Numere Fibonacci

Problema iepurilor

Fie data o pereche de iepuri. Se stie ca fiecare pereche de iepuri produce in fiecare luna o noua pereche de iepuri, care la randul sau devine productiva la varsta de o luna. Sa se determine cate perechi de iepuri vor fi dupa n luni.

Initial vom remarca istoria acestei probleme si apoi solutia ei, precum si alte probleme ce tin de ea.

Vorbind de matematica din antichitate fiecare ar numi asa matematicieini ca Euclide, Pytagoras, Heron s.a. Unul dintre cei mai ilustri matematicieni a Evului Mediu, de rand cu Viete, ar fi Leonardo din Pisa, cunoscut sub numele Fibonacci (prescurtare de la filus Bonacci, adica fiul lui Bonacci).

Fibonacci, nascut in Italia, in 1175, a fost educat in Nordul Africii, unde tatal sau detine un post diplomatic. Revenind in Italia, in 1202 publica un tratat de matematica cu titlul "Liber abaci". Acest tratat contine aproape toata informatia acelui timp, referitoare la aritmetica si algebra, si care a avut un rol important pe parcursul urmatoarelor secole in dezvoltarea matematicii in Europa. In particular, in baza acestui tratat, europenii au luat cunostinta de scrierea arabica a numerelor, adica de sistemul de numeratie pozitional arab. La fel, in 1220 publica "Practica geometrica", in 1225 "Liber quadratorum". Tratatul "Liber abaci" a fost reeditat in 1228. Una din problemele discutate in "Liber abaci" este anume "problema iepurilor", (p. 123-124 in editia anului 1228) prezentata la inceputul acestui material.

Sa trecem la rezolvarea acestei probleme.

Fie f_n numarul de perechi de iepuri dupa n luni. Numarul de perechi de iepuri dupa $n+1$, notat prin f_{n+1}, va fi numarul de perechi la luna n, adica f_n, plus numarul de iepuri nou-nascuti. Cum iepuri se nasc din pereche de iepuri cu varsta mai mare de o luna, iepuri nou-nascuti vor fi f_{n-1} perechi.

Prin urmare se obtine relatia

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}. \tag{1}$$

In plus,

$$f_0 = 0 \quad \text{si} \quad f_1 = 1. \tag{2}$$

Asadar am obtinut un sir numeric definit in mod recurent. Scriind termenii acestui sir, determinam

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \dots \tag{3}$$

numit sirul Fibonacci. Fiecare termen al sirului, incepand cu al treilea, este egal cu suma precedentilor doi termeni. Primii doi termeni se considera fiind dati, $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Astfel "problema iepurilor" s-a redus la rezolvarea ecuatiei functionale (1), adica la determinarea termenului general f_n a sirului, care verifica relatia (1) in conditiile (2).

Presupunem ca sirul f_n are forma

$$f_n = \lambda^n, \tag{4}$$

unde λ un parametru real.

Substituim f_n in (1), si obtinem

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1},$$

sau echivalent

$$\lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0.$$

Cum $f_n \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbf{N}^*)$, ultima egalitate devine

$$\lambda^2 - \lambda - 1, \tag{5}$$

care reprezinta o ecuatie patrata in raport cu parametrul real λ. Din (5) deducem

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Asadar, sirurile

$$f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad f_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

verifica egalitatea (1). De aici, conchidem ca ecuatia (1) poseda mai multe solutii. In general exista o infinitate de siruri care verifica (1). Usor de observat ca sirul de forma

$$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{6}$$

unde c_1, c_2 - constante reale fixate, la fel verifica (1). Mai mult, se poate arata ca orice sir ce verifica egalitatea (1) are forma (6). Avand alte scopuri, nu vom demonstra acest fapt in cadrul acestei lucrari. Pentru cei interesanti in teoria generala de solutionare a ecuatiilor de forma (1), numite ecuatii cu diferente finite, recomandam sa consulte [1]-[4].

Revenind la sirul Fibonacci, constatam ca acest sir se determina univoc, si unicitatea este dictata de primii doi termeni, adica de conditiile initiale (2). Sunstituind $n = 0$ si $n = 1$ in (6), se obtine sistemul liniar

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

cu solutia $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

In final, termenul de rang n al sirului Fibonacci are forma

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{7}$$

Proprietati ale sirului Fibonacci.

1°.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1. \tag{8}$$

Demonstratie.

$$\begin{aligned} & f_1 = f_3 - f_2 \\ & f_2 = f_4 - f_3 \\ & \ldots \\ & f_{n-1} = f_{n+1} - f_n \\ & f_n = f_{n+2} - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Sumand parte cu parte egalitatile anterioare se obtine

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - f_2,$$

si cum $f_2 = 1$ se obtine egalitatea (8).

2°. $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$.

3°. $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$.

Proprietatile $2^\circ - 3^\circ$ se demonstreaza similar cu 1°.

4°.

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}. \tag{9}$$

Demonstratie. Se observa cu usurinta ca are loc relatia

$$f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} f_n = f_n(f_{n+1} - f_{n-1}) = f_n^2 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Din aceasta relatie, deducem egalitatile

$$\begin{aligned}
&f_1^2 = f_1 \cdot f_2,\\
&f_2^2 = f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2,\\
&f_3^2 = f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3,\\
&\ldots\\
&f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n.
\end{aligned}$$

Sumand parte cu parte egalitatile precedente se obtine egalitatea (9).

5°. Sa se arate ca

$$f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}, \tag{10}$$

unde f_n desemneaza termenul de rang n al sirului Fibonacci.

