar m_a, m_b, m_c si m_d sunt lungimile segmentelor ce unesc varfurile A, B, C si, respectiv, D cu centrele de greutate ale fetelor opuse. Sa se demonstreze ca $m_a + m_b + m_c + m_d \leq \frac{16R}{3}$. Cand are loc egalitatea?

Clasa a XII-a

12.5 Numerele reale a, b, c satisfac relatiile $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$. Sa se demonstreze inegalitatea $(a-b)(a^2-9) + (a-c)(b^2-9) + (b-c)(c^2-9) \leq 36$.

12.6 Fie A, B si C puncte distincte coliniare si cercul $C_1(A, r)$. Daca M si N sunt puncte diametral opuse arbitrare ale cercului C_1, sa se determine locul geometric al punctelor de intersectie a dreptelor BM si CN.

12.7 Fie elipsa $E : x^2 + 9y^2 = 18$. Pentru orice punct (x, y) al elipsei E sa se determine cea mai mare valoare numerica posibila a expresiei $x^2 + 3xy + 9y^2 + x + 3y$.

12.8 Fie sirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \sin^3 \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \sin^3 \frac{\pi}{3^2} + ... + 3^{n-1} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{3^n}$. Sa se demonstreze ca sirul (a_n) este convergent si sa se calculeze limita lui.