Ecuatii Diofantice

In continuare convenim urmatoarele notatii
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ - multimea numerelor naturale;
$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ - multimea numerelor naturale pozitive;
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - multimea numerelor intregi;
$\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$ - multimea numerelor rationale;
$\mathbf{R}$ - multimea numerelor reale.

Initial vom prezenta unele definitii si afirmatii uzuale, necesare pentru expunerile de mai departe.

Divizibilatea

Definitie. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ si $b \neq 0$. Numerele $q \in \mathbf{Z}$ si $r \in \{0, 1, \ldots, |b| - 1\}$ se numesc catul si respectiv restul de la impartirea numarului a prin b daca

$$a = bq + r. \tag{1}$$

In plus, daca $r = 0$, atunci se zice ca numarul a este divizibil prin b, sau b divide a, sau b este divizor al numarului a, si se noteaza $a \vdots b$ sau $b|a$.

Se demonstreaza ca pentru orice numere intregi $a, b;\ b \neq 0$, exista unicele numere intregi $q, r,\ r \in \{0, \ldots, |b| - 1\}$ astfel incat are loc descompunerea (1).

Definitie. Cel mai mic multiplu comun al numerelor intregi nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se numeste cel mai mic numar natural pozitiv care se divide la fiecare numar a_k $(k = 1, \ldots, k)$.

Pentru cel mai mic multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vom utiliza notatia $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Definitie. Cel mai mare divizor comun al numerelor intregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nu toate nule), se numeste numarul natural maximal prin care se divide fiecare dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Pentru cel mai mare divizor comun al numerelor intregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vom utiliza notatia $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definitie. Numerele intregi $a, b \in \mathbf{Z}$ se numesc reciproc prime sau prime intre ele daca $(a, b) = 1$.

Proprietati. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

1. Daca $a|b,\ b|c$, atunci $a|c$ (proprietatea de tranzitivitate).
2. Daca $a|b,\ a|c$, atunci $a|b + c$.
3. Daca $a|b$, atunci pentru orice intregi c are loc $a|bc$.
4. Daca $ac|bc$ si $c \neq 0$, atunci $a|b$.
5. Fie $a|bc$ si $(a, c) = 1$. Atunci $a|b$.
6. Daca $a|c,\ b|c$ si $(a, b) = 1$, atunci $ab|c$.
7. $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.
8. $(a, b \pm a) = (a, b)$.

Congruente

Definitie. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ si $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Vom spune ca numarul a este congruent cu numarul b modulo c, notand $a \equiv b (\bmod c)$, daca $c | a - b$. In caz contrar se spune ca numarul a nu este congruent cu b modulo c (notatie $a \not\equiv b (\bmod c)$).

Proprietati.

1. $a \equiv a (\bmod d)$.
2. Daca $a \equiv b (\bmod d)$, atunci $b \equiv a (\bmod d)$.
3. Daca $a \equiv b (\bmod d)$, $b \equiv c (\bmod d)$, atunci $a \equiv c (\bmod d)$.
4. Daca $a_1 \equiv b_1 (\bmod d)$ si $a_2 \equiv b_2 (\bmod d)$, atunci $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (\bmod d)$.
5. Daca $a_1 \equiv b_1 (\bmod d)$ si $a_2 \equiv b_2 (\bmod d)$, atunci $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (\bmod d)$.
6. Daca $ac \equiv bc (\bmod dc)$, atunci $a \equiv b (\bmod d)$.
7. Daca $a \equiv b (\bmod dc)$, atunci $a \equiv b (\bmod d)$.
8. Daca $a \equiv b (\bmod d)$, $a \equiv b (\bmod c)$ si $(d, c) = 1$, atunci $a \equiv b (\bmod dc)$.
9. Daca $a \equiv b (\bmod d)$, atunci pentru orice $c \in \mathbf{Z}$ $ac \equiv bc (\bmod d)$.
10. Daca $ac \equiv bc (\bmod d)$ si $(c, d) = 1$, atunci $a \equiv b (\bmod d)$.