Demonstratie. Desigur, cunoscand forma generala a termenului f_n (a se vedea (9) se poate de substituit in (10) si de aratat ca are loc egalitatea. Cu toate acestea, vom demonstra (10) utilizand **metoda inductiei matematice**. Vom face inductia dupa $m \in \mathbf{N}$.

Pentru $m = 1$, egalitatea (10) devine

$$f_{n+1} = f_{n-1} \cdot f_1 + f_n \cdot f_2,$$

care este evidenta. Pentru $m = 2$ formula (10) la fel este evidenta. Intr-adevar,

$$f_{n+2} = f_{n-1} f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = f_{n-1} + f_n + f_n = f_{n+1} + f_n.$$

Astfel baza inductiei este verificata $(m = 1;\ m = 2)$. Fie (10) este adevarata pentru $m = k$ si $m = k + 1$ si vom demonstra ca este adevarata si pentru $m = k + 2$.

Asadar, fie sunt adevarate egalitatile

$$f_{n+k} = f_{n-1}f_k + f_n f_{k+1},$$
$$f_{n+k+1} = f_{n-1}f_{k+1} + f_n f_{k+2}.$$

Sumand parte cu parte ultimele egalitati, se obtine

$$f_{n+k+2} = f_{n-1} \cdot f_{k+2} + f_n \cdot f_{k+3},$$

care si reprezinta egalitatea (10) pentru $m = k + 2$.

6°. $f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n \cdot f_{n+1}$.

Demonstratia rezulta din (10) punand $m = n$.

7°. Termenul f_{2n} se diivide prin f_n.

Demonstratie. Din 6° rezulta

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}),$$

de unde rezulta ca $f_{2n} \vdots f_n$.

8°. $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$.

9°. $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$.

Proprietatile $8° - 9°$ fiind consecinte directe din 6°, raman sa fie demonstrate desinestatator.

10°.

$$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1} \tag{11}$$

Demonstratie. Vom demonstra egalitatea (11) prin inductie dupa n. Pentru $n = 2$ egalitatea (11) devine

$$f_2^2 = f_1 \cdot f_3 - 1,$$

care este adevarata.

Fie (11) este adevarata pentru n si vom demonstra ca este adevarata si pentru $n+1$. Asadar fie are loc egalitatea

$$f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Adunam la ambele parti a ultimei egalitati $f_n \cdot f_{n+1}$. Ca rezultat se obtine

$$f_n^2 + f_n \cdot f_{n+1} = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

sau echivalent

$$f_n(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1}(f_{n-1} + f_n) + (-1)^{n+1},$$

si cum $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ (a se vedea definitia sirului Fibonacci) deducem

$$f_n f_{n+2} = f_{n+1}^2 + (-1)^{n+1},$$

sau

$$f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+2} + (-1)^{n+2}.$$

Deci (11) este adevarata si pentru $n + 1$.

11. Sa se arate ca daca n este divizibil prin m atunci f_n este divizibil prin f_m.

Demonstratie. Fie $n \vdots m$, adica $n = mk$. Vom demonstra proprietatea (11) prin inductie dupa k. Pentru $k = 1$, $n = m$, si deci, f_n evident este divizibil prin f_m. Presupunem ca f_{mk} este divizibil prin f_m. Sa examinam $f_{m(k+1)}$. Cum $f_{m(k+1)} = f_{mk+m}$ si utilizand egalitatea (10) se obtine

$$f_{m(k+1)}^2 = f_{mk-1} f_m + f_{mk} \cdot f_{m+1}.$$

Primul termen al sumei din dreapta evident este divizibil prin f_m. Termenul al doilea este divizibil prin f_m conform presupunerii inductive. Prin urmare suma acestor termeni este divizibila prin f_m, si deci, $f_{m(k+1)} \vdots f_m$. Proprietatea 11° este demonstrata.

Alte proprietati ce tin de divizibilitate, geometrie, teoria algoritmilor etc. pot fi consultate in Bibliografia indicata la sfarsitul acestei lucrari.

Exercitii pentru lucrul individual.

1. Fie $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sirul Fibonacci. Sa se demonstreze ca

(a) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \ldots + f_{2n-1} \cdot f_{2n} = f_{2n}^2$

(b) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + \ldots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$

(c) $n f_1 + (n-1) f_2 + \ldots + 2 f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3)$

(d) $f_1 + 2 f_2 + 3 f_3 + \ldots + n f_n = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2$

2. Sa se arate ca pentru orice $m \in \mathbf{N}$, printre primele $m^2 - 1$ numere Fibonacci exista unul divizibil prin m.

3. Sa se demonstreze ca:

(a) Numarul Fibonacci f_n este par daca si numai daca n este divizibil prin 3;

(b) Numarul Fibonacci f_n este divizibil prin 3 daca si numai daca rangul lui este divizibil prin 4;

(c) $f_n \vdots 4$ daca si numai daca $n \vdots 6$;

(d) $f_n \vdots 5$ daca si numai daca $n \vdots 5$;

(e) $f_n \vdots 7$ daca si numai daca $n \vdots 8$;

(f) $f_n \vdots 16$ daca si numai daca $n \vdots 12$.

Bibliografie

1. A.I.Hincin, Fractii continue, Ed. Tehnica, Bucuresti 1960.

2. I.Munteanu, D.Popa, Metoda sirurilor recurente, Editura GIL, ZALAU.

3. Н.М.Воробёв, Числа Фибоначи, Москва, Наука, 1992.

4. А.У.Маркушевич, Возвратные последовательности, Москва, Наука, 1975.