Inegalitati

In acest compartiment vor fi prezentate diverse metode de demonstrare a inegalitatilor, utilizand metodele propuse vor fi demonstrate atat inegalitati clasice precum si inegalitati propuse la diferite concursuri de matematica.

I. Monotonia functiilor

Se presupune ca cititorul este familiarizat cu notiunea de monotonie a functiilor si proprietatile (criteriile) functiilor monotone.

Problema 1. Sa se compare numerele e^π si π^e.
Solutie. Se considera functia

$$f : [e; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Deoarece derivata functiei f,

$$f'(x) = \frac{x(\ln x)' - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

obtine valori negative pentru orice $x \in (e; +\infty)$ si f este continua pe $[e; +\infty)$ rezulta ca functia f este strict descrescatoare pe $[e; +\infty)$. Prin urmare, cum $e < \pi$ se obtine

$$f(e) > f(\pi) \;\Rightarrow\; \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \;\Rightarrow\; \pi \ln e > e \ln \pi$$

si deci $e^\pi > \pi^e$.

Problema 2. Sa se studieze marginirea sirului numeric

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

Solutie. Initial vom demonstra inegalitatea

$$\ln(1 + x) \leq x \quad (x \geq 0). \tag{1}$$

In acest scop, consideram functia

$$f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(x) = x - \ln(1 + x).$$

Functia f este continue pe domeniul de definitie, si pentru orice $x \in (0; +\infty)$ are loc egalitatea

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x},$$

de unde conchidem ca $f'(x) > 0 \quad (x \in (0;+\infty))$. Prin urmare functia f este o functie strict crescatoare pe domeniul de definitie $D(f)$, si deci $f(x) \geq f(0) \quad (\forall x \geq 0)$, de unde si rezulta inegalitatea (1).

In inegalitatea (1) se considera $x = \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$ si se obtine

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sau

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Din inegalitatile (2) deducem

$$\begin{aligned} &\ln 2 - \ln 1 \leq 1, \\ &\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}, \\ &\ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}, \\ &\ldots\ldots \\ &\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Se sumeaza parte cu parte a inegalitatile (3) si se obtine inegalitatea

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, din ultima inegalitate rezulta ca sirul numeric $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ este nemarginit.

Consecinta: Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este o serie divergenta.

Problema 3. (inegalitatea J.Bernoulli) Pentru orice $x > -1;\ \alpha > 1$ are loc inegalitatea

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \tag{4}$$

In plus, egalitatea are loc numai pentru $x = 0$.

Solutie. Consideram functia

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x, \quad (x \in [-1;+\infty)),$$

unde $\alpha > 1$ si α fixat in continuare.

Calculam derivata acestei functii:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1) \quad (x > -1).$$

Deoarece $\alpha > 1$, rezulta ca $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-1; 0)$ si $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0; +\infty)$ si prin urmare functia f este descrescatoare pe $[-1; 0]$ si crescatoare pe $[0; +\infty)$.

De aici, conchidem ca pentru orice $x \in [-1; +\infty) \setminus \{0\}$ are loc inegalitatea $f(x) > f(0)$, adica

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x > 1 - 1$$

sau

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x \qquad (x \in [-1; 0) \cup (0; +\infty),\ \alpha > 1).$$

Ramane de observat ca pentru $x = 0$ se obtine $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$.

Nota. Similar se demonstreaza si inegalitatile

$$(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x \qquad (x \ge -1;\ 0 < \alpha < 1),$$

$$(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x \qquad (x \ge -1;\ \alpha < 0).$$

Problema 4. (inegalitatea W.Young) Daca $p,\ q \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ poseda proprietatea $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; $a,\ b$ sunt numere pozitive, atunci sunt adevarate inegalitatile

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (\text{pentru } p > 1) \tag{5}$$

si

$$ab \ge \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (\text{pentru } p < 1) \tag{6}$$

Mai mult, egalitate se atinge daca si numai daca $a^p = b^q$.

