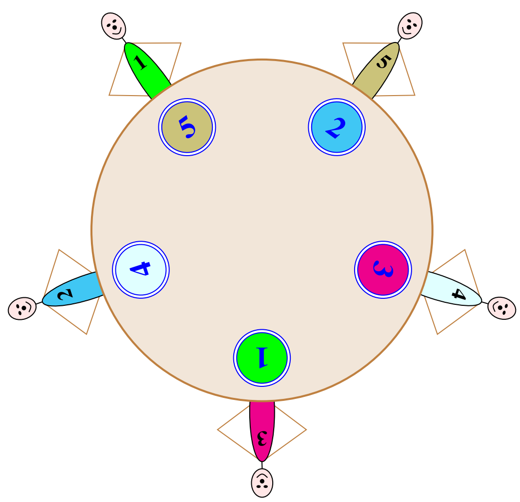
CONSTANTIN CIUBOTARU

ELEMENTE DE MATEMATICĂ DISCRETĂ PENTRU INFORMATICIENI



Chișinău 2023

Universitatea de Stat din Moldova

Institutul de Matematică și Informatică “Vladimir Andrunachievici”

Constantin Ciubotaru

ELEMENTE DE MATEMATICĂ DISCRETĂ PENTRU INFORMATICIENI

Chișinău 2023

Cuprins

***

Prefață

***

Pe parcursul mai multor ani autorul a predat cursurile “Tehnici de progmare”, “Limbaje formale și automate“, “Proiectarea compilatoarelor“, “Programarea funcțională” la Universitatea de Stat din Moldova și Universitatea Tehnică a Moldovei. Deseori o bună parte din studenți nu aveau cunoștințele de bază necesare, nefiind familiarizați cu noțiunile fundamantale ale matematicii discrete ceea ce provoca abateri pentru unele recapitulări și explicații suplimentare. Manualul prezent are drept scop lichidarea acestor goluri servind drept bază pentru un curs normativ la specialitățile informatice, dar și ca suport pentru autoinstruire. Subiecte abordate: mulțimi și operații asupra lor, relații și funcții, logică matematică și algebră Booleană, grafuri, elaborarea algoritmilor ș.a. Concomitent cu principalele concepte, definiții și metode, manualul include exemple, probleme și exerciții pentru lucrul individual cu rezolvări și soluții.

Manualul poate fi recomandat atât studenților, cât și elevilor de liceu. Autorul speră că manualul va constitui un suport eficient pentru recapitularea materialului și crearea abilităților de bază pentru studierea disciplinelor informatice.

CAPITOLUL 1

Mulțimi, operații asupra mulțimilor

***

1.1 Mulțimi, elemente, submulțimi

Vom considera că mulțimea este o colecție neordonată de obiecte arbitrare distincte, care se mai numesc elemente ale mulțimii. Această “definiție” este una intuitivă, naivă, dar suficientă pentru expunerea de mai departe. Mulțimile pot conține un număr finit sau infinit de elemente. Cea mai simplă metodă de definire a unei mulțimi este enumerarea elementelor separate prin virguli și cuprinse între “{” și “}”. Vom nota mulțimile prin litere mari $A, B, C, \ldots$, posibil indexate.

Mulțimea nu trebuie să conțină repetări de elemente. De exemplu, $\{1, a, 1, 2, b\}$ nu este o mulțime corectă, deoarece elementul "1" se repetă. Faptul că elementul x aparține mulțimii A îl vom nota prin $x \in A$ și vom citi: x aparține mulțimii A. Prin $A \ni x$ vom nota faptul că mulțimea A conține x, prin $x \notin A$ – x nu aparține mulțimii A, iar prin $A \not\ni x$ – mulțimea A nu conține x.

Astfel, pentru mulțimile din Exemplul 1.1.1: $a \in A_1$, $C_1 \ni 9$, "grădina lui Ion" $\in A_1$, $3 \notin B_1$, $B_2 \not\ni 8$.

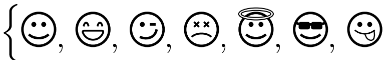
Să menționăm că ”grădina lui Ion” este un element distinct al mulțimii A_1.

Exemplul 1.1.1.

$A_1 = \{a, 2018, \text{”100011”}, \text{”grădina lui Ion”}, abcd, \text{mulțime}\}$,
$A_2 = \{a, b, \{2, 3\}, d\}, A_3 = \{1, \{2, 3\}, \varnothing, a\}$
$B_1 = \{1, a, 2, b\}, B_2 = \{1, 2, a, b\}$,

$C_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, C_2 = \{1, 2, 3\}$

$LCV = \{$ , ,  $\}$

$EMOTICON = \{$  $\}$

Mulțimile A și B sunt *egale*, dacă conțin exact aceleași elemente. Notăm aceasta prin $A = B$. În caz contrar $A \neq B$ și mulțimile se numesc *disjuncte* . De exemplu, $B_1 = B_2$, $C_1 \neq A_1$, $C_1 \neq C_2$.

Mulțimea care nu conține nici un element se numște *mulțime vidă* și se notează prin $\varnothing$ sau $\{\}$. Dacă toate elementele mulțimii A se conțin în mulțimea B vom spune că A este submulțime a mulțimii B și vom nota aceasta prin $A \subseteq B$, în caz contrar vom nota $A \nsubseteq B$. Dacă avem $A \subseteq B$ și B conține cel puțin un element care nu aparține mulțimii A, atunci A se numește *submulțime proprie* a mulțimii B și se notează prin $A \subset B$ (sau $B \supset A$) . Faptul că A nu este submulțime proprie a mulțimii B îl vom nota prin $A \not\subset B$ (sau $B \not\supset A$).

De exemplu,
$B_1 \subseteq B_2$, $B_2 \subseteq B_1$,$B_1 \supset B_2$, $B_2 \supset B_1$, $C_2 \subseteq C_1$, $C_2 \subset C_1$, $B_1 \nsubseteq C_2$, $B_1 \not\subset C_1$.

Se poate afirma că, dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci $A = B$ și invers, dacă $A = B$, atunci $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$. Anume aceasta este tehnica principală de demonstrare a egalității mulțimilor. Deoarece elementele unei mulțimi sunt obiecte arbitrare, unele elemente pot fi, la rândul lor, mulțimi. De exemplu,

$$A_2 = \{a, b, \{2, 3\}, d\}, A_3 = \{1, \{2, 3\}, \varnothing, a\}$$

Astfel, $\{2, 3\} \in A_2, \{2, 3\} \nsubseteq A_2, \varnothing \in A_3, \varnothing \subseteq A_3$.

Conform definiției submulțimii, orice mulțime este și submulțime pentru ea înseși. Astfel, $A \subseteq A$, pentru orice mulțime A. Să nu confundăm "$\subseteq$" cu "$\in$"! Vom considera în continuare (prin definiție) că mulțimea vidă $\varnothing$ este submulțime pentru orice mulțime, adică $\varnothing \subseteq A$, $\varnothing \subseteq \varnothing$ (dar $\varnothing \notin \varnothing$).

Numărul de elemente ale mulțimii A este o caracteristică importantă a mulțimii, se numește *număr cardinal* (cardinalitate, putere) și se notează prin $card(A)$. Astfel, $card(A_2) = 4, card(A_3) = 4$, $card(A_1) = 6$, $card(\varnothing) = 0$. Deseori $card(A)$ se notează prin $|A|$.

Mulțimile A și $\varnothing$ se numesc *submulțimi improprii* ale mulțimii A. Toate celelalte submulțimi ale mulțimii A vor fi submulțimi proprii.

Operând cu aplicații ale mulțimilor pentru un domeniu concret uneori este comod să se considere că există o mulțime ”mare”, care conține ca submulțimi toate mulțimile folosite în această aplicație. De obicei, această mulțime se numește mulțime universală și se notează prin U.

După cum s-a relatat mai sus, mulțimea nu poate să conțină repetări de elemente. Însă, în unele situații, este comod să se admită repetări de elemente. De exemplu, mulțimea divizorilor primi ai numărului 504 este comod să se scrie ca {2,2,2,3,3,7}. Mulțimile care admit repetări de elemente se numesc *multiseturi*. La fel ca și în cazul mulțimilor, ordinea elementelor nu este relevantă. Astfel, {2,2,2,3,3,7}={2,3,7,2,3,2}. Numărul de repetări ale elementului în multiset se numește *multiplicitate* a acestui element. Astfel, 2 are multiplicitatea 3, 3 – multiplicitatea 2, 7 – multiplicitatea 1.

1.2 Moduri de definire a mulțimilor

Prin enumerare

Dacă mulțimea conține un număr finit de elemente, atunci ea se definește simplu prin enumerarea elementelor: $A_1, A_2, A_3, 2^{C_2}$. Prin enumerare putem defini și mulțimi infinite în cazul când este clară legitatea formării elementelor. De exemplu, mulțimile folosite frecvent în matematică:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – mulțimea numerelor naturale;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – mulțimea numerelor naturale plus 0;
- $\mathbb{Z} = \{0, \text{-}1, 1, \text{-}2, 2, \text{-}3, 3, \ldots\}$ – mulțimea numerelor întregi;
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ – mulțimea numerelor raționale (de exemplu, $\frac{2}{3}$, $\frac{\text{-}23}{11}$) ;
- $\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale (de exemplu, 5, $\frac{2}{3}$, 3.14, $\sqrt{2}, \pi$);
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $\mathbb{A} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ – seria armonică.

Prin proprietatea caracteristică

Mulțimea poate fi definită și cu ajutorul unei proprietăți (funcții) caracteristice. Fie $p(x)$ un predicat care fiind aplicat asupra lui x întoarce ca rezultat valoarea *fals* sau *adevăr* (0 sau 1). În așa caz mulțimea A poate fi definită ca mulțimea tuturor elementelor x pentru care $p(x)$ este adevărat. Se notează prin

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

Exemplul 1.2.1.

- $A_7 = \{n \mid n \in \mathbb{N}_0, n \leq 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- $A_{2k} = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2, \text{-}2, 4, \text{-}4, \ldots\}$ – mulțimea numerelor pare.
- $A_{3k} = \{m \mid m = 3q, q \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, \text{-}3, 6, \text{-}6, \ldots\}$.
- $A_r = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 2x^3 + x^2 - x = 0\} = \{-1, 0\}$.

Prin generare

În acest caz se definește un algoritm, care generează elementele mulțimii. Să construim algoritmul care generează toate numerele Fibonacci mai mici ca $n, n \geq 2$.

Algoritmul 1.2.1 Generarea numerelor Fibonacci

0. ***start***

1. $i := 0, F := \{a_i\} = \{0\}$

2. $i := 1, F := F \cup \{a_i\} = \{0, 1\}$

3. $i := i + 1$

4. $F := F \cup \{a_{i-2} + a_{i-1}\}$

5. ***if*** $i \leq n$ ***goto*** 3

6. ***return*** F

7. ***stop***

Prin recursie (recurență)

Să examinăm în continuare funcția Ackermann, folosită în teoria calculabilității. Definiția funcției este următoarea:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & \text{dacă } m = 0; \\ A(m-1, 1), & \text{dacă } m > 0, n = 0; \\ A(m-1, A(m, n-1)), & \text{dacă } m > 0, n > 0. \end{cases}$$

Folosind această definiție putem construi, de exemplu, mulțimea tuturor valorilor funcției Ackermann pentru $2 \leq m \leq 3$, $3 \leq n \leq 12$. Dacă vom nota elementele mulțimii prin $(m, n, A(m, n))$ vom obține:

$$
\begin{array}{llll}
A_{mn} = \{ & & & \\
(2,3,9), & (2,8,19), & (3,3,61), & (3,8,2045), \\
(2,4,11), & (2,9,21), & (3,4,125), & (3,9,4093), \\
(2,5,13), & (2,10,23), & (3,5,253), & (3,10,8189), \\
(2,6,15), & (2,11,25), & (3,6,509), & (3,11,16381), \\
(2,7,17), & (2,12,27), & (3,7,1021), & (3,12,32765)\ \}
\end{array}
$$

1.3 Cardinalitatea mulțimilor

Câte submulțimi distincte poate avea o mulțime finită de elemente? Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $card(A) = k$, $k \geq 1$. Vom arăta că există 2^k submulțimi distincte ale mulțimii A. Această afirmație poate fi ușor demonstrată adresându-ne informaticii. Să examinăm toate secvențele posibile de cifre binare (0 sau 1) de lungimea k. Secvența (0,0,...,0) sau mai simplu 00...0, va corespunde mulțimii $\varnothing$, iar secvența 11...1 - mulțimii A. Toate celelalte secvențe vor defini submulțimi distince alcătuite după regula: elementul a_i se include în submulțime, dacă poziția i a secvenței este 1. Deoarece există 2^k secvențe diferite (corespund reprezentărilor binare ale numerelor $0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$), există 2^k submulțimi diferite.

De exemplu, $A = \{a, b, c\}$, $k = 3$. Secvențele binare de lungimea 3 sunt: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Respectiv, obținem $2^3 = 8$ submulțimi distincte: $\varnothing$, $\{c\}$, $\{b\}$, $\{c, b\}$, $\{a\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$.

Mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii A se notează prin 2^A. Astfel,

$2^{C_2} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$2^{A_3} = \{\varnothing, \{1\}, \{\{2,3\}\}, \{\varnothing\}, \{a\}, \{1, \{2,3\}\}, \{1, \varnothing\}, \{1, a\}, \{\{2,3\}, \varnothing\}, \{\{2,3\}, a\}, \{\varnothing, a\}, \{1, \{2,3\}, \varnothing\}, \{1, \{2,3\}, a\}, \{1, \varnothing, a\}, \{\{2,3\}, \varnothing, a\}, \{1, \{2,3\}, \varnothing, a\}\}$

Dar cum se procedează în cazul mulțimilor infinite? Care este cardinalitatea unei astfel de mulțimi? Și în acest caz există infinit "mai mic" și infinit "mai mare". Un rol important aici revine mulțimii numerelor naturale $\mathbb{N}$. Cardinalul mulțimii $\mathbb{N}$ se notează prin $\aleph_0$ și se citește "alef zero" ($\aleph$ este prima literă a alfabetului ebraic). Două mulțimi se numesc *echipotente* , dacă ele au același număr cardinal. Mulțimea A se numește *numărabilă*, dacă ea este echipotentă cu orice submulțime a mulțimii $\mathbb{N}$. Se poate spune că mulțimea este numărabilă dacă elementele ei pot fi enumerate: $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Rezultă că orice mulțime finită este numărabilă. Mulțimile $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, A_4, A_{2k}, A_{3k} sunt mulțimi numărabile, adică sunt echipotente cu mulțimea numerelor naturale. Mulțimile numărabile se mai numesc *discrete*.

Mulțimea $\mathbb{R}$ nu mai este numărabilă. Este suficient să se demonstreze că nu este numărabilă mulțimea numerelor reale de pe segmentul $[0, 1]$ (teorema lui Cantor, metoda diagonalizării). Această teoremă se demonstrează simplu prin reducere la absurd.

Să presupunem că mulțimea numerelor reale de pe segmentul $[0, 1]$ este numărabilă. Astfel, toate numerele reale de pe segmentul $[0, 1]$ pot fi enumerate: $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ Așa cum $0 < a_i < 1$, a_i poate fi reprezentat ca $a_i = 0, \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ii}, \ldots$ Aici $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ii}, \ldots$ sunt cifrele din reprezentarea zecimală a numărului a_i. Aceste numere pot fi reprezentate într-0 tabelă (Tabela 1.3.1), unde au fost evidențiate elementele de pe diagonală - α_{ii}. Construim un număr nou, $a = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i \ldots$ în

a_1	$\boxed{\alpha_{11}}$	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\ldots$
a_2	α_{21}	$\boxed{\alpha_{22}}$	α_{23}	α_{24}	α_{25}	$\ldots$
a_3	α_{31}	α_{32}	$\boxed{\alpha_{33}}$	α_{34}	α_{35}	$\ldots$
a_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	$\boxed{\alpha_{44}}$	α_{45}	$\ldots$
a_5	α_{51}	α_{52}	α_{53}	α_{44}	$\boxed{\alpha_{55}}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\ldots$

Tabela 1.3.1: Metoda diagonalizării Cantor

modul următor: dacă $\alpha_{ii} = 0$, atunci $\alpha_i = 1$, în caz contrar, $\alpha_i = 0$. Numărul astfel construit nu poate fi întâlnit în tabela noastră: $a \neq a_1$, deoarece $\alpha_{11} \neq \alpha_1$, $a \neq a_2$, deoarece $\alpha_{22} \neq \alpha_2$ ș.a.m.d. Acest raționament ne demonstrează că numere reale pe segmentul $[0, 1]$ sunt mai multe de cât putem enumera. Concluzia generală: mulțimea numerelor reale de pe segmentul $[0, 1]$ este nenumărabilă.

Să menționăm că putem obține mult mai multe numere care nu vor fi incluse în tabelă. De exemplu, drept α_i putem lua orice cifră care nu coincide cu α_{ii}. În această demonstrare este important faptul că mulțimea acestor numere, dar și reprezentarea lor, de exemplu $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ sau $\frac{1}{2} = 0,500\ldots$ sunt infinite.

Cardinalitatea mulțimii $\mathbb{R}$ se notează prin $card(\mathbb{R}) = \aleph_1$ și se mai numește "puterea continuului".

1.4 Operații asupra mulțimilor

Asupra mulțimilor se definesc următoarele operații:

- ***Reuniunea***. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;

- ***Intersecția***. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- ***Diferența***. $A \setminus B$ (sau $A - B$) $= \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- ***Diferența simetrică***. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Diferența simetrică a mulțimilor A și B include toate elementele care aparțin doar uneia din mulțimile A sau B. Evident $A \triangle B = B \triangle A$, $A \triangle \varnothing = A$, $A \triangle A = \varnothing$.
- ***Complementara***. Fie U o mulțime universală și $A \subset U$. Complementara mulțimii A în raport cu mulțimea U (se notează $\overline{A}$) se definește în modul următor: $\overline{A} = U \setminus A$;
- ***Produsul cartezian***. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ – mulțimea tuturor perechilor ordonate (x, y), $x \in A$, $y \in B$. În general, produsul cartezian nu este comutativ, $A \times B \neq B \times A$.

Exemplul 1.4.1.

Fie
$A_2 = \{a, b, \{2,3\}, d\}, A_3 = \{1, \{2,3\}, \varnothing, a\}$,
$B_1 = \{1, a, 2, b\}, B_2 = \{1, 2, a, b\}$,
$C_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, C_2 = \{1, 2, 3\}$.
Obținem:
$B_1 \cup C_2 = \{1, a, 2, b, 3\}$, $C_1 \cup C_2 = C_1$,
$A_2 \cup A_3 = \{a, b, \{2,3\}, d, 1, \varnothing\}$,
$B_1 \cap C_2 = \{1, 2\}$, $A_2 \cap A_3 = \{a, \{2,3\}\}$ $C_1 \cap C_2 = C_2$, $B_1 \setminus B_2 = \varnothing$,
$B_1 \setminus C_2 = \{a, b\}$, $C_1 \setminus C_2 = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A_2 \setminus A_3 = \{b, d\}$, $A_3 \setminus A_2 = \{1, \varnothing\}$,
$A_2 \triangle A_3 = A_3 \triangle A_2 = \{b, d, 1, \varnothing\}$.
Dacă C_1 este mulțime universală, atunci
$\overline{C_2} = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = C_1 \setminus C_2$.

$$B_1 \times C_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (a,1), (a,2), (a,3), (2,1), (2,2), (2,3), (b,1), (b,2), (b,3)\},$$

$$C_2 \times B_1 = \{(1,1), (1,a), (1,2), (1,b), (2,1), (2,a), (2,2), (2,b), (3,1), (3,a), (3,2), (3,b)\}.$$

Observăm că $B_1 \times C_2 \neq C_2 \times B_1$.

Operațiile reuniune, intersecție și produs cartezian pot fi extinse asupra unui număr arbitrar de mulțimi $A_1, A_2, \ldots A_n, n \in \mathbb{N}, n > 2$:

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

- $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in A_i,\ i \in \{1, 2, \ldots n\}\}$. Elementul ordonat $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ se mai numește *tuplu* . Dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, atunci vom nota $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$.

1.5 Partiționarea mulțimilor

Definiția 1.5.1.

Mulțimile M_1 și M_2 se numesc *disjuncte*, dacă $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Definiția 1.5.2.

Fie A o mulțime arbitrară. Mulțimile $M_1, M_2, \ldots M_k$ alcătuiesc o partiție pentru mulțimea A, dacă

- $M_i \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq k$.
- orice două mulțimi M_i, M_j sunt disjuncte, $i \neq j, 1 \geq i, j \leq k$
- $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k = A$

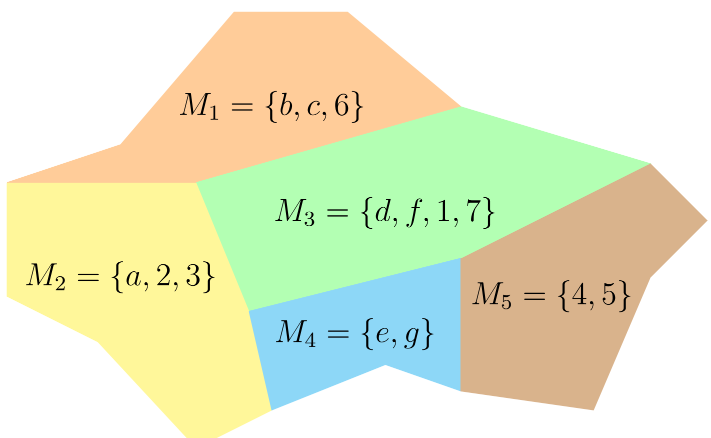


Figura 1.5.1: Partiția mulțimii $A = \{a, b, c, d, e, f, g, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
$A = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5$

Din definiție este evident că $M_1, M_2, \ldots M_k$ sunt submulțimi ale mulțimii A.

Exemplul 1.5.1.

Fie $A = \{a, b, 2, 3, d\}$. Atunci:

a) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{3, d\}$, $M_3 = \{b\}$ - nu este partiție, deoarece $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{a, 3, d, b\} \neq A$.

b) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{3, d\}$, $M_3 = \{a, b, 2\}$ - nu este partiție, deoarece M_1 și M_2 nu sunt disjuncte, $M_1 \cap M_2 = \{a\}$, cu toate că $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = A$.

c) $M_1 = \{a, d\}$, $M_2 = \{b, 3\}$, $M_3 = \{2\}$ - este partiție.

În Figura 1.5.1 prezentăm schematic noțiunea de partiție.

Exemplul 1.5.2.

Să se construiască toate partițiile posibile pentru mulțimea $A = \{a, b, c\}$.

$M_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
$M_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
$M_3 = \{\{a, c\}, \{b\}\}$
$M_4 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$
$M_5 = \{\{a, b, c\}\}$

1.6 Proprietăți. Diagrame Venn

Să formulăm câteva proprietăți ale operațiilor definite mai sus. Fie A, B, C – mulțimi arbitrare, iar U - mulțime universală, $A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U$. Tabela 1.6.2. Evitarea ambiguităților la efectuarea operațiilor se asigură cu ajutorul parantezelor. Pentru ilustrarea (demonstrarea) operațiilor și proprietăților se utilizează diagramele Venn, figura 1.6.2. Suprafața hașurată corespunde rezultatului final.

Proprietatea	**Denumirea**
$\varnothing \cup A = A,\ \varnothing \cap A = \varnothing$	Legea contradicției
$A \cup U = U,\ A \cap U = A$	Legea terțului exclus
$A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \varnothing$	Complementaritate
$\overline{\overline{A}} = A$	Legea involuției
$A \setminus \varnothing = A,\ A \setminus A = \varnothing,\ A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Diferența
Dacă $A \subseteq B$, iar $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$	Tranzitivitate
Dacă $A \subseteq C$, atunci $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	Modularitate
$A \cup A = A,\ A \cap A = A$	Idempotență
$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$	Absorbție
$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$	Comutativitate
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociativitate
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivitate
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Legile lui De Morgan

Tabela 1.6.2: Operații asupra mulțimilor. Properietăți

Exemplul 1.6.1.

Să demonstrăm proprietatea diferenței: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Demonstrare analitică.

(i) $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$.

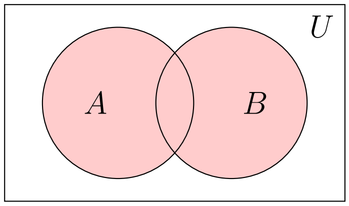
Fie $x \in A \setminus B$. Rezultă că $x \in A$, dar $x \notin B$, adică $x \in A$ și $x \in \overline{B}$, de unde rezultă că $x \in A \cap \overline{B}$.

(ii) $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B$.

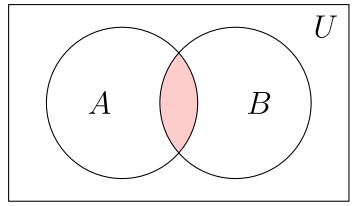
Fie $x \in A \cap \overline{B}$. Rezultă că $x \in A$ și $x \in \overline{B}$ sau $x \in A$ și $x \notin B$. Așadar, $x \in A \setminus B$.

Demonstrare prin diagrame Venn.

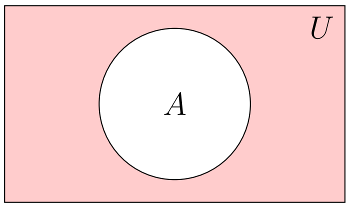
Este sufucient să comparăm figura 1.6.3 (b) cu figura 1.6.2 (d).