Numere prime

Definitie. Numarul natural pozitiv mai mare decat unu se numeste prim daca acest numar este divizibil numai prin 1 si el insusi. Celelalte numere naturale mai mare ca 1 se numesc compuse.

Numarul natural 1 nu se considera fiind nici prim nici compus.

Teorema de baza aritmeticii.

Orice numar natural mai mare ca 1 poseda descompunerea in factori primi (nu neaparat diferiti). Mai mult, aceasta descompunere este unica cu precizie de ordinea factorilor.

Teorema mica a lui Fermat.

Fie p un numar prim. Pentru orice numar intreg a este adevarata relatia

$$a^p \equiv a (\bmod p).$$

Despre ecuatii difantice

Se numeste ecuatie diofantica ecuatia de forma

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

unde $P(x_1, \ldots, x_n)$ este un polinom cu coeficienti intregi.

In cadrul cercetarii ecuatiilor diofantice, de regula, se abordeaza urmatoarele intrebari:

1. poseda ecuatia radacini intregi;

2. este finita sau infinita multimea radacinilor intregi;

3. sa se rezolve ecuatia in multimea **Z**, adica sa se determine toate solutiile intregi ale ecuatiei;

4. sa se rezolve ecuatia peste **N**;

5. sa se rezolve ecuatia peste **Q**.

Mentionam ca problema solutionarii ecuatiilor in numere intregi este complet solutionata numai pentru ecuatiile cu o singura necunoscuta, pentru ecuatii de ordinul intai si pentru ecuatii de ordinul doi cu doua necunoscute. In caz general este suficient dificila chiar problema existentei solutiei intregi. De exemplu, nu se cunoaste daca ecuatia

$$x^3 + y^3 + z^3 = 30$$

poseda solutii intregi. Mai mult, este demonstrat ca nu exista un algoritm unic, prin intermediul caruia, intr-un numar finit de pasi, sa fie rezolvata o ecuatie diofantica arbitrara.

Ecuatii Diofantice cu o singura necunoscuta

Consideram ecuatia

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0, \tag{2}$$

unde $a_j \in \mathbf{Z}$ $(j = 0, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$.

Vom arata cum se rezolva ecuatia (2) in numere rationale. In particular, aceasta metoda va permite de solutionat ecuatia (2) peste **Z**. Fara restrictia generalitatii, se presupune ca $a_0 \neq 0$. Fie r o radacina rationala a ecuatiei (2), $r = \dfrac{p}{q}$, unde $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$, $(p, q) = 1$ si are loc egalitatea

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0.$$

Se multiplica ambele parti a ultimei egalitati cu q^n si se obtine

$$a_0q^n + a_1p \cdot q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$$

Prin urmare

$$p|a_0q^n \quad \text{si} \quad q|a_np^n. \tag{3}$$

Cum $(p, q) = 1$, rezulta ca $(p, q^n) = 1$, $(q, p^n) = 1$. De aici, si din relatiile (3) deducem ca $p|a_0$ si $q|a_n$. Deoarece numere rationale de forma $r = \dfrac{p}{q}$, astfel incat $(p, q) = 1$, $p|a_0$, $q|a_n$, sunt o multume finita, rezulta ca intr-un numar finit de pasi pot fi selectate acele numere care sunt radacini ale ecuatiei (2). In baza rationamentelor anterioare, ecuatia (2) alte radacini nu are.

Probleme

Problema 1. Sa se rezolve in multimea **Q** ecuatia

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0. \tag{4}$$

Solutie. Termenul liber are urmatorii divizori

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 21.$$

La fel determinam toti divizorii pozitivi ai coeficientului superior, si anume: 1, 2. Conform metodei indicate anterior, solutiile rationale ale ecuatiei (4) sunt printre numerele

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 21,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{7}{2},\ \pm\frac{21}{2}.$$

In urma verificarii nemijlocite (substitutii in ecuatia (4)) se determina ca din aceasta multime numai numerele -3 si $\frac{1}{2}$ sunt radacini ale ecuatiei (4).

