Principiul Inductiei Matematice.

Principiul inductiei matematice constituie un mijloc important de demonstratie in matematica a propozitiilor (afirmatiilor) ce depind de argument natural.

Metoda inductiei matematice consta in urmatoarele:

O propozitie (afirmatie) oarecare $P(n)$, ce depinde de un numar natural n, este adevarata pentru orice n natural, daca:

1. $P(1)$ este o propozitie (afirmatie) adevarata;
2. $P(n)$ ramane o propozitie (afirmatie) adevarata, cand n se majoreaza cu o unitate, adica $P(n+1)$ este adevarata.

Asadar, metoda inductiei presupune doua etape:

1. Etapa de verificare: se verifica daca propozitia $P(1)$ este adevarata;
2. Etapa de demonstrare: se presupune ca propozitia $P(n)$ este adevarata si se demonstreaza justetea afirmatiei $P(n+1)$ (n a fost majorat cu o unutate).

Nota 1. In unele cazuri metoda inductiei matematice se utilizeaza in urmatoarea forma:
Fie m un numar natural, $m > 1$ si $P(n)$ o propozitie ce depinde de n, $n \geq m$.
Daca

1. $P(m)$ este adevarata;
2. $P(n)$ fiind o propozitie justa implica $P(n+1)$ adevarata pentru $n \geq m$,
   atunci $P(n)$ este o propozitie adevarata pentru orice numar natural $n \geq m$.

In continuare sa ilustram metoda inductiei matematice prin exemple.
Exemplul 1. Sa se demonstreze urmatoarele egalitati

$a)$ $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

$b)$ $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$,

$c)$ $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$d)$ $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$,

$e)$ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

$f)$ $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$,

$g)$ formula binomului Newton:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^3a^{n-3}b^3+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n, \quad a,b\in\mathbf{R},$$

unde $n\in\mathbf{N}$.

Rezolvare. a) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, 1=1, prin urmare $P(1)$ este adevarata. Presupunem ca egalitatea din enunt este adevarata, adica are loc egalitatea

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

si urmeaza sa verificam daca $P(n+1)$, adica

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

este justa. Cum (se tine seama de egalitatea din enunt)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

se obtine

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

adica $P(n+1)$ este afirmatie justa.

Asadar, conform principiului inductiei matematice egalitatea din enunt este justa pentru orice n natural.

Nota 2. Mentionam ca acest exemplu poate fi rezolvat si fara utilizarea inductiei matematice. Intr-adevar, suma $1+2+3+\ldots+n$ reprezinta suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice cu primul termen $a_1 = 1$ si ratia $d = 1$. In baza formulei cunoscute $\left(S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\right)$ se obtine

$$S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

b) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$ sau 1=1, astfel $P(1)$ este justa. Presupunem justa egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

si urmeaza sa verificam daca are loc $P(n+1)$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

sau

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Se tine seama de egalitatea din enunt si se obtine

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Asadar $P(n+1)$ este adevarata si, prin urmare, egalitatea din enunt este adevarata.

Nota 3. Similar exemplului precedent, se rezolva si fara a aplica metoda inductiei matematice.

c) Pentru $n=1$ egalitatea este justa $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, 1=1. Se presupune justa egalitatea

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

si se arata ca

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

adica $P(n)$ adevarata implica $P(n+1)$ adevarata. In adevar

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$
$$=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]=\frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6),$$

si cum $2n^2+7n+6=(2n+3)(n+2)$ se obtine

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

si, prin urmare, egalitatea este adevarata.

d) Pentru $n=1$ egalitatea este justa: $1^3=\left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2$, 1=1. Se presupune ca are loc egalitatea

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

si se arata ca are loc egalitatea

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

In adevar, tinand seama de ipoteza

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

e) Propozitia $P(1)$ este justa $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$, 2=2. Se presupune ca egalitatea

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

este adevarata si se arata ca ea implica egalitatea

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

In adevar

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$
$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Asadar, egalitatea enuntata este justa pentru orice n natural.

f) $P(1)$ este adevarata: $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Se presupune ca are loc $P(n)$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

si se arata ca aceasta egalitate implica egalitatea

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

In adevar, tinand seama de justetea afirmatiei $P(n)$, se obtine

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Prin urmare, egalitatea este demonstrata.

g) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $a + b = b + a$, si deci este adevarata.