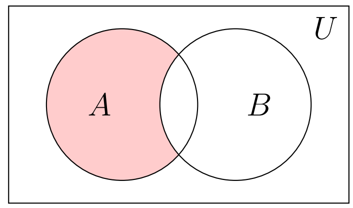
(a) $A \cup B$



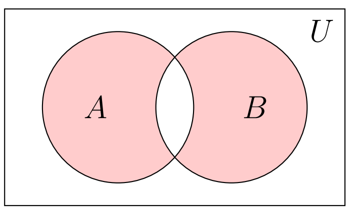
(b) $A \cap B$



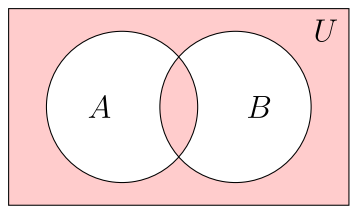
(c) $\overline{A}$



(d) $A \setminus B$

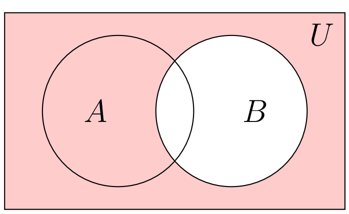


(e) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A = A \bigtriangleup B$

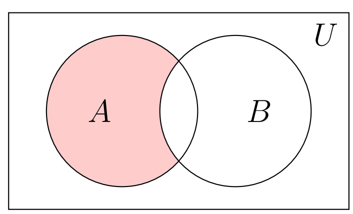


(f) $\overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$

Figura 1.6.2: Diagrame Venn



(a) $\overline{B}$



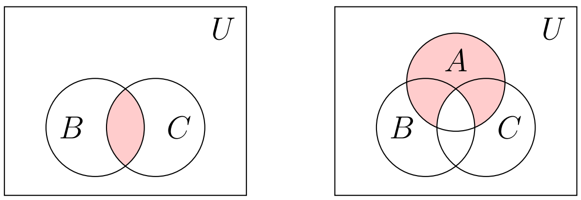
(b) $A \cap \overline{B}$

Figura 1.6.3: Diagrame Venn. Proprietatea diferenței

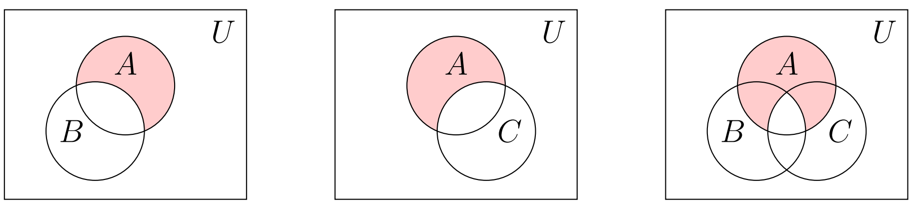
Exemplul 1.6.2.

Să demonstrăm distributivitatea diferenței:
$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

$A\setminus(B\cap C)=A\cap(\overline{B\cap C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. Am aplicat proprietatea diferenței, legea lui De Morgan și distributivitatea intersecției. În Figura 1.6.4 prezentăm diagramele Venn care ilustrează această identitate.



(a) $B\cap C$ (b) $(A\setminus(B\cap C)$



(c) $A\setminus B$ (d) $A\setminus C$ (e) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Figura 1.6.4: Diagrame Venn pentru $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Exemplul 1.6.3.

La o competiție sportivă la proba sărituri în lungime s-au înregistrat 15 persoane (mulțimea A), la proba sărituri în înălțime – 20 de persoane (mulțimea B), iar 8 persoane din cei înregistrați vor participa la ambele probe (mulțimea C).

a) câte persoane vor participa doar la sărituri în lungime
b) câte persoane vor participa doar la sărituri în înălțime
c) câte persoane vor participa cel puțin la o probă
d) câte persoane vor participa exact la una din cele două probe.

Să menționăm mai întâi că $C\subseteq A$, $C\subseteq B$, $C=A\cap B$.

a) La sărituri în lungime s-au înregistrat 15 persoane, 8 dintre care vor participa și la sărituri în înălțime. Astfel, 15-8=7 persoane vor participa doar la sărituri în lungime. Aceasta va fi mulțimea $A \setminus C$.

b) Analogic, exclusiv la sărituri în înălțime vor participa doar 20-8=12 persoane. Aceasta va fi mulțimea $B \setminus C$.

c) Aici vom include persoanele care participă la o singură probă, dar și persoanele care participă la ambele probe. Astfel vom calcula reuniunea: $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \cup C$. În total vom avea 7+12+8=27 persoane. Este exact numărul total al participanților la competiție.

d) Am calculat deja numărul persoanelor care participă exact la o probă: 7 – la sărituri în lungime și 12 – la sărituri în înălțime. Asadar, exact la una din probe vor participa 7+12=19 persoane. Observăm că aceasta corespunde diferenței simetrice a mulțimilor A și B, $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Deoarece $C = A \cap B$, se poate demonstra că $A \bigtriangleup B = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

1.7 Programarea operațiilor asupra mulțimilor

Spre deosebire de matematică unde mulțimile reprezintă un instrument conceptual foarte important, în informatică, în mod special în limbajele de programare, mulțimile privite ca structuri de date sunt mai puțin utilizate. Menționăm doar limbajul specializat SETL [1] (SET Language) care a apărut în 1986 și prezența tipului predefinit de date "*mulțime*" în câteva limbaje de programare, de exemplu, PASCAL, PYTHON, C++.

În realitate este recunoscut faptul că utilizarea tipului de date "*mulțime*" și a operațiilor masive asupra acestora ar constitui o caracteristică valoroasă a limbajelor de programare de nivel înalt. Aceasta ar îmbunătăți semnificativ viteza și productivitatea programării, claritatea și lizibilitatea programelor, dar ar provoca și o anumită pierdere de eficiență. Cu certitudine aceasta este principala cauză care limitează utilizarea mulțimilor în limbajele de programare. Pe de altă parte, prezența acestor facilități ar fi un motiv pentru a considera aceste limbaje nu ca instrumente pentru programare efectivă, dar ca instrumente pentru elaborarea operativă a prototipurilor programelor și algoritmilor, unde eficiența nu este o cerință primordială.

Cu toate acestea, practic toate limbajele de programare includ posibilități de codificare a mulțimilor ca structuri de date și de realizare a operațiilor asupra mulțimilor. Astfel, mulțimile pot fi reprezentate cu ajutorul vectorilor (tablourilor unidimensionale), listelor, secvențelor (tuplurilor), șirurilor. Am văzut mai sus că mulțimile pot fi reprezentete prin secvențe binare. De exemplu, dacă este dată mulțimea uni-

$$\begin{array}{r} \vee\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1 \end{array}$$

(a) $A_{01} \vee B_{01}$
$(A \cup B)$

$$\begin{array}{r} \wedge\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

(b) $A_{01} \wedge B_{01}$
$(A \cap B)$

$$\begin{array}{r} \oplus\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \end{array}$$

(c) $A_{01} \oplus B_{01}$
$(A \bigtriangleup B)$

$$\begin{array}{r} \wedge\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ \hline 0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

(d) $A_{01} \wedge \neg B_{01}$
$(A \setminus B)$

Figura 1.7.5: Operații asupra mulțimilor

versală $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, atunci orice submulțime a mulțimii U poate fi reprezentată ca o secvență binară de lungimea 8, $8{=}card(A)$. De exemplu, pentru $A = \{a, b, d, g\}$ secvența binară va fi $A_{01} = 11010010$, pentru $B = \{a, c, f, g, h\}$ – $B_{01} = 10100111$. În acest caz operațiile asupra mulțimilor pot fi redise la operații logice asupra secvențelor binare considerând 1 – "*adevăr*", iar 0 – "*fals*". Astfel, pentru a calcula complementara unei mulțimi calculăm negația secvenței binare corespunzătoare. Astfel, $\neg A_{01} = \neg 11010010{=}00101101$, $\neg B_{01} = \neg 10100111{=}01011000$, respectiv, $\overline{A} = \{c, e, f, h\}$, $\overline{B} = \{b, d, e\}$.

Operațiile reuniune ($\cup$), intersecție ($\cap$) și diferență simetrică ($\bigtriangleup$) se programează prin disjuncție ($\vee$), conjuncție ($\wedge$) și disjuncție exclusivă ($\oplus$). Scăderea mulțimilor ($\setminus$) se asociază prin proprietatea scăderii $A \setminus B{=}A \cap \overline{B}$ cu $A_{01} \wedge \neg B_{01}$.

Din figura 1.7.5 observăm că: $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}$, $A \cap B = \{a, g\}$, $A \bigtriangleup B = \{b, c, d, f, h\}$, $A \setminus B = \{b, d\}$.

Dacă nu suntem presați de eficiență, putem utiliza pentru programarea mulțimilor un limbaj funcțional, mulțimile fiind reprezentate prin liste. De exemplu, în limbajul Common Lisp avem reprezentarea: $A = (a\ b\ d\ g)$, $B = (a\ c\ f\ g\ h)$. Această codificare poate fi aplicată și pentru multiseturi. De exemplu, $M = (a\ b\ c\ c\ g\ a\ b\ c\ e)$. Deoarece ordinea elementelor este irelevantă, putem scrie $M = (a\ a\ b\ b\ c\ c\ c\ e\ g)$, respectând ordinea elementelor din mulțimea universală. În acest caz multiseturile pot fi reprezentate, prin analogie cu secvențele binare, prin secvența (lista) multiplicităților elementelor. Pentru exemplul nostru obținem $M_m = (2\ 2\ 3\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)$.

Mai menționăm că în COMMON LISP este definită construcția iterativă

$(DOLIST\ (X\ M)$
  operații cu X
$)$

care este comodă pentru parcurgerea elementelor (X) listei (mulțimii) M, dar și un set de operații predefinite asupra mulțimilor:

- $(MEMBER\ X\ M)$ – predicat, verifică apartenența elementului X mulțimii M;
- $(ADJOIN\ X\ M)$ – inserează elementul X în mulțimea M;
- $(UNION\ M1\ M2)$ – calculează $M1 \cup M2$;
- $(INTERSECTION\ M1\ M2)$ – calculează $M1 \cap M2$;
- $(SET{-}DIFFERENCE\ M1\ M2)$ – calculează $M1 \setminus M2$;
- $(SET{-}EXCLUSIVE{-}OR\ M1\ M2)$ – calculează $M1 \triangle M2$;
- $(SUBSETP\ M1\ M2)$ – predicat, verifică $M1 \subseteq M2$;

.

1.8 Exerciții și probleme

1. **Diferența mulțimilor.**
   Să se demonstreze identitățile:

   1.a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
   1.b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$
   1.c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2. **Diferența simetrică.**
   Să se demonstreze identitățile:

   2.a) $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
   2.b) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
   2.c) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   2.d) $\overline{(A \triangle B)} = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cap A)$
   2.e) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
   2.f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$. Asociativitatea diferenței simetrice.

2.g) $A \triangle (A \triangle B) = B$

3. Cardinalitatea mulțimilor.

În finalul unui concurs pentru cei 2 finaliști (A și B), juriul (mulțimea J) a votat în modul următor:

- $\frac{1}{2}$ din membrii juriului au votat pentru A (mulțimea J_A),
- $\frac{2}{3}$ – pentru B (mulțimea J_B),
- 4 membri au votat pentru ambii finaliști (mulțimea J_4), iar
- 2 voturi au fost nevalabile (mulțimea J_2).

Câte persoane au fost în juriu?

4. Produsul cartezian.

Să se demonstreze identitățile:

4.a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C), A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C), A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
Distributivitatea produsului cartezian.

4.b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

4.c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

4.d) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times B) \cap (C \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times D)$.

4.e) $\overline{(A \times B)} = (\overline{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{A} \times B) \cap (A \times \overline{B})$.

4.f) Să se construască $A \times B \times C$ pentru
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{c, d\}$.

1.9 Soluții

1. Diferența mulțimilor.

1.a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
Să transformăm mai întâi partea stângă a identității aplicând proprietatea diferenței și legea lui De Morgan. Obținem:
(st) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$.

Pentru partea dreaptă aplicăm proprietatea diferenței (de două ori) și proprietatea de asociativitate:

(dr) $(A \backslash B) \backslash C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$.

1.b) $(A \cap B) \backslash C = A \cap (B \backslash C)$.

(st) $(A \cap B) \backslash C = (A \cap B) \cap \overline{C} = A \cap B \cap \overline{C}$.

(dr) $A \cap (B \backslash C) = A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$.

Am folosit proprietatea diferenței și asociativitatea intersecției.

1.c) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$, $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

$(A \cup B) \backslash C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}))$. Am aplicat proprietatea diferenței, comutativitatea și distributivitatea intersecției.

$(A \cap B) \backslash C = (A \cap B) \cap \overline{C} = A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap (B \backslash C)$.

Am aplicat proprietatea diferenței și asociativitatea intersecției.

2. Diferența simetrică..

2.a) $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Am aplicat definiția diferenței simetrice și proprietatea diferenței.

2.b) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Transformăm partea dreaptă a identității aplicând identitatea 2.a) demonstrată mai sus, distributivitatea reuniunii și a intersecției.

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) =$

$(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \varnothing =$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$.

2.c) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Transformăm partea dreaptă a identității aplicând proprietatea diferenței, legea lui De Morgan, distributivitatea reuniunii și a intersecției, identitatea 2.a).

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$

$(A \cap (\overline{A} \cup$

$nB)) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) =$

$\varnothing \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \varnothing = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \triangle B$.

2.d) $\overline{(A \triangle B)} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
Aplicăm identitatea 2.a) și legea lui De Morgan.
$\overline{(A \triangle B)} = \overline{((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B))} = \overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(\overline{A} \cap B)} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

2.e) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (distributiviatea intersecției față de diferența simetrică).
Transfornăm partea stângă aplicând identitatea 2.a), distributivitatea și asociativitatea intersecției:
(st) $A \cap (B \triangle C) = A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)) =$
$(A \cap (B \cap \overline{C})) \cup (A \cap (\overline{B} \cap C)) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$.
Transfornăm partea dreaptă aplicând identitatea 2.a), legea lui De Morgan, distributivitatea, comutativitatea și asociativitatea intersecției și reuniunii:
(dr) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}) \cup (\overline{(A \cap B)} \cap (A \cap C)) =$
$((A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap C)) =$
$((A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})) \cup (A \cap C \cap \overline{A} \cup (A \cap C \cap \overline{B})) =$
$\varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \varnothing \cup (A \cap \overline{B} \cap C) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$.
Rezultă: (st)=(dr).