Problema 2. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$x^8 + x^7 + x + 1 = 0. \tag{5}$$

Solutie. Cum ± 1 sunt toti divizorii termenului liber si 1 este unicul divizor al coeficientului superior, rezulta ca toate radacinile intregi ale ecuatiei (5) apartin multimii $\{-1, 1\}$. Substituind $x = \pm 1$ in (5) conchidem ca numai $x = -1$ este radacina.

Ecuatii diofantice de gradul intai

In cadrul acestei sectiuni vom discuta problema rezolvarii in numere intregi a ecuatiilor de gradul unu, sau altfel numite, ecuatii liniare, adica a ecuatiilor de forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{6}$$

unde $a_j \in \mathbf{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $b \in \mathbf{Z}$.

Presupunem ca nu toate numerele a_j $(j = 1, \ldots, n)$ sunt nule. Evident ca pentru existenta unei radacini intregi ale ecuatiei (6) este necesar ca $(a_1, \ldots, a_n)|b$. Vom demonstra ca aceasta conditie este si suficienta.

Fie

$$a'_j = \frac{a_j}{(a_1, \ldots, a_n)} \quad (j = 1, \ldots, n), \quad b' = \frac{b}{(a_1, \ldots, a_n)},$$

si cosideram urmatoarea ecuatie echivalenta cu (6)

$$a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b', \tag{7}$$

in care $(a'_1, \ldots, a'_n) = 1$. Fie $a'_i,\ a'_j$ numere nenule astfel incat $|a'_i| \neq |a'_j|$. Pentru determinare consideram ca $i < j$ si $|a'_i| > |a'_j|$. In baza prezentarii (1), exista numerele q si r astfel incat

$$a'_i = a'_j q + r,$$

si substituind a'_i in (7) se obtine ecuatia

$$a'_1 x_1 + \ldots + r x_i + \ldots + a'_j (x_j + q x_i) + \ldots + a'_n x_n = b'. \tag{8}$$

Ecuatia (8) se scrie sub forma

$$a''_1 x_1 + \ldots + a''_n x''_n = b', \tag{9}$$

unde $a''_k = \begin{cases} a'_k, & k \neq i \\ r, & k = i \end{cases}, \quad x''_k = \begin{cases} x_k, & k \neq j \\ x_j + q x_i, & k = j \end{cases}.$

Usor se observa ca exista o corespondenta biunivoca intre solutiile ecuatiilor (7) si (9). Mai mult, cunoscand radacinile ecuatiei (9), tinand seama de transformarile anterioare pot fi indicate si radacinile ecuatiei (7).

Mentionam ca pentru orice $k, i \in \{1, \ldots, n\},\ k \neq i$ au loc relatiile

$$a''_k = a'_k, \quad |a''_i| < |a'_i|.$$

In plus

$$(a''_1, \ldots, a''_n) = (a'_1, \ldots, a'_i - a'_j \cdot q, \ldots, a'_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) = 1.$$

Sumand toate cele mentionate anterior conchidem ca ecuatia (7) intr-un numar finit de pasi poate fi redusa la forma

$$\tilde{a}_1 \tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_n \tilde{x}_n = b', \tag{10}$$

unde $\tilde{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sunt numere nenule valorile absolute ale carora sunt diferite doua cate doua. Tinand seama ca $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = 1$, deducem ca numerele $\tilde{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ pot obtine doar valorile $0, \pm 1$ si nu toate sunt nule. Fara restrictia generalitatii, se presupune ca $\tilde{a}_1 = 1$. Atunci ecuatia (10) are urmatoarele radacini

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1 = b' - \tilde{a}_2 t_2 - \ldots - \tilde{a}_n t_n, \\ &\tilde{x}_2 = t_2, \\ &\ldots \\ &\tilde{x}_n = t_n, \end{aligned}$$

unde $t_2, t_3, \ldots, t_n$ sunt numere intregi arbitrare. Utilizand transformarile efectuate pe parcursul rationamentelor, se obtin si radacinile ecuatiei (7).