Fie formula binomului Newton este justa pentru $n = k$, adica

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + b^k.$$

Atunci

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = (a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + b^k)(a+b) =$$
$$= a^{k+1} + (1 + C_k^1) a^k b + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + \ldots + (C_k^s + C_k^{s+1}) a^{k-s} b^s + \ldots + b^{k+1}.$$

Tinand seama de egalitatea $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, se obtine

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+2}^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_{k+1}^{s+1} a^{k-s} b^{s+1} + \ldots + b^{k+1}.$$

Exemplul 2. Sa se demonstreze inegalitatile

a) inegalitatea Bernuolli: $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha,\ \alpha > -1, \quad n \in \mathbf{N}$.

b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$, daca $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ si $x_i > 0,\ i = \overline{1,n}$.

c) inegalitatea Cauchy relativa la media aritmetica si geometrica
$\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, unde $x_i > 0,\ i = \overline{1,n},\ n \geq 2$.

d) $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1, \quad n \in \mathbf{N}$.

e) $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < \dfrac{5n-2}{2n}, \quad n \in \mathbf{N}$.

f) $2^n > n^3, \quad n \in \mathbf{N},\ n \geq 10$.

Rezolvare. a) Pentru $n = 1$ inegalitatea este adevarata

$$1 + \alpha \geq 1 + \alpha.$$

Se presupune ca are loc inegalitatea enuntata

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \tag{1}$$

si se arata, ca in asa ipoteza are loc si

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

In adevar, cum $\alpha > -1$ implica $\alpha + 1 > 0$, multiplicand ambii membri ai inegalitatii (1) cu $(\alpha + 1)$ se obtine

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha)$$

sau

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2$$

Cum $n\alpha^2 \geq 0$, rezulta

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

Asadar $P(n)$ adevarata implica $P(n+1)$ adevarata, prin urmare, conform principiului inductiei matematice inegalitatea Bernoulli este adevarata.

b) Pentru $n = 1$, se obtine $x_1 = 1$, si, prin urmare $x_1 \geq 1$, adica $P(1)$ este o afirmatie justa. Se presupune ca $P(n)$ este adevarata, adica, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n numere pozitive, produsul carora este egal cu unu, $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, si $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

Sa aratam, ca aceasta ipoteza implica justetea urmatoarei afirmatii: daca $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ sunt $(n+1)$ numere pozitive cu $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$ atunci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n+1$.

Se disting urmatoarele doua cazuri:

1) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = 1$ si atunci suma lor este $(n+1)$, inegalitatea fiind justa,

2) cel putin un numar este diferit de unu, fie mai mare ca unu. Atunci, dat fiind $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$, rezulta ca exista cel putin inca un numar diferit de unu, mai exact, mai mic ca unu. Fie $x_{n+1} > 1$ si $x_n < 1$. Consideram n numere pozitive

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, (x_n \cdot x_{n+1}).$$

Produsul lor este egal cu unu, iar conform ipotezei

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

Ultima inegalitate se scrie astfel

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1}$$

sau

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1}.$$

Cum

$$\begin{aligned} n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} &= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - 1 + x_n = \\ &= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - (1 - x_n) = n + 1 + (1 - x_n)(x_{n+1} - 1) \geq n + 1 \end{aligned}$$

deoarece

$$(1 - x_n)(x_{n+1} - 1) > 0,$$

rezulta

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1,$$

adica $P(n)$ adevarata implica $P(n+1)$ adevarata. Inegalitatea este demonstrata.