2.f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (asociativitatea).
Transfornăm partea stângă aplicând identitățile 2.b), 2.d), distributivitatea, comutativitatea și asociativitatea intersecției și reuniunii:
(st) $A \triangle (B \triangle C) = (A \cup (B \triangle C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{(B \triangle C)} =$
$(A \cup ((B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}))) \cap (\overline{A} \cap ((\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B)) =$
$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup ((\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B))) =$
$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup B \cup \overline{C})$.
Transfornăm partea dreaptă aplicând identitățile 2.a), 2.d), distributivitatea, comutativitatea și asociativitatea intersecției și reuniunii:
(dr) $A \triangle (B \triangle C = (A \cap \overline{(B \triangle C)}) \cup (\overline{A} \cap (B \triangle C)) =$
$(A \cap ((\overline{B} \cup C) \cap (B \cup \overline{C})) \cup (\overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C))) =$
$(A \cap (((\overline{B} \cup C) \cap \overline{C}) \cup ((\overline{B} \cup C) \cap B))) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$
$(A \cap ((\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap B) \cup (B \cap C))) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$
$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \varnothing) \cup (A \cap \varnothing) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$
$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup B \cup \overline{C})$.
Rezultă: (st)=(dr).

2.g) $A \triangle (A \triangle B) = B$.
Se demonstrează simplu aplicând asociativitatea diferenței simetrice (identitatea 2.f)):
$A \triangle (A \triangle B) = (A \triangle A) \triangle B = \varnothing \triangle B = B$.

3. Cardinalitatea mulțimilor.

Trebuie să calculăm $card(J)$. Să observăm că, exclusiv pentru A, au votat $J_A \setminus J_4$ membri ai juriului, iar pentru B – exclusiv $J_B \setminus J_4$. Astfel, obținem egalitatea:

$$(J_A \setminus J_4) \cup (J_B \setminus J_4) \cup J_4 \cup J_2 = J$$

Dacă notăm $n = card(J)$, obținem ecuația:

$$(\frac{n}{2} - 4) + (\frac{2n}{3} - 4) + 4 + 2 = n$$

Rezolvând ecuația obținem $n = 12$.

4. Produsul cartezian.

4.a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C), A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C), A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
Distributivitatea produsului cartezian.
Să demonstrăm prima identitate. Celelalte se demonstrează analogic.
(i) $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$.
Fie $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Sunt posibile două cazuri:
1) $x \in A, y \in C$. Rezultă că $(x, y) \in (A \times C)$ sau
2) $x \in B, y \in C$, de unde rezultă că $(x, y) \in (B \times C)$.
(ii) $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$.
Fie $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Sunt posibile două cazuri:
1) $(x, y) \in (A \times C)$, rezultă că $(x, y) \in (A \cup B) \times C$ sau
2) $(x, y) \in (B \times C)$, de unde rezultă că $(x, y) \in (A \cup B) \times C$. Astfel, $(x, y) \in (A \cup B) \times C$

4.b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.
Vom aplica identitățile 4.a).
$(A \cup B) \times (C \cup D) = ((A \cup B) \times C) \cup ((A \cup B) \times D) =$
$((A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

4.c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(i) $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Fie $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$, deci $(x, y) \in (A \times B)$ și $(x, y) \in (C \times D)$. Rezultă că $x \in A, y \in B, x \in C, y \in D$ sau $x \in A \cap C,\ y \in B \cap D$. Prin urmare, $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(ii) $(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D)$.
Fie $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Rezultă că $x \in A, x \in C, y \in B, y \in D$ sau $(x, y) \in (A \times B)$ și $(x, y) \in (C \times D)$.
Astfel, $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

4.d) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times B) \cap (C \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times D)$.
Identitatea 4.c) stabilește $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Să transformăm în continuare partea dreaptă aplicând identitățile de distributivitate 4.a).
$(A \cap C) \times (B \cap D) = ((A \cap C) \times B) \cap ((A \cap C) \times D) =$
$(A \times B) \cap (C \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times D)$.

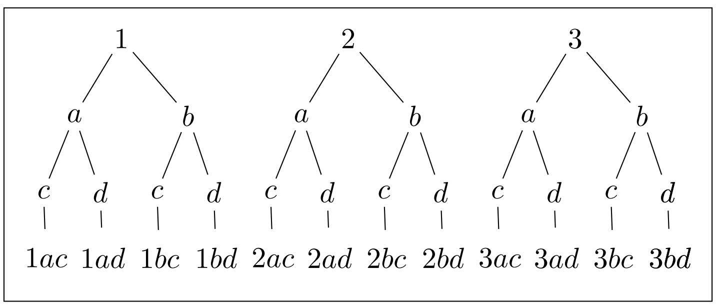


Figura 4.1: Produsul cartezian $A \times B \times C$

4.e) $\overline{(A \times B)} = (\overline{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{A} \times B) \cap (A \times \overline{B})$.
Conform definiției complementarei, $\overline{(A \times B)} = (U \times U) \setminus (A \times B)$. Așa cum $U = A \cup \overline{A}$ (sau $U = B \cup \overline{B}$) obținem:
$\overline{(A \times B)} = ((A \cup \overline{A}) \times (B \cup \overline{B})) \setminus (A \times B)$. În continuare transformăm partea dreaptă aplicând distributivitatea produsului cartezian, asociativitatea reuniunii și proprietatea $(A \cup B) \setminus B = A$. Obținem:
$((A \cup \overline{A}) \times (B \cup \overline{B})) \setminus (A \times B) = ((A \cup \overline{A}) \times B) \cup ((A \cup \overline{A}) \times \overline{B})) \setminus (A \times B) =$
$((A \times B) \cup (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \overline{B})) \setminus (A \times B) =$
$(\overline{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{A} \times B) \cap (A \times \overline{B})$.

Sunt adevărate și egalitățile: $\overline{(A \times B)} = ((A \cup \overline{A}) \times (A \cup \overline{A})) \setminus (A \times B)$,

$\overline{(A \times B)} = ((B \cup \overline{B}) \times (B \cup \overline{B})) \setminus (A \times B)$.

4.f) Să se construască $A \times B \times C$ pentru
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{c, d\}$.
$A \times B \times C = \{1ac, 1ad, 1bc, 1bd, 2ac, 2ad, 2bc, 2bd, 3ac, 3ad, 3bc, 3bd\}$ Metoda aplicată la generarea produsului cartezian este expusă în Figura 4.1. Observăm că $|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

1.10 Notițe bibliografice

Materialul expus mai sus ține de asa-numita teorie "naivă" a mulțimilor, propusă de matematicianul german Georg Cantor (1845 – 1918). Denumirea "naivă" a fost atribuită datorită faptului că ea poate genera o serie de situații contradictorii (paradoxuri) bazate pe lipsa unor definiții formale a noțiunii de mulțime și a modurilor de construire a mulțimilor.

Cel mai cunoscut rezultat care vine să confirme acest lucru este paradoxul matematicianului britanic Bertrand Russell (1872 – 1970). Pentru a demonstra că teoria "naivă" a mulțimilor enunțată de Cantor este inconsistentă, Russell a propus o mulțime specială, definită în modul următor. Fie $\mathcal{R}$ mulțimea tuturor mulțimilor A pentru care $A \notin A$, adică mulțimea A nu se conține ca element în A. Deoarece $\mathcal{R}$ este o mulțime, există două posibilități pentru $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ sau $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$. Să examinăm ambele situații

- $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$. Conform definiției mulțimii $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ poate fi inclusă în $\mathcal{R}$ doar dacă $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$. În cazul nostru $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, prin urmare avem o contradicție.

- $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$. Conform definiției, deoarece este dat $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, ar trebui să se îndeplinească $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, dar nu se îndeplinește – iarăși contradicție.

Rezultă că mulțimea $\mathcal{R}$ nu poate exista.

Iată și o formulare mai haioasă a paradoxului. În țara lui Papură Vodă a fost decretată legea: niciun primar nu poate să locuiască în orașul sau natal, toți primarii vor locui în Orașul Primarilor. Așa cum Orașul Primarilor are și el un primar, apare întrebarea: unde va locui primarul Orașului Primarilor?

CAPITOLUL 2

Relații și funcții

***

2.1 Noțiuni generale

După cum am văzut, mulțimea este o colecție neordonată de obiecte arbitrare distincte. Aspecte foarte importante ale oricărei mulțimi sunt relațiile dintre aceste obiecte. De exemplu, pentru o mulțime de numere este important să se stabilească următoarele relații: numerele sunt naturale, întregi, raționale, numărul m este mai mic ca numărul n, n este multiplu al lui m etc. Un obiect poate fi mai greu, altul mai ușor, unul poate fi roșu, altul verde. Pentru relațiile de familie – tată, fiu, soră, bunic etc. Alt exemplu: cuvântul „abracadabra” este în dicționar, iar cuvânul „arbacadabra” nu este. Cuvântul „abraziv” este în dicționar și e situat mai jos decât „abracadabra”.

Unele relații sunt reflexive, de exemplu „n este egal cu n”, pot fi simetrice. De exemplu, dacă „Ion este consătean cu Vasile”, atunci și „Vasile este consătean cu Ion”. Relațiile pot fi și tranzitive, de exemplu, dacă $x \geq y$ și $y \geq z$, atunci și $x \geq z$.

2.2 Abordare formală

Ca de obicei, matematica propune abordări formale, care vin să precizeze noțiunile intuitive, să stabilească niște proprietăți generice, niște clasificări. Se numește *relație n-ară* orice submulțime R a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Dacă tuplul $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$, vom zice că $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt în relația R. Dacă $R \subseteq A^n$, atunci R se numește *relație n-ară omogenă*. Un interes deosebit prezintă cazul $n = 2$. În acest caz $R \subseteq A_1 \times A_2$ și se numește *relație binară*. A_1 se numește *domeniu*, iar A_2 – *codomeniu*.

Dacă $R = A_1 \times A_2$, atunci relația R se numește *relație universală*, iar dacă $R = \varnothing$ – *relație vidă* .

Exemplul 2.2.1.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, c), (3, d)\}$, $R \subseteq A \times B$.

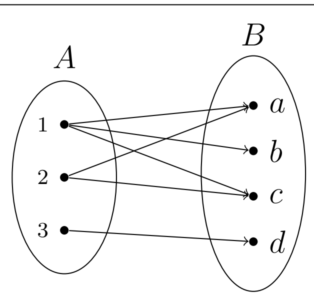
Exemplul 2.2.2.

Relația binară $R_{\leq}$ se definește pe produsul cartezian $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și include toate perechile ordonate (m, n), $m \leq n$. Astfel, $(5, 8) \in R_{\leq}$, $(1, 123) \in R_{\leq}$, $(3, 7) \notin R_{\leq}$, $(8, 5) \notin R_{\leq}$. Uneori pentru relația binară R în loc de $(a, b) \in R$ vom scrie aRb. Pentru exemplul nostru, $aR_{\leq}b$ sau simplu $a \leq b$.

2.3 Proprietăți. Moduri de reprezentare

Deoarece orice relație este o mulțime, relațiile pot fi definite la fel ca și mulțimile, asupra relațiilor pot fi aplicate toate operațiile definite pentru mulțimi. Există și moduri de reprezentare care țin cont de specificul relațiilor ca submulțimi ale unor produse carteziene.

Modul de reprezentare a relațiilor din Exemplele 2.2.1 și 2.2.2 îl vom numi mod analitic. În Figura 2.3.2 expunem și alte moduri de reprezentare: diagramă, tabel, matrice.



(a) diagramă

A	B
1	a
1	b
1	c
2	a
2	c
3	d

(b) tabel

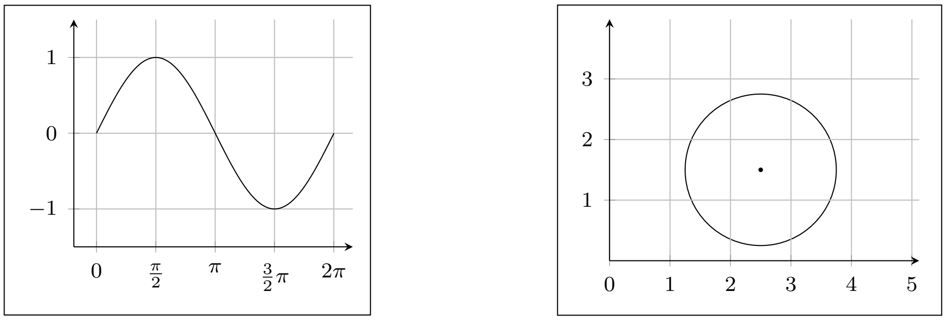
$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

(c) matrice

Figura 2.3.1: Reprezentări grafice pentru relația de ordine parțială.

Relațiile definite pe produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pot fi reprezentate sub forma unor grafice. De exemplu, $R_{\sin} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 2\pi, y = \sin x\}$, $R_{cerc} = \{(x, y)|x, y, r \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = r^2\}$.

În Figura 2.3.2 sunt perzrntate graficele relațiilor $y = sin(x)$ pe segmentul $[0, 2\pi]$ și cercul cu originea în (2.5,1.5) și raza 1, adică $(x - 2.5)^2 + (y - 1.5)^2 = 1$.