Tinem sa mentionam ca la rezolvarea ecuatiei (10) sa utilizat esential numai faptul ca $\tilde{a}_1 = 1$, si deci, in cazul in care la un pas al algoritmului indicat se obtine o ecuatie cu cel putin un coeficient egal cu ± 1, se scrie solutia ecuatiei respective similara cu solutia ecuatiei (10).

Problema 3. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$4x - 6y + 11z = 7.$$

Solutie. Impartind -6 la 4 se obtine $-6 = 4(-2) + 2$, si ecuatia initala se scrie sub forma

$$4(x - 2y) + 2y + 11z = 7.$$

Fie $x' = x - 2y$ si atunci se obtine ecuatia

$$4x' + 2y + 11z = 7.$$

Cum $11 = 2 \cdot 5 + 1$, scriem ultima ecuatie sub forma

$$4x' + 2(y + 5z) + z = 7.$$

Considerand $y' = y + 5z$ din ecuatia precedenta deducem

$$4x' + 2y' + z = 7.$$

Solutiile acestei ecuatii sunt de forma $z = 7 - 4x' - 2y',\ x'$ si y' numere intregi arbitrare.

Prin urmare $y = y' - 5z = 20x' + 11y' - 35$, $x = x' + 2y = 41x' + 22y' - 70$.

Asadar solutia ecuatiei initiale are forma

$$\begin{aligned} &x = 41x' + 22y' - 70 \\ &y = 20x' + 11y' - 35 \\ &z = 7 - 4x' - 2y', \end{aligned}$$

unde $x',\ y'$ numere intregi arbitrare.

Ecuatii doifantice de grad superior

1. Metoda descompunerii in factori

Problema 4. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$x + y = xy.$$

Solutie. Ecuatia initiala se scrie sub forma

$$(x - 1)(y - 1) = 1.$$

Deoarece produsul a doua numere intregi este egal cu 1 daca si numai daca ambele numere sunt egale cu 1 sau ambele sunt -1, se obtine totalitatea de sisteme

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1, \end{cases} \end{array}\right.$$

cu solutiile $(0, 0)$ si $(2, 2)$.

Problema 5. Sa se arate ca ecuatia

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 15y^5 = 33$$

nu are solutii intregi.

Solutie. Partea stanga a ecuatiei se scrie sub forma

$$(x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y).$$

Daca $y \neq 0$ atunci factorii ultimului produs sunt diferiti doi cate doi. Altfel, numarul 33 poate fi descompus cel mult in patru factori distincti. Prin urmare, ecuatia initiala nu are radacini intregi x, y daca $y \neq 0$. In cazul $y = 0$ ecuatia initiala devine

$$x^5 = 33,$$

echivalenta cu $x = \sqrt[5]{33}$. Cum $\sqrt[5]{33} \notin \mathbf{Z}$ rezulta ca ecuatia initiala nu are solutii intregi nici in cazul $y = 0$.

Problema 6. Sa se demonstreze ca ecuatia

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$$

nu are solutii in $\mathbf{Z}$.

Solutie. Similar cazului precedent, se factorizeaza partea stanga a ecuatiei si se obtine

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 10.$$

Se observa ca $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$. Scriem toti divizorii numarului 10, adica: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Se verifica nemijlocit ca suma oricaror trei divizori a numarului 10, produsul carora este egal cu 10, este diferite de 0.