Nota 4. Se observa, ca semnul egalitatii are loc daca si numai daca $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

c) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere pozitive arbitrare. Se considera n numere

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \quad \ldots \quad , \quad \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

Cum aceste numere sunt pozitive si produsul lor este egal cu unu

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \frac{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1$$

conform inegalitatii b) demonstrate anterior rezulta

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n$$

de unde rezulta

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Nota 5. Semnul egalitatii are loc daca si numai daca $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

d) $P(1)$ este o afirmatie justa: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Se presupune ca $P(n)$ este o afirmatie adevarata:

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1$$

si se arata ca $P(n+1)$ are loc. In adevar

$$\sin^{2(n+1)}\alpha + \cos^{2(n+1)}\alpha = \sin^{2n}\alpha\cdot\sin^2\alpha + \cos^{2n}\alpha\cdot\cos^2\alpha < \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \le 1$$

(se tine seama ca daca $\sin^2\alpha \le 1$ atunci $\cos^2\alpha < 1$ si reciproc daca $\cos^2\alpha \le 1$ atunci $\sin^2\alpha < 1$). Asadar, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n} \le 1$ si semnul egalitatii se atinge doar pentru $n = 1$.

e) Pentru $n = 1$ afirmatia este justa: $\frac{1}{1!} < \frac{5-2}{2\cdot 1}$, $\quad 1 < \frac{3}{2}$.

Se presupune ca $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$, si urmeaza de a demonstra ca

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

Cum

$$(n+1)! > n(n+1) \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n(n+1)} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{2}{2n(n+1)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{(5n+3)\cdot n - (5n-2)(n+1)}{2(n+1)n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)} - \frac{5n-2}{2n} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)},$$

se tine seama de $P(n)$ si se obtine

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

f) Se tine seama de nota 1 si se verifica $P(10) : 2^{10} > 10^3$, $1024 > 1000$, asadar pentru $n = 10$ inegalitatea este justa. Se presupune ca $2^n > n^3 \quad (n > 10)$ si trebuie de demonstrat $P(n+1)$, adica $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Cum pentru $n > 10$ avem $2 > \left(\frac{1}{n}\right)^3$ sau $2 > 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ rezulta

$$2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \;\text{ sau }\; n^3 > 3n^2 + 3n + 1.$$

Se tine seama de ipoteza $(2^n > n^3)$ si se obtine

$$2^{n+1} = 2^n\cdot 2 = 2^n + 2^n > n^3 + n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Asadar conform principiului inductiei pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $\quad n \geq 10$ avem $2^n > n^3$.

Exemplul 3. Sa se demonstreze ca pentru orice $n \in \mathbf{N}$

$$a)\ n(2n^2 - 3n + 1) \text{ se divide cu } 6,$$
$$b)\ 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} \text{ se divide cu } 11.$$

Rezolvare. a) $P(1)$ este o propozitie adevarata (0 se divide cu 6). Fie $P(n)$ are loc, adica $n(2n^2 - 3n + 1) = n(n-1)(2n-1)$ se divide cu 6. Se arata, ca are loc $P(n+1)$ adica $(n+1)n(2n+1)$ se divide cu 6. In adevar, cum

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(2n+1) = n(n-1+2)(2n-1+2) = (n(n-1)+2n)(2n-1+2) = \\
&= n(n-1)(2n-1) + 2n(n-1) + 2n(2n+1) = n(n-1)(2n-1) + 2n \cdot 3n = \\
&= n(n-1)(2n-1) + 6n^2
\end{aligned}$$

si cum atat $n(n-1)(2n-1)$ cat si $6n^2$ se divid cu 6, rezulta ca si suma lor, adica $n(n+1)(2n+1)$ se divide cu 6.

Asadar $P(n+1)$ este o afirmatie justa, si $n(2n^2 - 3n + 1)$ se divide cu 6 pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

b) Se verifica $P(1)$: $6^0 + 3^2 + 3^0 = 11$, prin urmare $P(1)$ este justa. Urmeaza sa se arate, ca daca $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ se divide cu 11 ($P(n)$), atunci $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ de asemenea se divide cu 11 ($P(n+1)$). In adevar, cum

$$6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 6^{2n-2+2} + 3^{n+1+1} + 3^{n-1+1} =$$

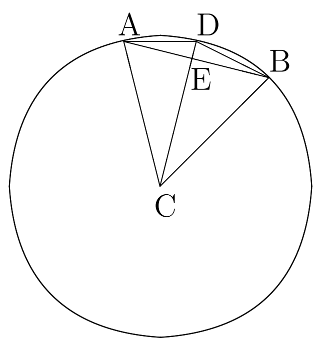
$$= 6^2 \cdot 6^{2n-2} + 3 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) + 33 \cdot 6^{2n-2}$$

si atat $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, cat si $33 \cdot 6^{2n-2}$ se divid cu 11, rezulta ca si suma lor, adica $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ se divide cu 11.