Solutie. Consideram cazul $p > 1$. Fixam un numar pozitiv a $(a > 0)$ si examinam functia

$$f : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(b) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

Derivata acestei functii este

$$f'(b) = b^{q-1} - a,$$

si prin calcule elementare se determina ca punctul $b = a^{\frac{1}{q-1}}$ este un punct de minim local. Astfel

$$f(b) \ge f(a^{\frac{1}{q-1}}) \qquad (b > 0). \tag{7}$$

Din inegalitatea (7) tinand seama ca $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se obtine

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \ge 0 \qquad (a > 0,\ b > 0;\ p > 1;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

si deci inegalitatea (5) este demonstrata. Mai mult, din (7) rezulta ca egalitatea are loc numai in cazul in care $b = a^{\frac{1}{q-1}}$, adica daca $a^p = b^q$.

Inegalitatea (6) se demonstreaza in mod similar.

Problema 5. Sa se demonstreze inegalitatea

$$|\sin x| \leq |x| \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{8}$$

Solutie. Tinand seama ca functiile $f(x) = |\sin x|$ si $g(x) = |x|$ sunt functii pare, este suficient de demonstrat egalitatea (8) pentru $x \geq 0$. In plus, cum $|\sin x| \leq 1$, este suficient de studiat cazul $0 \leq x \leq 1$.

In acest scop, consideram functia

$$f : [0; 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x - \sin x.$$

Derivata functiei f are forma

$$f'(x) = 1 - \cos x \qquad (x \in [0; 1]).$$

In baza marginirii functiei cosinus ($|\cos x| \leq 1;\ x \in \mathbf{R}$), deducem ca $f'(x) \geq 0$, care la randul sau implica ca functia f este monoton crescatoare pe domeniul sau de definitie, si deci are loc inegalitatea

$$f(x) \geq f(0) \quad (x \in [0; 1]),$$

sau

$$x - \sin x \geq 0, \quad (x \in [0; 1])$$

de unde rezulta inegalitatea initiala.

Problema 6. Sa se arate ca

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) > 0,$$

daca $a > b > c$.

Solutie. Examinam functia $f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ de forma

$$f(t) = (b + t)^2(b - c) + b^2(c - (b + t)) + c^2((b + t) - b),$$

unde $a,\ b,\ c$ sunt parametri reali ce verifica inegalitatea $a > b > c$. Similar problemelor precedente, se demonstreaza ca functia f este strict crescatoare pe $[0; +\infty)$, si deci are loc inegalitatea $f(a - b) > f(0)$. Ultima inegalitate este echivalenta cu inegalitatea din enunt.

II. Convexitatea

Definitie: Functia $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ ($\mathbf{I}$ un interval al axei reale) se numeste convexa pe $\mathbf{I}$ daca pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ si orice $\lambda_1 \lambda_2$ cu proprietatea $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0$, si $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, are loc inegalitatea

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{9}$$

In cazul in care pentru orice $x_1 \neq x_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ semnul inegalitatii (9) este strict vom spune ca functia f este strict convexa pe $\mathbf{I}$.

Similar se defineste si notiunea de functie concava (strict concava), schimband semnul inegalitatii in (9).

Inegalitatea J. Jensen. Fie functia $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ convexa pe $\mathbf{I}$. Atunci pentru orice $x_j \in \mathbf{I}$ $(j = 1, \ldots, n)$ si orice $\lambda_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$; $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ are loc inegalitatea $f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$.

Criteriu de convexitate

Fie $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$, f continue pe $\mathbf{I}$ si poseda derivata de ordinul doi pe $int(\mathbf{I})$, unde $int(\mathbf{I})$ este interiorul intervalului $\mathbf{I}$, adica $int(\mathbf{I}) = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists \varepsilon > 0 (x-\varepsilon, x+\varepsilon \subset \mathbf{I})\}$. Functia f este convexa pe $\mathbf{I}$ daca si numai daca $f''(x) \geq 0$ $(x \in int(\mathbf{I}))$. Mai mult daca $f''(x) > 0$ $(x \in int(\mathbf{I}))$ atunci functia f este strict convexa pe $\mathbf{I}$.

Nota. Afirmatiile similare cu inegalitatea Jensen si criteriul anterior sunt adevarate si pentru functiile concave (convexe in jos).