Problema 7. Sa se rezolve in $\mathbf{Z}$ ecuatia

$$y^3 - x^3 = 91.$$

Solutie. Ecuatia initiala se scrie sub forma

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 91.$$

Divizorii numarului 91 sunt numerele $\pm1, \pm91$. Deoarece $y^2 + yx + x^2 \geq y^2 - 2|y||x| + x^2 = (|y| - |x|)^2 \geq 0$, ecuatia initiala este echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y - x = 1,\\ y^2 + yx + x^2 = 91,\end{cases}\\ \begin{cases} y - x = 91,\\ y^2 + yx + x^2 = 1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = x + 1,\\ x^2 + x - 30 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases} y = x + 91,\\ x^2 + 91x + 30 \cdot 99 = 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = x + 1,\\ \left[\begin{array}{l} x = -6,\\ x = 5,\end{array}\right.\end{cases}\\ x \in \emptyset.\end{array}\right.$$

Asadar, solutiile intregi a ecuatiei sunt perechile $(-6,-5)$ si $(5,6)$.

Problema 8. Sa se rezolve in numere naturale ecuatia

$$y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1.$$

Solutie. Cum

$$\begin{aligned} &x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x(x+3))((x+1)(x+2))+1 = \\ &= ((x^2+3x-1)-1)((x^2+3x+1)+1)+1 = (x^2+3x+1)^2, \end{aligned}$$

rezulta ca ecuatia initiala este echivalenta cu urmatoarea ecuatie

$$y^2 = (x^2+3x+1)^2$$

sau

$$y = x^2+3x+1.$$

Astfel multimea tuturor solutiilor este $\{(x, x^2+3x+1) \mid x \in \mathbf{N}\}$.

Paritatea

Problema 9. Sa se determine toate numerele prime x, y care verifica egalitatea

$$x^2 - 2y^2 = 1. \tag{11}$$

Solutie. Vom discuta doua cazuri, in dependenta de paritatea numarului x.
a) Fie x este un numar impar. Atunci $x = 2t+1$ si substituind in (11) se obtine

$$(2t+1)^2 - 2y^2 = 1,$$

echivalenta cu

$$2y^2 = 4t(t+1).$$

Prin urmare $2|y^2$. Cum y numar prim, rezulta ca $y = 2$, deci $x = \sqrt{1+2^3} = 3$.

b) Daca x este par, atunci, cum x prim, conchidem $x = 2$, si din (11) rezulta ca $y = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \notin \mathbf{N}$.
Astfel ecuatia (11) are in clasa numerelor prime o singura solutie $(3;2)$.

Problema 10. Sa se rezolve in $\mathbf{Z}$ ecuatia

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz. \tag{12}$$

Solutie. Solutia $x = y = z = 0$ este evidenta. Sa demonstram ca alte solutii nu sunt. Presupunem contrariul. Cum $x^2+y^2+z^2$ este un numar par, atunci cel putin unul dintre numerele x, y, z este par. Tinand seama de simetria ecuatiei (12), consideram ca x este par, si fie $x = 2x_1$. Atunci $4|y^2 + z^2$, si aceasta are loc numai in cazul in care y si z sunt pare. Intr-adevar, daca y par si z impar, atunci $4 \not| y^2 + z^2$. Daca ambele sunt impare, atunci

$$y^2 + z^2 = (2u + 1)^2 + (2v + 1)^2 = 4(u^2 + v^2 + u + v) + 2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4),$$

si deci $4 \not| y^2 + z^2$.

Asadar, $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$ si tinand seama de (12), determinam

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^2 x_1 y_1 z_1.$$

Prin argumente similare, celor anterioare, din ultima egalitate se deduce ca $2|x_1,\ 2|y_1,\ 2|z_1$, si deci, $2^2|x,\ 2^2|y,\ 2^2|z$. Prin urmare se poate de aratat ca $2^n|x,\ 2^n|y,\ 2^n|z$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Contradictie.

In concluzie, ecuatia (12) poseda o singura solutie (0,0,0).

Problema 11. Sa se arate ca ecuatia

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0, \tag{13}$$

nu are solutii nenule in $\mathbf{Z}$.