(a) $y = sin(x)$ (b) $x^2 + y^2 = r^2$

Figura 2.3.2: Reprezentarea grafică a relațiilor.

Vom considera în continuare doar relații binare omogene, adică $R \subseteq A \times A$ și vom spune că relația R este definită pe mulțimea A.

Să definim câteva proprietăți ale relației R:

Definiția 2.3.1.

Relația binară R este:
- *reflexivă* , dacă $(x, x) \in R$ pentru orice $x \in A$.
- *ireflexivă* , dacă $(x, x) \notin R$ pentru orice $x \in A$.
- *simetrică* , dacă din $(x, y) \in R$ întotdeauna rezultă $(y, x) \in R$.
- *antisimetrică* , dacă din $(x, y) \in R$ și $(y, x) \in R$ întotdeauna rezultă $x = y$.
- *asimetrică* , dacă $(x, y) \in R$, atunci $(y, x) \notin R$.
- *tranzitivă* , dacă din $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R$ întotdeauna rezultă $(x, z) \in R$.

Observație referitor la definiția relațiilor de antisimetrie și asimetrie. Ea poate fi formulată și în modul următor: pentru toți $x, y \in A, x \neq y$, numai unul, sau niciunul, din elementele $(x, y), (y, x)$ poate să aparțină relației R. Prezența (absența) elementelor (x, x) nu afectează antisimetria.

În cazul relației de asimetrie prezența elementului (x, y) întotdeauna exclude prezența elementului (y, x) și invers, chiar dacă $x = y$. Astfel, in cazul relației asimetrice nu mai sunt admise elemente de tipul (x, x).

Exemplul 2.3.1.

Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Să examinăm relațiile:

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (4, 3)\}$
- $R_4 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

– Relația R_1 este reflexivă, dar nu este simetrică, deoarece $(1, 2) \in R_1$, iar $(2, 1) \notin R_1$; este antisimetrică, dar nu este asimetrică, deoarece (1,1),(2,2), (3,3), (4,4) $\in R_1$ și nu este tranzitivă, deoarece (1,2),(2,3) $\in R_1$, iar $(1, 3) \notin R_1$.

– Relația R_2 este simetrică, dar nu este reflexivă, deoarece $(2, 2) \notin R_2$; nu este tranzitivă, deoarece $(2, 3), (3, 2) \in R_2$, iar $(2, 2) \notin R_2$. Nu este antisimetrică, nu este asimetrică.

– Relația R_3 este tranzitivă, dar nu este reflexivă, $(2, 2) \notin R_3$, și nu este simetrică, $(1, 2) \in R_3$, iar $(2, 1) \notin R_3$. Este antisimetrică, dar nu și asimetrică $((1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_3)$.

– Relația R_4 este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Nu este antisimetrică, nu este asimetrică.

Relațiile binare omogene pot fi reprezentate și sub formă de graf orientat. În Figura 2.3.3 vedem reprezentările sub formă de graf pentru relațiile R_1, R_2, R_3 și R_4 din Exemplul 2.3.1.

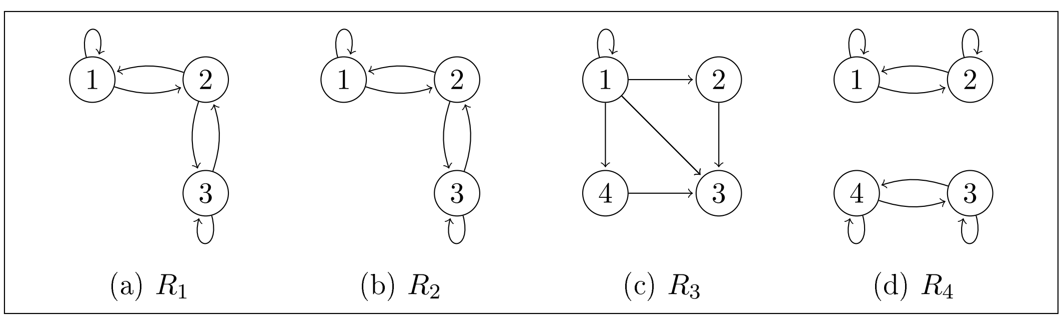


Figura 2.3.3: Reprezentarea relațiilor binare prin grafuri orientate

Să aducem și un exemplu „gustos” (Exemplul 2.3.2).

Exemplul 2.3.2. Receta „Plăcinte moldovenești”

1. Se pregătesc ingredientele pentru aluat (făină, apă, ulei, sare).
2. Se pregătesc ingredientele pentru umplutura cu brânză (brânză, ouă. mărar, ceapă verde).
3. Se pregătesc ingredientele pentru umplutura cu varză (varză, ceapă, ulei).
4. Se pregătește aluatul.
5. Se pregătește umplutura cu brânză.
6. Se pregătește umplutura cu varză.
7. Se întind foile.
8. Se pregătesc plăcintele.
9. Se pregătește (încălzește) cuptorul.
10. Se coc plăcintele.

Procesul de coacere a plăcintelor constă din 10 pași. Fie A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }. Dacă vom urma acești pași în ordinea expusă în rețetă, vom putea coace plăcinte. Dar să observăm că pregătirea aluatului și pregătirea umpluturilor pot fi efectuate în paralel, poate chiar de persoane diferite. Așa situații sunt mai multe. Există însă pași care trebuie executați strict în ordinea indicată. De exemplu, nu putem întinde foile înainte de a pregăti aluatul. Astfel vom stabili niște relații de consecutivitate între pași, le vom nota prin R_p. Perechea de pași $(i, j) \in R_p$, dacă pasul i trebuie îndeplinit înaintea pasului j. Obținem:
$R_p = \{(1, 4), (4, 7), (7, 8), (2, 5), (5, 8), (3, 6), (6, 8), (9, 10), (8, 10)\}$,
$R_p \subseteq A \times A$.

Această relație este:

– evident *reflexivă*, $(i, i) \in R_p$;

– *antisimetrică*, deoarece nu se pot îndeplini concomitent și $(i, j) \in R_p$, și $(j, i) \in R_P$;

– *tranzitivă*, deoarece, dacă $(i, j) \in R_p$ și $(j, k) \in R_p$, atunci și $(i, k) \in R_p$. De exemplu, $(1, 4), (4, 7) \in R_p$, deci și $(1, 7)$ trebuie să aparțină lui R_p. Adică, nu putem întinde foile neavând ingrediente pentru aluat.

În definiția de mai sus a relației R_p nu au fost incluse relațiile de reflexivitate și tranzitivitate, ele putând fi oricând restabilite.

Să observăm că există perechi de pași care nu se includ în R_p. De exemplu,

$(2,4),(5,7)$. Anume acest fapt determină existența mai multor secvențe de pași posibile la executarea recetei.

În Figura 2.8.9 prezentăm graful redus și diagrama Hasse pentru această relație.

2.4 Compoziția relațiilor

Fie R și S două relații peste mulțimea A. Compoziția relațiilor R și S, o vom nota prin $R \circ S$ sau simplu RS, se definește ca

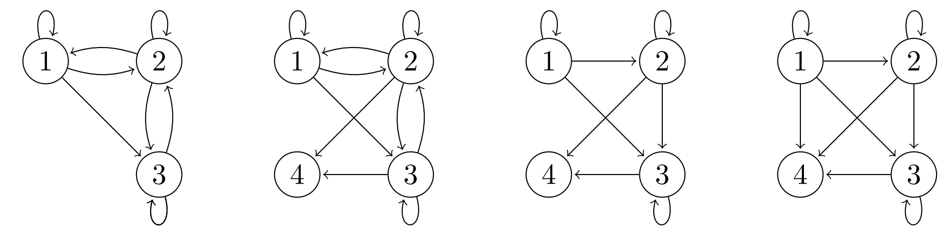
$$R \circ S = \{(a,c) \mid (a,b) \in R, (b,c) \in S\}.$$

Compoziția relațiilor nu este comutativă, adică $R \circ S \neq S \circ R$, Exemplul 2.4.1. Evident, putem construi compoziția $R \circ R$, pe care o vom nota prin R^2, $R^2 = R \circ R$. Este comod să notăm $R^1 = R$. Putem continua acest proces construind $R^3 = R \circ R \circ R$. Se poate verifica că $R^3 = (R \circ R) \circ R = R \circ (R \circ R)$ sau $R^3 = R^2 \circ R^1 = R^1 \circ R^2$. Această proprietate poate fi extinsă: $R^{j+k} = R^j \circ R^k$. Dacă nu apar ambiguități, semnul "$\circ$" poate fi omis, adică $R^3 = R^2 R$, $R^j \circ R^k = R^j R^k$.

Exemplul 2.4.1.

Fie $A = \{1,2,3,4\}$, $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}$, $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ (Figura 2.3.3).
Obținem:
$R_1 \circ R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$,
$R_2 \circ R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4\ \}$.
Este clar că $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.
Construim în continuare:
$R_1^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$,
$R_1^4 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\ \}$.
În Figura 2.4.4 vedem reprezentările grafice pentru $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$, R_1^2, R_1^3.

Din exemplul de mai sus observăm că $R_1 \subseteq R_1^2$, $R_1^2 \subseteq R_1^3$, iar $R_1^i = R_1^3$ pentru orice $i \in \mathbb{N}, i \geq 3$. Relația R_1^3 în acest caz se numește închidere tranzitivă a relației R_1 și o vom nota prin R_1^*.



(a) $R_1 \circ R_2$ (b) $R_2 \circ R_1$ (c) R_1^2 (d) R_1^3

Figura 2.4.4: Compoziția relațiilor binare

2.5 Închiderea relațiilor

Să formulăm în continuare câteva definiții referitoare la închiderea relațiilor binare. Fie R o relație binară arbitrară peste mulțimea A.

- *Închiderea tranzitivă* a relației R va fi relația R^* care satisface proprietățile:
  1. R^* este tranzitivă;
  2. $R \subseteq R^*$;
  3. Dacă S este o relație tranzitivă arbitrară care conține relația R, $R \subseteq S$, atunci S va conține și R^*, $R^* \subseteq S$.
     Cu alte cuvinte, R^* este cea mai mică relație tranzitivă care conține relația R.
- *Închiderea reflexivă* a relației R va fi relația $R^* = R \cup \{(x, x)|x \in A\}$.
- *Închiderea simetrică* a relației R va fi relația
  $R^* = R \cup \{(x, z)|(x, y) \in R \text{ și } (y, z) \in R\}$.

Pentru a evita ambiguitățile legate de notația R^*, de fiecare dată vom specifica tipul închiderii. Cu atât mai mult că o închidere poate fi în același timp și reflexivă, și simetrică, și tranzitivă. Închiderile reflexivă și simetrică pot fi ușor construite reieșind din definiții.

Închiderea tranzitivă se construiește mai dificil. Să revenim la definiția compoziției $R \circ R = R^2$. Dacă elementul $(a, c) \notin R^2$, dar există $(a, b) \in R$ și $(b, c) \in R$, atunci (a, c) se include în R^2. Dacă ne vom referi la reprezentarea sub formă de graf a relației R putem spune că în acest caz există un drum de lungime mai mică sau egală cu 2 din a în c. Această observație poate fi formulată pentru orice relație R^i, $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$: (a, c) se include în R^i, dacă există un drum de lungime mai mică sau egală cu i din a în c. Cât de lung poate fi un drum în graful a relației R ? Fie R o relație binară arbitrară pe mulțimea A și $card(A) = n$. Afirmăm că, dacă există drum în R din a în c, atunci întotdeauna există un astfel de drum de lungime mai mică sau egală cu n. Să presupunem că nu există așa un drum, adică cel mai scurt drum de la a la c este de lungimea $m > n$, adică $a \to b_1 \to b_2 \to \ldots \to b_{m-1} \to c$. Așa cum acest drum conține $(m+1) > (n+1)$ noduri, conform principiului porumbeilor (Capitolul XXX), cel puțin 2 noduri în acest drum se repetă. Fie $a \to b_1 \ldots \to b_{i-1} \to b_i \to \ldots \to b_j \to \ldots \to b_{m-1} \to c$ și $b_i = b_j$. În acest caz există drumul $a \to b_1 \ldots \to b_{i-1} \to b_j \to \ldots \to b_{m-1} \to c$, care este mai scurt decât drumul inițial. Obținem o contradicție.

Cele expuse mai sus argumentează ideea metodei de construire a închiderii tranzitive:

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Pentru relații finite $n = card(R)$ formula va fi

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

Construirea închiderii ar putea să se termine în mai puțin de n pași, dacă $R^{i+1} = R^i$, $i < n$.

Să arătăm că R^* intr-adevăr este închiderea tranzitivă a relației R.

1. *R^* este tranzitivă.* Să ne convingem că dacă $(a,b) \in R^*$, $(b,c) \in R^*$, atunci și $(a,c) \in R^*$. Fie $(a,b) \in R^j$, $(b,c) \in R^k$. Există un drum de lungime cel mult j din a în b, un drum de lungimea cel mult k din b în c, respectiv există un drum de lungime cel mult $j+k$ din a în c. Astfel $(a,c) \in R^{j+k} \subseteq R^*$.
2. $R \subseteq R^*$. Evident, deoarece $R = R^1$.
3. *R^* este relația tranzitivă minimală care conține R.* Fie S o relație tranzitivă arbitrară care conține R. Să arătăm că $R^i \subseteq S$ pentru toți $i \geq 1$. Pentru $i = 1$ evident $R^1 = R \subseteq S$. Dacă $R^i \subseteq S$, atunci și $R^{i+1} \in S$, conform definiției și faptului că S este tranzitivă. Rezultă că $R^* \subseteq S$ și, prin urmare, R^* se conține în orice altă relație tranzitivă care conține relația R.