Problema 7. (Inegalitatea Cauchy despre medii). Pentru orice numere nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este adevarata inegalitatea

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{10}$$

Altfel, media geometrica nu intrece media aritmetica.

Solutie. Daca unul dintre numerele a_j este 0 ($a_j = 0$ pentru un $j \in \{1, \ldots, n\}$), atunci inegalitatea (10) este evidenta.

Fie $a_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Consideram functia $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$. Cum $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ rezulta ca functia f este concava pe multimea $(0; +\infty)$. In baza inegalitatii Jensen deducem

$$\ln\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} a_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \ln a_j,$$

care implica inegalitatea (10).

Problema 8. Fie $x_1, \ldots, x_n$ numere nenegative. Sa se arate ca functia

$$f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(\alpha) = \left(\frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

este monoton crescatoare.

Solutie. Fie $0 < \alpha < \beta$. Consideram functia $h(x) = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ $(x \geq 0)$. Deoarece $h''(x) = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1\right) x^{\frac{\beta}{\alpha}-2} > 0$ $(x > 0)$, rezulta ca h este convexa pe $[0; +\infty)$. Conform inegalitatii Jensen conchidem

$$h\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} x_j^\alpha\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} h(x_j^\alpha)$$

sau

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} x_j^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} x_j^{\beta},$$

de unde rezulta

$$f(\alpha) \leq f(\beta).$$

Problema 9. Sa se arate ca

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

unde α, β, γ sunt unghiurile interioare a unui triunghi.

Solutie. Consideram functia $f : [0;\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$; $f(x) = \sin x$. Cum $f''(x) = -\sin x$ si $f''(x) < 0$ pentru $x \in (0;\pi)$, rezulta ca f este o functie concava pe $[0;\pi]$. In baza inegalitatii Jensen se obtine

$$f\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3}\right) \geq \frac{1}{3} f(\alpha) + \frac{1}{3} f(\beta) + \frac{1}{3} f(\gamma),$$

sau

$$\sin\frac{\pi}{3} \geq \frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

adica

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 10. Sa se arate ca pentru orice numere pozitive a_j, b_j $(j = 1, \ldots, n)$ are loc inegalitatea

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}\right)^{b_1 + \ldots + b_n} \geq \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1} \ldots \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}.$$

Solutie. Consideram functia $f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$. Aceasta functie este concava (a se vedea Problema 7) si in baza inegalitatii Jensen

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{b_1 + \ldots + b_n} \cdot \frac{a_j}{b_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{b_1 + \ldots + b_n} f\left(\frac{a_j}{b_j}\right),$$

sau

$$(b_1 + \ldots + b_n) \ln \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \ln \frac{a_j}{b_j},$$

si deci

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}\right)^{b_1 + \ldots + b_n} \geq \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}.$$

Problema 11. (Inegalitatea Göughens) Sa se demonstreze ca este adevarata inegalitatea

$$(1+a_1)\dots(1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1\dots a_n})^n$$

unde $a_j \geq 0$ $(j=1,\dots,n)$.

Solutie. Fie $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\ln(1+e^x)$. Sa cercetam convexitatea acestei functii. In acest scop, calculam a doua derivata a functiei f: $f''(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\quad (x\in\mathbf{R})$. Cum $f''(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, aplicand inegalitatea Jensen, obtinem

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f(\ln a_j) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1+e^{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j}\right) \leq \textstyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+a_j) \quad \Leftrightarrow$$

$$n\ln\left(1+\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\right) \leq \ln((1+a_1)\dots(1+a_n)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(1+a_1)\dots(1+a_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\right)^n.$$

III. Ordonarea

Afirmatia 1. Fie date doua cortegii de cate n numere, astfel incat

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n.$$

Desemnam prin σ o suma de forma

$$\sigma = a_1 b_{i_1} + \dots + a_n b_{i_n},$$

unde $(i_1,\dots,i_n)$ este o permutare a numerelor $1,2,\dots,n$. Atunci

$$S=\max\sigma = a_1b_1+\dots+a_nb_n,$$

$$s=\min\sigma = a_1b_n+\dots+a_nb_1.$$

Problema 12. Sa se arate ca

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$

daca a,b,c sunt numere pozitive.