Solutie. Fie x, y, z sunt solutie a ecuatiei (13) $(x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$. Usor de observat ca x este par. Substitutia $x = 2x_1$, determina

$$4x_1^3 + y^3 + 2z^3 - 6x_1yz = 0.$$

De aici conchidem ca y - par, adica $y = 2y_1$, si astfel se obtine

$$2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 - 6x_1y_1z = 0.$$

Din ultima egalitate rezulta ca si numarul z este par si substituind $z = 2z_1$ ecuatia devine

$$x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 - 6x_1y_1z_1 = 0.$$

Prin rationamente similare se demonstreaza ca pentru orice $n \in \mathbf{N}$

$$2^n|x,\ 2^n|y,\ 2^n|z.$$

Contradictie.

Utilizarea congruentelor la demonstrarea incompatibilitatii unor ecuatii

Problema 12. Sa se rezolve in $\mathbf{Z}$ ecuatia

$$x^2 + 1 = 3y. \tag{14}$$

Solutie. Fie x, y verifica (14). Atunci $x^2 + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$. Examinam cateva cazuri, in dependenta de restul impartirii numarului x prin 3.

a) Fie $x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$. Atunci $x^2 + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, si deci $x^2 + 1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$.

b) Fie $x \equiv 1 (\bmod 3)$. In acest caz $x^2 + 1 \equiv 2 (\bmod 3)$ si prin urmare $x^2 + 1 \not\equiv 0 (\bmod 3)$.

c) Fie $x \equiv 2 (\bmod 3)$. Similar cazului a) si b) se obtine

$$x^2 + 1 \equiv 5 \equiv 2 \not\equiv 0 (\bmod 3).$$

In consecinta, congruenta $x^2 + 1 \equiv 0 (\bmod 3)$ nu are solutii, si astfel ecuatia (14) la fel nu are solutii intregi.

Problema 13. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$x^2 - 2y^2 + 8z = 3. \tag{15}$$

Solutie. Fie (x, y, z) solutie in $\mathbf{Z}$ a ecuatiei (15). Cum x este un numar impar, rezulta ca

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1 \equiv 1 (\bmod 8).$$

Atfel ecuatia initiala in modulo 4 devine

$$1 - 2y^2 \equiv 3 (\bmod 4)$$

sau

$$y^2 \equiv -1 (\bmod 2),$$

si prin urmare y este impar, si deci, $y^2 \equiv 1 (\bmod 8)$. De aici,

$$1 - 2 \equiv 3 (\bmod 8) \;\Leftrightarrow\; 4 \equiv 0 (\bmod 8).$$

Astfel s-a obtinut contradictie si deci ecuatia initiala nu are radacini in $\mathbf{Z}$.

Problema 14. Sa se arate ca ecuatia

$$x^3 + x + 10y = 20004$$

nu este compatibila peste $\mathbf{Z}$.

Solutie. Considerand in ecuatia initiala congruenta modulo 5, conchidem

$$x^3 + x \equiv -1 (\bmod 5). \tag{16}$$

Examinand in (16) cazuri in dependenta de resturile impartirii lui x prin 5, se demonstreaza ca (16) nu este compatibila. Asadar ecuatia initiala nu are solutii in $\mathbf{Z}$.

Diverse metode de rezolvare a ecuatiilor diofantice

Problema 15. Sa se arate ca ecuatia

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2$$

poseda o infinitate de radacini in $\mathbf{Z}$.

Solutie. Fie $x = a + b,\ y = a - b$. Atunci $x^3 + y^3 = 2a^3 + 6ab^2$ si ecuatia initiala devine

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2.$$

In ultima egalitate se considera $a = 1$ si se obtine $z^3 = -6b^2$. Fie $b = 6t^3$, de unde $z = -6t^2,\ x = 1 + 6t^3,\ y = 1 - 6t^3$. In consecinta sau obtinut o infinitate de radacini intregi a ecuatiei initiale, corespunzatoare lui $t \in \mathbf{Z}$.