Inductia in geometrie.

Exemplul 1. Sa se calculeze latura a_{2^n} a unui poligon regulat cu 2^n laturi inscris intr-o circumferinta de raza R.

Rezolvare. Pentru $n = 2$ poligonul regulat cu 2^2 laturi reprezinta un patrat, si in acest caz $a_4 = R\sqrt{2}$.



Fie $a_{2^n} = a'$ si sa determinam $a_{2^{n+1}} = a''$. Daca $AB = a'$, atunci $AE = \dfrac{a'}{2}$; $BD = a''$. Din $\triangle DEB$, conform teoremei Pitagora

$$a'' = \sqrt{\left(\frac{a'}{2}\right)^2 + DE^2}.$$

La randul sau $DE = R - EC$ si

$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = R^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2.$$

Asadar $DE = R - \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{a'}{2}\right)^2}$, si deci,

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{\left(\frac{a'}{2}\right)^2 + R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{a'}{4}\right)^2}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}.$$

Astfel s-a obtinut o formula de trecere de la n la $n+1$. In cazuri particulare:

$$a_4 = R\sqrt{2} \ \Rightarrow \ a_8 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2 \cdot 2}{4}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$a_{16} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2(2 - \sqrt{2})}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Natural apare ipoteza

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ ori}}}. \tag{2}$$

Cum a fost arata anterior, pentru $n = 1$ aceasta formula este adevarata.

Fie (2) adevarata pentru $n = k$. Sa calculam $a_{2^{n+1}}$. Conform formulei de trecere se obtine

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2 \text{ ori}}}{4}}} = R - \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ ori}}}.$$

Nota. Din (2) rezulta ca lungimea circumferintei este egala cu

$$l = \lim_{n\to\infty} 2^n R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ ori}}},$$

si cum $l = 2\pi R$, se obtine

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ ori}}}.$$

Exercitii pentru autoevaluare

I. Sa se demonstreze egalitatile:

a) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$,

b) $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, \quad n > 1$,

c) $\sin x + \sin(x+\alpha) + \ldots + \sin(x+n\alpha) = \dfrac{\sin(x + \frac{n\alpha}{2}) \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$,

d) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \dfrac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$,

e) $\dfrac{4}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{5}{\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{6}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$,

f) $2 + 7 + 14 + \ldots + (n^2 + 2n - 1) = \dfrac{n(2n^2+9n+1)}{6}$,

g) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \dfrac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}$,

h) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin\dfrac{nx}{2} \cdot \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$,

i) $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$,

j) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx = \dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$,

k) $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx = \dfrac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$,

l) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x \quad (x \neq m\pi)$

m) $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \ldots + \operatorname{arcctg}(2n+1) = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + \ldots + \operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n} - n\operatorname{arctg} 1.$

II. Sa se demonstreze inegalitatile

$a)$ $2^n > 2n+1 \quad (n \geq 3)$,

$b)$ $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

$c)$ $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$,

$d)$ $2!4!\ldots(2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2$,

$e)$ $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1$,

$f)$ $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$,

$g)$ $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

III. Sa se demonstreze, ca pentru orice numar natural, numarul a_n se divide cu b

$$a)\ a_n = 5^{n+3} + 11^{3n+1}, \quad b = 17,$$
$$b)\ a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}, \quad b = 133,$$
$$c)\ a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, \quad b = 6,$$
$$d)\ a_n = 10^n + 18n - 28, \quad b = 27,$$
$$e)\ a_n = n^5 - n, \quad b = 30.$$

IV. Sa se arate, ca $\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots} \longrightarrow \pi$ (Formula lui Viete).

V. Sa se calculeze razele $r_n,\ R_n$ a circumferintelor inscrise si circumscrise poligonului regulat cu 2^n laturi de perimetru p.

VI. Sa se determine in cate triughiuri poate fi divizat un poligon cu n laturi de diagonalele sale neconcurente.

VII. Fie date n patrate arbitrare. Sa se arate ca aceste patrate pot fi taiate in asa mod incat din partile obtinute se poate de format un patrat.