Relația inversă pentru R se definește ca

$$R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

Este ușor dr observat că $(R^{-1})^{-1} = R$.

2.6 Clase de echivalență

Să mai definim o noțiune importantă pentru expunerea ulterioară.

Definiția 2.6.1.

Relația binară R se numește *relație de echivalență* , dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Schematic putem scrie:

echivalență = reflexivitate + simetrie + tranzitivitate

De exemplu, relația R_4 din Figura 2.3.1 este o relație de echivalență.

Exemplul 2.6.1.

Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. m este congruent cu n *modulo* k, se notează $n \equiv m (mod\ k)$ sau $n \overset{k}{\equiv} m$, dacă $(n-m)$ se împarte fără rest la k, adică $(n-m) = qk$, $q \in \mathbb{Z}$. Să arătăm că această relație este o relație de echivalență pe mulțimea $\mathbb{N}$. Fie $k = 3$.

1. Relația $m \overset{3}{\equiv} n$ este reflexivă.
   Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \overset{3}{\equiv} m$, deoarece $(m-m) = 0 \cdot 3$.
2. Relația $m \overset{3}{\equiv} n$ este tranzitivă.
   Fie $m \overset{3}{\equiv} l$ și $l \overset{3}{\equiv} n$, adică $(m-l) = q_1 \cdot 3$, $(l-n) = q_2 \cdot 3$, $(m-n) = q_1 3 + l - q_2 3 - l = (q_1 - q_2) 3$. Rezultă că $m \overset{3}{\equiv} n$, deoarece $q_1, q_2, (q_1 - q_2) \in \mathbb{Z}$.
3. Relația $m \overset{3}{\equiv} n$ este simetrică.
   Fie $m \overset{3}{\equiv} n$, $(m-n) = q \cdot 3$. Atunci $(n-m) = -q \cdot 3$. Așa cum $-q \in \mathbb{Z}$, rezultă că $n \overset{3}{\equiv} m$.

Alte exemple de relații de echivalență. Congruența figurilor geometrice. Se verifică ușor că relația „a fi congruent” este o relație de echivalență. La fel, relația de paralelism a dreptelor.

Dar nu doar în matematică întâlnim relații de echivalență. Relațiile „a locui în același oraș”, „a fi student la aceiași facultate”, „a fi de culoare roșie” etc. – toate sunt relații de echivalență.

Teorema 2.6.1.

Dacă relația R este relație de echivalență, atunci și relația R^{-1} este relație de echivalență.

Demonstrare.

Trebuie să demonstrăm că relația R^{-1} este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Reflexivitate.

Să demonstrăm că pentru orice $x \in A$, $(x, x) \in R^{-1}$. Așa cum R este relație de echivalență, pentru orice $x \in A$, $(x, x) \in R$, iar conform definiției relației inverse, (x, x) aparține relației R^{-1}.

Simetrie.

Fie $(x, y) \in R^{-1}$. Să arătam că și $(y, x) \in R^{-1}$. Dacă $(x, y) \in R^{-1}$, atunci $(y, x) \in R$ și, deoarece R este simetrică, $(x, y) \in R$, iar, conform definiției relației inverse $(y, x) \in R^{-1}$.

Tranzitivitate.

Fie $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$. Să ne convingem că $(x, z) \in R^{-1}$. Avem $(y, x), (z, y) \in R$. Deoarece R este tranzitivă, $(z, x) \in R$. Rezultă că $(x, z) \in R^{-1}$. ■

Să menționăm în continuare o aplicație importantă a relațiilor de echivalență.

Definiția 2.6.2.

Fie R o relație de echivalență arbitrară pe mulțimea A. Se numește *clasă de echivalență* a elementului $a \in A$ mulțimea $R_a = \{b | (a, b) \in R\}$.

Mulțimea tuturor claselor de echivalență ale mulțimii A în raport cu relația E formează o partiție a mulțimii A și invers, orice partiție a mulțimii A corespunde unei relații de echivalență peste A. Are loc

Teorema 2.6.2.

Relația $R \subseteq A \times A$ generează o partiție a mulțimii A atunci și numai atunci, când R este o relație de echivalență.

Demonstrare.

(i) Fie $M_1, M_2, \ldots, M_k$ o partiție arbitrară a mulțimii A.

- $M_i \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq k$.
- orice două mulțimi M_i, M_j sunt disjuncte, $i \neq j, 1 \geq i, j \leq k$.
- $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k = A$.

Să arătăm că există o relație de echivalență peste A care generează partiția $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Această relație se definește în modul următor: $(a, b) \in R$, dacă $a \in M_i$ și $b \in M_i$. Relația poate fi formulată ca „a fi elemente din aceeași mulțime M_i". Această relație evident este reflexivă, simetrică și tranzitivă, deci, relație de echivalență.

(ii) Fie R o relație de echivalență arbitrară peste A. Vom arăta că această relație determină o partiție a mulțimii A. Pentru toate elementele $a \in A$ construim mulțimea (clasa) $R_a = \{b \mid (a, b) \in R\}$. Să ne convingem mai întâi că pentru orice $a \in A$, $a \in R_a$. Deoarece relația R este reflexivă, $(a, a) \in R$. Rezultă că $a \in R_a$.
În continuare vom arăta că, dacă $b \in R_a$, atunci $R_b = R_a$. Să observăm mai întâi că, deoarece $b \in R_a$, avem $(a, b) \in R$ și, din considerente de simetrie – $(b, a) \in R$.

(a) $R_b \subseteq R_a$. Fie $x \in R_b$. Rezultă că $(b, x) \in R$. Ținând cont de tranzitivitatea relației R, dacă $(a, b) \in R$ și $(b, x) \in R$, rezultă că $(a, x) \in R$. Astfel, $x \in R_a$.

(b) $R_a \subseteq R_b$. Fie $x \in R_a$, adică $(a, x) \in R$. Așa cum $(b, a) \in R$, iarăși, din tranzitivitatea relației R, deoarece $(b, a) \in R$ și $(a, x) \in R$, rezultă că $x \in R_b$.

Astfel, pentru toate elementele $a \in A$ se vor construi mulțimile $R_a, R_a \neq \varnothing$. Selectăm doar mulțimile disjuncte (cele care au elemente comune coincid) și le notăm prin $R_1, R_2, \ldots, R_k, k \geq 1$. Deoarece orice element $a \in A$ se conține în una din mulțimile $R_1, R_2, \ldots, R_k$, obținem

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$$

Așadar, $R_1, R_2, \ldots, R_k$ este o partiție pentru A. ■

Exemplul 2.6.2.

Pentru relația R_4 din Figura 2.3.1 clasele de echivalență vor fi submulțimile: $R_1 = \{1, 2\}$ și $R_3 = \{3, 4\}$. De menționat că $R_1 = R_2$, $R_3 = R_4$.

Exemplul 2.6.3.

Pentru relația $n \overset{3}{\equiv} m$ avem:

R_0=$\{0, 3, 6, 9, \dots\}$

R_1=$\{1, 4, 7, 10, \dots\}$

R_2=$\{2, 5, 8, 11, \dots\}$

Clasa R_0 va conține toate numerele care se împart fără rest la 3, R_1 - toate numerele care împărțite la 3 dau rest 1 și R_2 - toate numerele care împărțite la 3 dau rest 2. Să observăm că R_0,R_1,R_2 constituie o partiție a mulțimii $\mathbb{N}$, $R_0 \cup R_1 \cup R_2$=$\mathbb{N}$,

R_0=R_3=R_6=$\dots$, R_1=R_4=R_7= $\dots$, R_2=R_5=R_8=$\dots$

Exemplul 2.6.4.

Să se construiască toate relațiile de echivalență posibile peste mulțimea $A = \{a, b, c\}$. Ne vom orienta la Exemplul 1.5.2. Există 5 relații: $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

$R_3 = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c), (b, b)\}$

$R_4 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}\}$

$R_5 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.

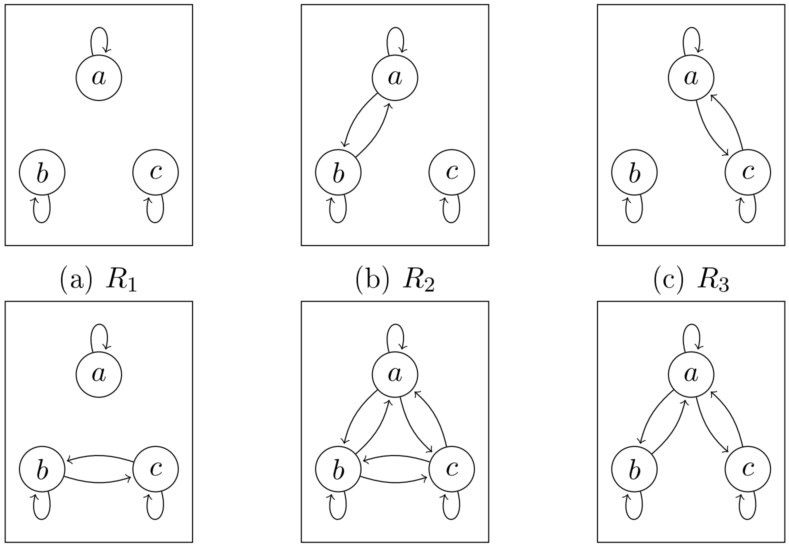
Grafic aceste relații sunt prezentate în Figura 2.6.5a, 2.6.5b, 2.6.5c, 2.6.5d, 2.6.5e.

Să menționăm că relația

$R_{ne} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, b), (c, c)\}$

nu este o relație de echivalență, deoarece nu se îndeplinește tranzitivitatea. Avem $(b, a) \in R_{ne}$, $(a, c) \in R_{ne}$, dar $(b, c) \notin R_{ne}$, Figura 2.6.5f.

Sa mai menționăm o aplicație a relațiilor de echivalență frecvent utilizată în informatică. Ne vom referi la relații de tipul: savanți ce activează în același domeniu, clasificarea operelor literare după genuri (epic, fantastic, polițist etc), clasificarea persoanelor după locul de trai, activitate etc. Este clar, astfel de relații sunt relații de echivalență. Deseori este util să se construiască clasele de echivalență corespunzătoare. Există un algoritm simplu care rezolvă această problemă - algoritmul *"caută–contopește"*.



(a) R_1 (b) R_2 (c) R_3

(d) R_4 (e) R_5 (f) R_{ne}

Figura 2.6.5: Relații de echivalență peste $A = \{a, b, c\}$

Algoritmul 2.6.1 (CAUTĂ–CONTOPEȘTE)

0. ***start***

1. Este dată relația de echivalență R peste mulțimea A, $card(A) = n$.
* Vom construi pentru această relație clasele de echivalență $M_1, M_2, \ldots, M_k$, care formează o partiție a mulțimii A *\.

2. Inițial, pentru toate elementele $x_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, definim mulțimea $M_i = \{x_i\}$ și PARTIȚIE$=\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$.

3. ***Pentru toate*** elementele $(x, y) \in R$, $x \neq y$:
* Pentru $x = y$ partiția nu se va modifica *\.

3.1. Căutăm mulțimile $M_i \ni x$ și $M_j \ni y$.

3.2. ***Dacă*** $M_i \neq M_j$, contopim M_i cu M_j, fie $M_i := M_i \cup M_j$. Eliminăm M_j din PARTIȚIE.
* Pentru $M_i = M_j$ partiția nu se va modifica *\.

4. ***Returnăm*** PARTIȚIE.

5. ***stop***

Exemplul 2.6.5.

Fie dată o mulțime de persoane $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ caracterizate prin relația "x este consătean cu y".

$R = \{(a, a), (a, d), (a, e), (b, b), (b, g), (c, c), (c, f), (d, d), (d, a),$
$(d, e), (e, e), (e, a), (e, d), (f, f), (f, c), (g, g), (g, b), (h, h)\}$.

Aplicând algoritmul Caută–contopește să se construiască partiția acestei mulțimi, care, de fapt, va aduna în aceeași submulțime toți consătenii din A.

Rezultatele algoritmului este comod să fie prezentate sub forma unui tabel (Tabelul 2.6.1), ignorând relațiile (x, x).

Relația	Partiția curentă
	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$
(a, d)	$\{a, d\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$
(a, e)	$\{a, d, e\}, \{b\}, \{c\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$
(b, g)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c\}, \{f\}, \{h\}$
(c, f)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(d, a)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(d, e)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(e, a)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(e, d)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(g, b)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(f, c)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$
(g, b)	$\{a, d, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{h\}$

Tabela 2.6.1: Algoritmul Caută–contopește

2.7 Relații de ordine parțială

Zilnic suntem impuși să comparăm, să ordonăm ceva (prețuri, temperaturi, vârste). Un număr poate fi mai mare, altul mai mic, un obiect poate fi mai greu, altul mai ușor, unul poate fi roșu, altul verde, o persoană poate fi mai în vârstă, alta mai tânără etc. Aceste relații între obicte se numesc relații de ordine.

Intuitiv, relațiile de ordine permit ordonarea elementelor mulțimii. Noțiunile definite mai sus ne permit să formulăm precis astfel de relații.

Definiția 2.7.1.

Relația binară $R \subseteq A \times A$ se numește *relație de ordine parțială*, dacă este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică.