Problema 16. Sa se arate ca ecuatia

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{17}$$

poseda o inifinitate de radacini $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Solutie. Se observa cu usurinta ca perechea (3,2) este solutie a ecuatiei initiale. Altfel, din identitatea

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(2xy)^2 = (x^2 - 2y^2)^2$$

rezulta ca daca (x, y) este radacina a ecuatiei (17), atunci si perechea $(x^2 + 2y^2, 2xy)$ la fel este solutie. Utilizand acest fapt, se determina in mod recurent sirul infinit (x_n, y_n) de solutii distincte a ecuatiei (17), adica

$$(x_1, y_1) = (3, 2) \text{ si } x_{n+1} = x_n^2 + 2y_n^2, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Problema 17. Sa se rezolve peste $\mathbf{Z}$ ecuatia

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

Solutie. Se observa ca termenii sumei din stanga ecuatiei sunt de acelasi semn, si cum suma lor este pozitiva, atunci fiecare termen la fel este pozitiv. In baza egalitatii Cauchy despre medii (a se vedea, "Inegalitati") se obtine

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3.$$

Prin urmare $xyz = 1$, si astfel solutii pot fi numai tripletele $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$. Efectuand verificarea se determina ca fiecare din tripletele indicate este solutie.

Problema 18. Sa se arate ca ecutia

$$x(x + 1) = 4y(y + 1)$$

este incompatibila in $\mathbf{Z}_+$.

Solutie. Usor se observa ca ecuatia initiala este echivalenta cu ecuatia

$$x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2.$$

De aici rezulta ca $x^2 < (2y+1)^2 < (x+1)^2$ sau $x < 2y+1 < x+1$. Contradictia obtinuta implica incompatibilitatea in $\mathbf{N}^*$ a ecuatiei initiale.

Problema 19. Sa se determine solutiile intregi ale ecuatiei

$$2x^3 + xy - 7 = 0.$$

Solutie. Din enuntul problemei rezulta ca x trebuie sa fie divizor al numarului 7. Deci, valorile posibile ale lui x apartin multiimii $\{\pm 1, \pm 7\}$. Considerand fiecare valoare ale lui x in parte se obtin toate radacinile ecuatiei initiale: $(1,5)$, $(-1,-9)$, $(7,-97)$, $(-7,-99)$.

Problema 20. Sa se arate ca ecuatia

$$x^2 + 1 = py,$$

unde p - numar prim de forma 4k+3 este incompatibila in $\mathbf{Z}$.

Solutie. Fie ca ecuatia din enuntul problemei este compatibila in $\mathbf{Z}$. Atunci

$$x^2 + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} p).$$

In baza teoremei mici Fermat, din ultima relatie rezulta

$$-1 \equiv (-1)^{2k+1} \equiv (x^2)^{2k+1} \equiv x^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p).$$

Astfel s-a obtinut o contradictie cu presupunerea initiala si deci ecuatia nu are solutii in $\mathbf{Z}$.

Problema 21. Sa se arate ca ecuatia

$$x^2 - y^3 = 7$$

nu este compatibila peste $\mathbf{N}^*$.

Solutie. Daca y este par, atunci $x^2 \equiv 3 (\operatorname{mod} 4)$, dar ultima congruenta nu are loc nici pentru un $x \in \mathbf{Z}$. Asadar, presupunem ca y este un numar impar, adica $y = 2k+1$. Atunci,

$$x^2 + 1 = y^3 + 8 = (y+2)((y+1)^2 + 3) = (y+2)(4(k+1)^2 + 3),$$

si deci, numarul $x^2 + 1$ are divizori de forma $4n+3$, de unde rezulta ca x^2+1 are divizor prim de forma $4n+3$. Intr-adevar, daca toti divizorii primi ai numarului $4(k+1)^2+3$ sunt de forma $4n+1$, atunci si numarul $4(k+1)^2+3$ va fi de forma $4n+1$. Ultima nu are loc in baza Problemei 20.

Problema 22. Sa se demonstreze ca ecuatia

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

nu are radacini intregi pozitive.