Solutie. Deoarece inegalitatea este simetrica, fara restrictia generalitatii vom presupune ca $a\geq b\geq c$. Atunci

$$\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}.$$

Prin urmare

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

si

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Sumand parte cu parte ultimele doua inegalitati se obtine

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 3.$$

Problema 13. Sa se arate ca pentru orice numere pozitive a, b, c, cu proprietatea $a\cdot b\cdot c=1$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Solutie. Similar Problemei 12 vom presupune $a\geq b\geq c$. Atunci,

$$\frac{1}{c}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{ac+bc}\geq\frac{1}{ab+bc}\geq\frac{1}{ab+ac}.$$

Prin urmare

$$\frac{1}{c(ac+bc)}\geq\frac{1}{b(ab+bc)}\geq\frac{1}{a(ab+ac)},$$

si cum $ab\geq ac\geq bc$, in baza Afirmatiei 1 se obtine

$$\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\geq\frac{ac}{c(ac+bc)}+\frac{bc}{b(ab+bc)}+\frac{ab}{a(ab+ac)}$$

sau

$$\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\geq\frac{bc}{c(ac+bc)}+\frac{ab}{b(ab+bc)}+\frac{ac}{a(ab+ac)}.$$

Sumand parte cu parte ultimele doua inegalitati deducem

$$2\left(\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\right)\geq\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}. \tag{11}$$

Conform inegalitatii Cauchy despre medii (a se vedea Problema 7) avem

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=3. \tag{12}$$

Astfel, din (11) si (12) tinand seama ca $a\cdot b\cdot c=1$, rezulta inegalitatea

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\geq\frac{3}{2}.$$

Problema 14. Fie a, b, c numere pozitive. Sa se demonstreze ca

$$\left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

Solutie. Fara restrictia generalitatii presupunem ca $a \geq b \geq c$. Atunci $\ln a \geq \ln b \geq \ln c$. Prin urmare, conform Afirmatiei 1,

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq b \ln a + c \ln b + a \ln c$$

si

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq c \ln a + a \ln b + b \ln c.$$

Sumam parte cu parte, inegalitatile si obtinem

$$2(a \ln a + b \ln b + c \ln c) \geq (b + c) \ln a + (c + a) \ln a + (c + a) \ln b + (a + b) \ln c$$

sau, echivalent,

$$\ln \left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq \ln \left(a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}\right),$$

de unde rezulta

$$\left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

Problema 15. Sa se arate ca pentru orice numere pozitive a, b, c este adevarata inegalitatea

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$$

Solutie. Fie $a \geq b \geq c$. Atunci

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \quad \text{si} \quad \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$$

in baza Afirmatiei 1 conchidem,

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b}.$$

Ultima inegalitate este echivalenta cu cea din enunt.

Problema 16. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{N}$. Sa se arate ca pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Solutie. Fie $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_n}$, unde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$. Cum

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)^2} < \ldots < \frac{1}{1^2},$$

rezulta

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k_2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{i_k}}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

IV. Inegalitati clasice si aplicatii

Problema 17. (Inegalitatea Hölder) Sa se arate ca pentru orice numere pozitive p, q cu proprietatea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si orice numere reale $a_j,\ b_j \quad (j = 1, \ldots, n)$ are loc inegalitatea

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Solutie. Presupunem ca $\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \neq 0$ si $\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \neq 0$ (in caz contrar inegalitatea (13) este evidenta). Din inegalitatea Young (a se vedea Problema 5), se obtine

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|b_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|a_j|^p}{p \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \frac{|b_j|^q}{q \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de unde nemijlocit rezulta inegalitatea (13).

Problema 18. Sa se arate ca sirul

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

este crescator.

Solutie. Conform inegalitatii Cauchy despre medii (a se vedea Problema 7) au loc inegalitatile

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n\ -\text{ori}} \cdot 1} \leq \frac{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n\ -\text{ori}} + 1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},$$

de unde rezulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adica $x_n \leq x_{n+1}$.