Mulțimea A în acest caz se numește *mulțime parțial ordonată*.

Cuvântul „parțial” apare în definiția de mai sus deoarece nu neapărat toate perechile (x, y) din $A \times A$ aparțin relației. În caz dacă $(x, y) \notin R$, elementele x, y se numesc *incomparabile*. De exemplu, pentru relația “X este submulțime pentru Y” din Exemplul 2.7.3 , elementele $(\{a\}, \{b\})$ și $(\{a, b\}, \{a, c\})$ aparțin mulțimii $2^A \times 2^A$, dar nu aparțin relației. La fel, $(2, 4), (5, 7)$ nu aparțin relației R_p din Exemplul 2.3.2 (receta „Plăcintă moldovenească”).

Schematic putem scrie:

$$\boxed{\text{ordine parțială} = \text{reflexivitate} + \text{antisimetrie} + \text{tranzitivitate}}$$

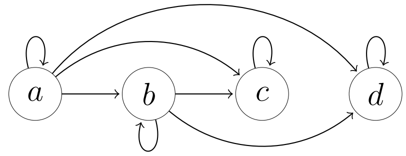
Exemplul 2.7.1.

Exemplul standard de relație parțial ordonată este relația “$x \leq y$” defintă pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Această relație este:
– *reflexivă*, $x \leq x$,
– *antisimetrică*, deoarece din $x \leq y$ și $y \leq x$ rezultă $x = y$,
– *tranzitivă*, deoarece, dacă $x \leq y$ și $y \leq z$, atunci $x \leq z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

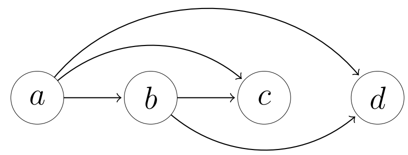
Ținând cont de proprietățile specifice relației de ordine parțială putem simplifica graful relațiilor eliminând arcele redundante.

– Deoarece relația R este reflexivă, pentru toate elementele $x \in A$ vom omite buclele (x, x). Ele oricând pot fi restabilite.

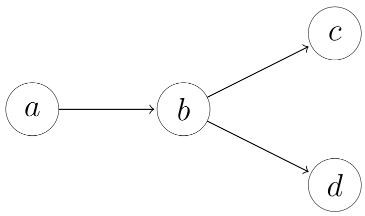
– Deoarece R este tranzitivă, pentru toate relațiile (x, y), (y, z), $(x, z) \in R$, arcul (x, z) pote fi eliminat; el poate fi restabilit oricând.



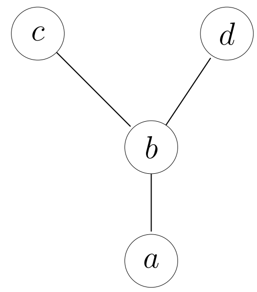
(a) Relația de ordine parțială R_e.



(b) Graful relației R_e fără bucle.



(c) Graful redus al relației R_e.



(d) Diagrama Hasse pentru relația R_e.

Figura 2.7.6: Reprezentări grafice pentru relația de ordine parțială.

Exemplul 2.7.2.

Fie $A = \{(a, b, c)$, $R_e \subseteq A \times A$, R_e = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d),(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d)}. Ușor se verifică că R_e este o relație de ordine parțială.
În Figura 14)2a prezentăm graful relației R_e, în Figura 2.7.6b - graful R_e fără bucle, iar în Figura 2.7.6c - graful redus al relației R_e.

Exemplul 2.7.3.

Fie dată mulțimea $A = \{a, b, c\}$. Să definim relația $R \subseteq 2^A \times 2^A$, $R = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$. Această relație este:
– *reflexivă*, orice subulțime este submulțime pentru ea înseși,
– *antisimetrică*, deoarece, dacă $X \subseteq Y$ și $Y \subseteq X$ rezultă $X = Y$,
– *tranzitivă*, deoarece, dacă $X \subseteq Y$ și $Y \subseteq Z$, atunci $X \subseteq Z$, pentru orice $X, Y, Z \in 2^A$.

Graful redus al relației este prezentat în Figura 2.7.7.

Exemplul 2.7.4.

Fie dată mulțimea $A = \{a, b, c\}$. Să definim relația $R \subseteq 2^A \times 2^A$, $R = \{(X, Y) \mid card(X) \leq card(Y)\}$.

Această relație este:
– evident *reflexivă*,
– *tranzitivă*, deoarece, dacă $card(X) \leq card(Y)$ și $card(Y) \leq card(Z)$, atunci $card(X) \leq card(Z)$,
– nu este *antisimetrică*; de exemplu, pentru $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c\}$, $(X, Y) \in R$, $(Y, X) \in R$, dar $X \neq Y$.
Astfel, relația R nu este o relație de ordine parțială.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \{a,b,c\} & & \\
 & & \{a,c\} \arrow[u] & & \\
\{a,b\} \arrow[uurr] & \{a\} \arrow[l] \arrow[ur] & & \{c\} \arrow[r] \arrow[ul] & \{b,c\} \arrow[uull] \\
 & & \varnothing \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & & \\
 & & \{b\} \arrow[uull] \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.7.7: Relația de ordine parțială
"X este submulțime pentru Y".

Pentru relațiile de ordine parțială sunt importante următoarele noțiuni:

Definiția 2.7.2.

Fie $R \subseteq A \times A$ relație de ordine parțială. Elementul $x \in A$ se numește:
– *element maximal*, dacă pentru toți $y \in A$ $(y, x) \in R$ sau y este incompatibil cu x;
– *element minimal*, dacă pentru toți $y \in A$ $(x, y) \in R$ sau y este incompatibil cu x;

– *cel mai mare element*, dacă pentru toți $y \in A$ $(y, x) \in R$;
– *cel mai mic element*, dacă pentru toți $y \in A$ $(x, y) \in R$;

Pentru relația „X este submulțime pentru Y”, Exemplul 2.7.3, $\{a, b, c\}$ este unicul element maximal și cel mai mare element, iar $\varnothing$ este unicul element minimal și cel mai mic element.

Pentru Exemplul 2.3.2 avem 4 elemente minimale {1,2,3,9} (cel mai mic element nu există) și un singur element maximal {10} care este și cel mai mare element. Aceasta se determină simplu consultând diagrama Hasse din Figura 2.8.9.

2.8 Diagrame Hasse

Reprezentarea relațiilor de ordine parțială prin grafuri reduse este comodă, intuitiv clară. Faptul că graful redus nu conține bucle și cicluri permite de a reprezenta aceste relații prin diagrame speciale numite *Diagrame Hasse*. Diagrama Hasse se obține din graful redus în modul următor:

– se rearanjază ndurile grafului astfel ca orientarea tuturor arcelor să fie de jos în sus; aceasta este posibil întotdeauna, deoarece graful redus nu conține cicluri

– se substituie toate arcele din graf prin laturi simple (drepte sau curbe),

Aducem o definiție formală pentru aceste diagrame.

Definiția 2.8.1.

Vom spune că elementul y *acoperă* elementul x, dacă $(x, y) \in R$ și nu există z pentru care $(x, z) \in R$ și $(z, y) \in R$.

Definiția 2.8.2.

Diagrama Hasse pentru o relație de ordine parțială $R \in A \times A$, (A – mulțime finită) prezintă elementele din A desenate planar, elementul y fiind desenat mai jos decât x și conectat cu x printr-o latură (dreaptă sau curbă), dacă și numai dacă y acoperă x.

De exemplu, pentru relația R_e din Exemplul 2.7.2 diagrama Hasse este prezentată în Figura 14)2b.

În Figura 2.8.8 prezentăm diagrama Hasse pentru relația “X este submulțime pentru Y”.

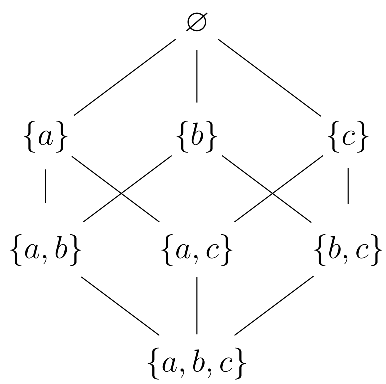


Figura 2.8.8: Diagrama Hasse pentru relația
"X este submulțime pentru Y".

După cum am văzut în Exemplul 2.3.2, relația R_p este o relație de ordine parțială. În Figura 2.8.9 prezentăm graful redus și diagrama Hasse pentru această relație.

2.9 Relații de ordine totală

După cum am văzut, relația de ordine parțială R nu neapărat este definită pentru toate perechile $(x, y) \in A{\times}A$, adică pot exista și elemente incomparabile. Dacă toate elementele unei relații parțial ordonate sunt comparabile, atunci această relație este o relație de ordine totală.

Definiția 2.9.1.

Relația de ordine parțială $R \subseteq A \times A$ se numește *relație de ordine totală* sau *relație de ordine liniară*, dacă pentru toate elementele (x, y) din R se îndeplinește exact una din condițiile:

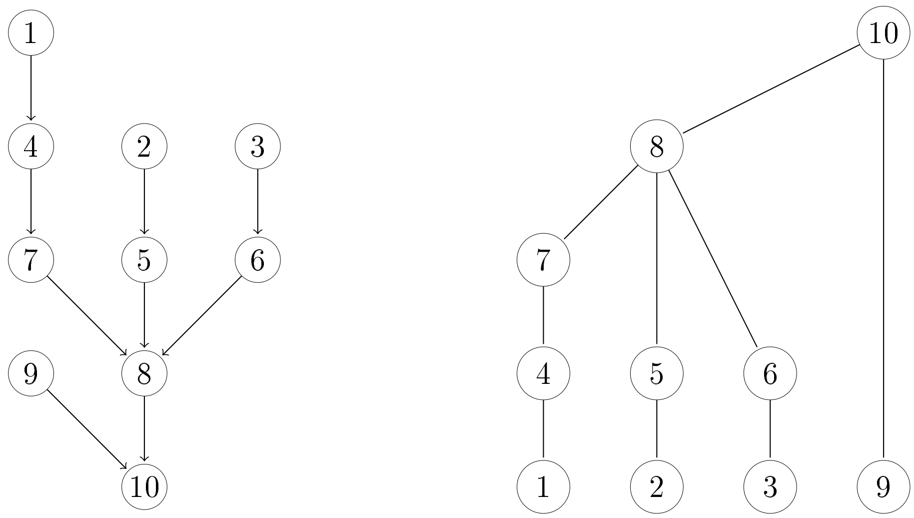
1) $(x, y) \in R$, sau
2) $(y, x) \in R$, sau
3) $x = y$.

Această regulă se mai numește *principiul trihotomiei*.

Mulțimea A în acest caz se numește *mulțime total ordonată*.

Schematic putem scrie:

$$\boxed{\text{ordine totală} = \text{ordine parțială} + \text{trihotomie}}$$



(a) Graful redus. (b) Diagrama Hasse.

Figura 2.8.9: Reprezentări grafice pentru receta
“Plăcinte moldovenești”.

Exemple tradiționale de relații de ordine totală sunt relațiilele $\leq, \geq$ definite pe mulțimea numerelor naturale, ordinea intrărilor într-un dicționar (ordinea lexicografică).

Exemplul 2.9.1.

Să considerăm relația R_{mn} – m este multiplu al lui n – peste mulțimea $\mathbb{N}$, $m = kn, k \in \mathbb{N}$. Această relație este o relație de ordine parțială. Într-adevăr, ea este:
– *reflexivă*; $(m, m) \in R_{mn}$, deoarece $m = 1 \cdot m$;
– *antisimetrică*, deoarece, din $(m, n), (n, m) \in R_{mn}$ rezultă că $m = kn, n = lm, (k, l \in \mathbb{N})$, $m = klm, k = l = 1$ și $m = n$.
– *tranzitivă*, deoarece, dacă $(m, n), (n, q) \in R_{mn}$, obținem $m = kn, n = lq$, $(k, l \in \mathbb{N})$, $m = klq, kl \in \mathbb{N}$, rezultă că $(m, q) \in R_{mn}$.

R_{mn} nu este o relație de ordine totală, deoarece, de exemplu, (2,3), (7,5) $\notin R_{mn}$.

Dacă vom considera relația R_{mn} peste mulțimea $A = \{1,2,4,\ 8\}$, $R_{mn} = \{(1,1),\ (2,1),(4,1),(8,1),(2,2),(4,2),(8,2),(4,4),\ (8,4),\ (8,8)\}$, putem ușor verifica că în acest caz R_{mn} este o relație de ordine totală.

Se verifică ușor că relația asemănătoare

$$R_{2mn} = \{(2^m, 2^n) \mid 2^m \text{ este multiplu al lui } 2^n,\ m, n \in \mathbb{N}\}$$

este relație de ordine totală peste $\mathbb{N}$.

2.10 Ordinea lexicografică

O aplicație importantă a relațiilor de ordine este ordinea lexicografică (ordinea alfabetică, ordinea dicționarului). Este dat un alfabet arbitrar (român, latin, binar, mulțimea cifrelor zecimale, codificarea ASCII etc) și este definită o relație de ordine totală peste elementele acestui alfabet. Să notam această relație prin $R_{\prec}$ și vom spune că elementul (litera, simbolul) a_i precede elemenul a_j, adică a_i întotdeauna se va situa mai la stânga (în dicționar mai sus) de a_j. Vom nota aceasta prin $a_i \prec a_j$ sau $(a_i, a_j) \in R_{\prec}$.