Solutie. Fie $d = (x, y),\ x_1 = \dfrac{x}{d},\ y_1 = \dfrac{y}{d}$. Cum

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2,$$

rezulta ca

$$x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = d^2x_1^2y_1^2. \tag{18}$$

De aici deducem ca

$$x_1|y_1, \quad y_1|x_1.$$

Tinand seama ca $(x_1, y_1) = 1$, conchidem ca $x_1 = y_1 = 1$. Astfel ecuatia (18) devine

$$d^2 = 3,$$

care implica afirmatia problemei.

Problema 23. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Solutie. Fie $t = x + y$. Cum

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{4}(x + y)^2,$$

rezulta ca

$$t \geq \frac{1}{4}t^2,$$

de unde $t \in [0; 4]$.

Tinand seama de relatia $x+y = (x+y)^2 - 3xy$, consideram cazurile corespunzatoare valorilor intregi a numarului $t \in [0; 4]$.

a) $t = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

b) $t = 1$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

c) $t = 2$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = \dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \emptyset.$$

d) $t=3$

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array} \right.$$

e) $t=4$

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

Sumand cele mentionate anterior se obtine multimea tuturor solutiilor: (0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2).

Probleme pentru lucrul individual

1. Sa se rezolve in **Z** ecuatia

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3.$$

Raspuns: $x=3$.

2. Sa se rezolve in numere rationale ecuatia

$$x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0.$$

Raspuns: $\{-3,2\}$.

3. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$127x-52y+1=0.$$

Raspuns: $x=9+52t, \quad y=22+127t, \quad t\in \mathbf{Z}$.

4. Sa se rezolve in **Z** ecuatia

$$6x+10y-7z=11.$$

Raspuns: $x=3u+7v-11,\ y=u,\ z=4u+6v-11,\ u,v\in\mathbf{Z}$.

5. Sa se rezolve in numere intregi ecuatia

$$3x^2+4xy-7y^2=13.$$

Indicatie. Sa se descompuna in factori.
Raspuns: (2,1), $(-2,-1)$.

6. Sa se rezolve in **Z** ecuatia

$$1+x+x^2+x^3=2^y.$$

Raspuns: (0,0); (1,2).

7. Sa se rezolve in **Z** ecuatia
$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4t^4).$$
Indicatie. Se utlizeaza paritatea.
Raspuns: (0,0,0,0).

8. Sa se arate ca ecuatia
$$y^2 = 5x^2 + 6$$
nu are radacini intregi.
Indicatie. Sa se examineze ecuatia dupa modulo 4.

9. Sa se arate ca ecuatia
$$x^3 = 2 + 3y^2$$
nu are solutii intregi.
Indicatie. Sa se compare dupa modulo 9.

10. Sa se arate ca ecuatia
$$x^4 + y^6 + z^{12} = t^4$$
poseda o infinitate de solutii intregi.
Indicatie. Sa se parametrizeze ecuatia

11. Sa se arate ca ecuatia
$$x^2 - 3y^2 = 1$$
poseda o inifinitate de solutii intregi.
Indicatie. Sa se utilizezeee o relatie de recurenta pentru radacini.

12. Sa se rezolve in **Z** ecuatia
$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$
Indicatie. Sa se reprezinte sub forma $(2x+1)^2 = (2y^2+y+1)^2 - (y^2-2y)$.
Raspuns: $(0,-1)$, $(-1,-1)$, (0,0), $(-1,0)$, $(5,2)$, $(-6,2)$.

13. Sa se determine radacinile intregi pozitive ale ecuatiei
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3.$$
Inidicatie. Sa se utilizeze inegalitatea Cauchy despre medii.
Raspuns: (1,1,1).

14. Sa se rezolve in numere intregi pozitive ecuatia
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p},$$
unde p este un parametru si p este un numar prim mai mare decat 2.
Raspuns: $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p(p+1)}{2}\right)$, $\left(\frac{p(p+1)}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$.