Problema 19. Sa se demonstreze ca

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n, \tag{14}$$

pentru orice $x_k \in \mathbf{R};\ x_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Solutie. Inegalitatea (14) rezulta imediat din inegalitatea Cauchy:

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_1}} = 1$$

Problema 20. Sa se arate ca pentru orice numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are loc inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Solutie. Conform inegalitatii Cauchy-Buneacovski (cazul particular al inegalitatii Hölder, $p = q = 2$) obtinem

$$n^2 = \left(\sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \leq \left((\sqrt{a_1})^2 + \ldots + (\sqrt{a_n})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right).$$

Problema 21. Sa se arate ca

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2},$$

unde $a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Solutie. Conform inegalitatii Cauchy-Buneacovski (inegalitatea Hölder in cazul $p = q = 2$) deducem

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2 + a_3}} \cdot \sqrt{a_1(a_2 + a_3)} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n}{a_1 + a_2}} \cdot \sqrt{a_n(a_1 + a_2)}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right)(a_1(a_2 + a_3) + \ldots + a_n(a_1 + a_2)) \leq$$

$$\leq \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2)\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}(a_{n-1}^2 + a_n^2) + \frac{1}{2}(a_n^2 + a_1^2)\right) + \left(\frac{1}{2}(a_n^2 + a_1^2) + \frac{1}{2}(a_n^2 + a_2^2)\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right)(2a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + 2a_n^2).$$

Problema 22. Sa se arate ca pentru orice numere pozitive a_j, b_j $(j = 1, \ldots, n)$ are loc inegalitatea

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)}.$$

Solutie. In baza inegalitatii Göughens obtinem

$$\left(1 + \frac{a_1}{b_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \left(1 + \sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1} \ldots \frac{a_n}{b_n}}\right)^n,$$

sau

$$(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n) \geq \left(\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n}\right)^n,$$

de unde rezulta ca

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)}.$$

Exercitii pentru autoevaluare

1. Sa se demonstreze inegalitatea

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

2. Sa se compare numerele

$$a)\ \frac{\ln 1998}{\ln 1999} \ \text{ si } \ \frac{\ln 1999}{\ln 2000},$$

$$b)\ \cos(\sin 2000) \ \text{ si } \ \sin(\cos 2000).$$

3. Sa se arate ca pentru $x > 0$ are loc inegalitatea

$$1 + 2 \ln x \leq x^2.$$

4. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere pozitive. Sa se demonstreze ca functia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

este monoton crescatoare. Mai mult, functia f este strict crescatoare daca si numai daca $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5. Sa se demonstreze inegalitatea
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$
unde α, β, γ sunt unghiurile interioare ale unui triunghi.

6. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale cu proprietatile $a_k \in (0; \frac{1}{2})$ $(k = 1, \ldots, n)$ si $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Sa se arate ca
$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

7. Sa se demonstreze inegalitatile
$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab},$$
unde a, b, c sunt numere pozitive.

8. (Inegalitatea Cebasev) Daca $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n;\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$, atunci
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n).$$

9. Daca $1 < a \leq b \leq c$, atunci
$$\frac{a}{\ln a} + \frac{b}{\ln b} + \frac{c}{\ln c} \leq \frac{1}{3}(a + b + c)\left(\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln c}\right) \leq \frac{a}{\ln c} + \frac{b}{\ln b} + \frac{c}{\ln a}.$$

10. Sa se arate ca
$$\sqrt[n]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[n]{2 + \sqrt{3}} \geq 2 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

11. Sa se arate ca pentru orice numere nenegative a, b, c are loc inegalitatea
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

12. Sa se arate ca pentru orice numere reale $x_1, \ldots, x_n$ are loc inegalitatea
$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

13. Sa se demonstreze ca sirul
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
este monoton descrescator.

14. Sa se arate ca
$$n! < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

15. Sa se demonstreze ca pentru orice numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are loc inegalitatea
$$\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_2 + a_3}{a_4}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_{n-1} + a_n}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_n + a_1}{a_2}} \geq n\sqrt{2}.$$