Pentru alfabetul limbii române, de exemplu, $a \prec$ ă$\prec$ â$\prec b \prec c \ldots$.

În mod obișnuit, prin concatenare, din simboluri se alcătuiesc cuvinte (șiruri). De exemplu, $x = a_1a_2 \ldots a_m$, $y = b_1, b_2, \ldots, b_n$. Să extindem relația $R_{\prec}$ asupra cuvintelor având grijă să rămână o rlație de ordine totală. Adică, oricare n-ar fi șirurile x, y întotdeauna se îndeplinește exact una din condițiile:
1) $x \prec y$, 2) $y \prec x$ sau 3) $x = y$ (principiul trihotomiei).

Ideea comparării este simplă: comparăm cuvintele simbol cu simbol până la prima necoincidență, $a_i \neq b_i$. Dacă $a_i \prec b_i$, atunci $x \prec y$, în caz contrar, $y \prec x$. Dacă toți $a_i = b_i$, atunci $x = y$. Dar cum procedăm în cazul când primul cuvânt este prefix pentru al doilea cuvânt, adică se compară cuvintele x și xy? în acest caz se consideră $x \prec xy$. Explicația este următoarea. Cuvântul mai scurt se completează până la lungimea cuvântului mai lung cu un simbol special, fie simbolul vid, de obicei notat prin „ε”, fie cu spații notate prin „␣”. Prin definiție acest simbol se consideră „mai mic” decât orice alt simbol din alfabet, adică, $\varepsilon \prec a$, ␣$\prec a$ pentru orice $a \in A$. Astfel, la comparare putem considera ambele cuvinte de aceeași lungime.

Definiția 2.10.1.

Fie x, y cuvinte arbitrare peste alfabetul A, $x = a_1a_2 \ldots a_m$, $y = b_1, b_2, \ldots, b_m$, $m > 1$.

1. $x = y$, dacă $a_i = b_i$, $1 \leq i \leq m$, sau
2. $x \prec y$, dacă există $i, 1 \leq i \leq m - 1$, pentru care $a_i = b_i$, iar $a_{i+1} \prec b_{i+1}$, sau

3. $y \prec x$ în caz contrar.

Să observăm că pentru $m = 1$ ordinea cuvintelor coincide cu ordinea impusă alfabetului.

Exemplul 2.10.1.

Următoarele cuvinte au fost extrase din DEXonline în ordinea în care urmează: *par*$\prec$ *para*$\prec$ *paralel*$\prec$ *paralelogram*$\prec$ *pară*$\prec$ *parc*$\prec$ *parcare*$\prec$ *parcat*$\prec$ *parfum*$\prec$ *păr*$\prec$ *pârâtor*

Cuvântul *par* precede toate cuvintele pentru care este prefix, *paralel*$\prec$*parc*, deoarece prima necoincidență este $a \neq c$ și $a \prec c$. Din aceleași considerente *parfum*$\prec$*pârâtor*, dar și *mare*$\prec$*mic*.

Exemplul 2.10.2.

Uneori s-ar putea confunda ordinea lexicografică cu ordinea numerică. În mod obișnuit 23<2245. Dacă, însă, operăm cu șiruri de cifre cu relația $0 \prec 1 \prec 2 \prec \ldots \prec 9$, atunci $2245 \prec 23$.

Ordinea lexicografică se întâlnește la enumerarea capitolelor, subcapitolelor, figurilor, tabelelor într-o publicație. De exemplu, 1, 1.1, 1.1.1, 1.1.2, 1.2, 2.10.2 (exemplul de mai sus).

În informatică ordinea lexicografică se aplică frecvent la generarea tuturor permutărilor posibile, la parcurgerea arborilor, grafurilor, la codificare/decodificare, optimizare discretă, luarea deciziilor.

Să formulăm mai jos câteva probleme care apar la elaborarea aplicațiilor bazate pe ordonarea lexicografică:

1. Având o mulțime arbitrară de cuvinte (șiruri) să se ordoneze în ordine lexicografică (problema sortării).
2. Într-o mulțime ordonată lexicografic să se caute un element cu anumite proprietăți (problema căutării).
3. Elaborarea modurilor de reprezentare a mulțimilor lexicografic ordonate.

2.11 Sortare topologică

După cum am văzut, toate elementele unei mulțimi total ordonate pot fi aranjate într-o ordine strictă, fiecare element având o poziție bine determinată. Se poate face același lucru cu o mulțime parțial ordonată? Invocând anumite restricții, aceasta este posibil. Ideea sortării este următoarea. Se aranjează toate elementele mulțimii astfel ca între oricare două elemente comparabile să se mențină relația de ordine parțială. Între elementele incomparabile vom considera că există o relație fictivă, doar pentru a completa relația de ordine totală. Desigur, astfel de ordonări pot exista mai multe. Să definim fomal aceste construcții.

Definiția 2.11.1.

Relația R_1 este *compatibilă* cu relația R_2, dacă pentru orice $(x, y) \in R_1$ avem și $(x, y) \in R_2$.

Definiția 2.11.2.

Relația de ordine totală R_1 se numește *sortare topologică*, pentrua relația de ordine parțială R_2, dacă R_1 este compatibilă cu R_2.

Pentru orice relație de ordine parțială se poate construi o relație de ordine totală echivalentă, adică orice mulțime parțial ordonată poate fi sortată topologic. Algoritmul de sortare topologică se bazează pe proprietățile:

1. Orice relație nevidă de ordine parțială are cel puțin un element minimal.
2. Orice submulțime a unei mulțimi parțial ordonate este parțial ordonată.

Sortarea topologică este frecvent utilizată la sortarea (linearizarea) grafurilor orientate ațiclice.

2.12 Funcții

Să definim în continuare cu ajutorul relaţiilor binare o noţiune fundamentală a matematicii și informaticii - noțiunea de *funcție*. Fie X, Y două mulţimi. Relația binară $f \subseteq X \times Y$ se numește *funcție* (*relaţie funcţională* , *aplicație*), dacă se îndeplinesc condițiile:

(1) Pentru orice $x \in X$ există $y \in Y$ și $(x, y) \in f$ (existența)

(2) Dacă (x, y_1), $(x, y_2) \in f$ atunci $y_1 = y_2$ (unicitatea)

Mulțimea X se numește *domeniu de definiție*, iar mulțimea Y – *domeniu de valori* sau *codomeniu*. De obicei, funcția se notează prin $f : X \to Y$, iar faptul că $(x, y) \in f$ se va nota prin $y = f(x)$. Funcția $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N \to Y$ se numește *funcție n-ară*. Funcția poate fi definită și reprezentată ca și relația. Mai mult ca

atât, funcția poate fi reprezentată și prin graficul ei. Se numește *grafic al funcției* f mulțimea $\Gamma = \{(x, f(x))|x \in X\}$.
Funcțiile astefel definite se mai numesc *funcții totale* sau *funcții total definite*.

În informatică un interes deosebit prezintă funcțiile pentru care condițiile (1), (2) sunt modificate. Astfel, dacă nu se îndeplinește condiția (1), adică nu pentru toți $x \in X$ există $(x, y) \in f$, atunci funcția se numește *parțial definită*.

Dacă nu se îndeplinește condiția (2), adică pentru careva $x \in X$ există $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y, n \geq 2$, pentru care $(x, y_1), (x, y_2), \ldots, (x, y_n) \in f$, adică $f(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$, funcția se numește *funcție multivaluată* sau *funcție nedeterministă*. În acest caz vom considera că se extinde codomeniul funcției. Astfel, $f : X \to 2^Y$. Trebuie să menționăm că noțiunea de *nedeterminism* este o noțiune foarte des întâlnită în teoria limbajelor formale și a automatelor.

Deseori unele aplicații funcționează doar pentru funcții total definite. În acest caz putem în mod artificial să extindem funcția parțială (deterministă sau nedeterministă) transformând-o în funcție totală. De exemplu, fie ϕ un simbol ce nu aparține mulțimii Y. Funcția f extinsă se definește în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, & \text{dacă } f(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \\ \phi, & \text{dacă } f(x) \text{ nu este definită} \end{cases}$$

Funcția total definită f se numește:
- *injectivă* , dacă pentru orice $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *surjectivă*, dacă pentru orice $y \in Y$ există cel puțin un $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.
- *bijectivă, biunivocă* , dacă ea este și injectivă, și surjectivă.

Toate aceste noțiuni pot fi ilustrate grafic cu ajutorul diagramelor, Figura 2.12.11

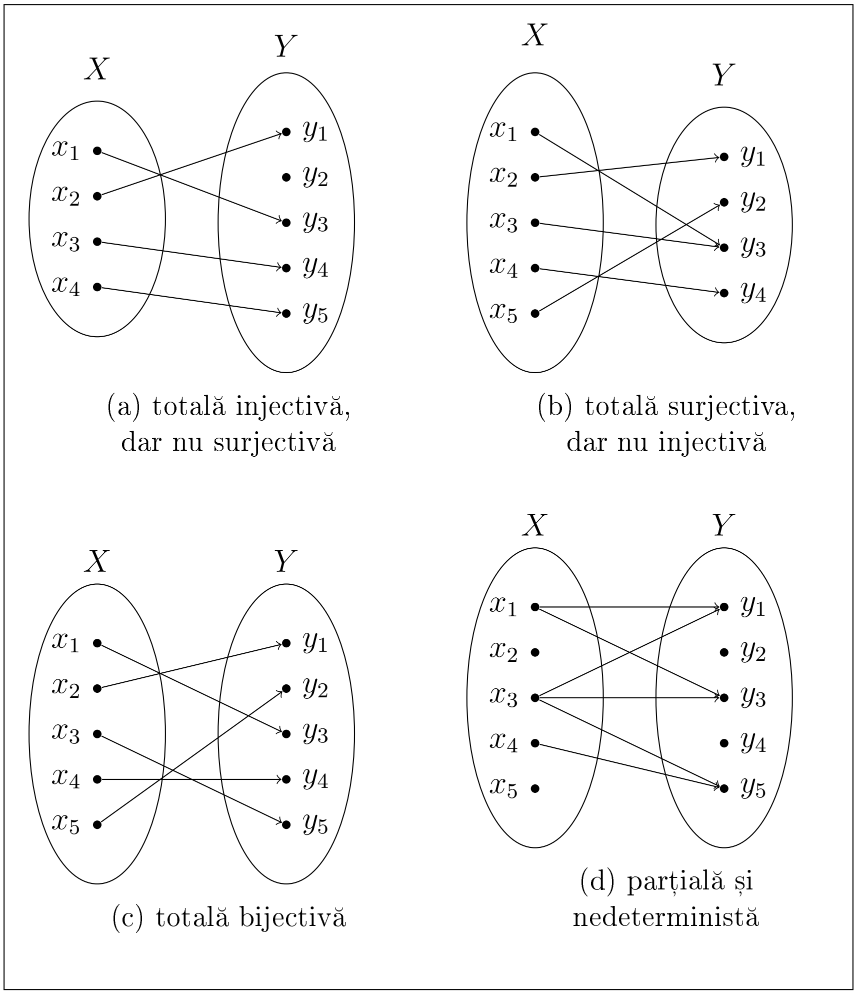


Figura 2.12.10: Reprezentarea schematică a funcțiilor (relațiilor funcționale)

Să definim în continuare cu ajutorul relaţiilor binare o noţiune fundamentală a matematicii și informaticii - noțiunea de *funcție*. Fie X, Y două mulţimi. Relația binară $f \subseteq X \times Y$ se numește *funcție* (*relaţie funcţională* , *aplicație*), dacă se îndeplinesc condițiile:

(1) Pentru orice $x \in X$ există $y \in Y$ și $(x, y) \in f$ (existența)

(2) Dacă (x, y_1), $(x, y_2) \in f$ atunci $y_1 = y_2$ (unicitatea)

Mulțimea X se numește *domeniu de definiție*, iar mulțimea Y – *domeniu de valori* sau *codomeniu*. De obicei, funcția se notează prin $f : X \to Y$, iar faptul că $(x, y) \in f$ se va nota prin $y = f(x)$. Funcția $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N \to Y$ se numește

funcție n-ară. Funcția poate fi definită și reprezentată ca și relația. Mai mult ca atât, funcția poate fi reprezentată și prin graficul ei. Se numește *grafic al funcției f* mulțimea $\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in X\}$.
Funcțiile astefel definite se mai numesc *funcții totale* sau *funcții total definite*.

În informatică un interes deosebit prezintă funcțiile pentru care condițiile (1), (2) sunt modificate. Astfel, dacă nu se îndeplinește condiția (1), adică nu pentru toți $x \in X$ există $(x, y) \in f$, atunci funcția se numește *parțial definită*.

Dacă nu se îndeplinește condiția (2), adică pentru careva $x \in X$ există $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y, n \geq 2$, pentru care $(x, y_1), (x, y_2), \ldots, (x, y_n) \in f$, adică $f(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$), funcția se numește *funcție multivaluată* sau *funcție nedeterministă*. În acest caz vom considera că se extinde codomeniul funcției. Astfel, $f : X \to 2^Y$. Trebuie să menționăm că noțiunea de *nedeterminism* este o noțiune foarte des întâlnită în teoria limbajelor formale și a automatelor.

Deseori unele aplicații funcționează doar pentru funcții total definite. În acest caz putem în mod artificial să extindem funcția parțială (deterministă sau nedeterministă) transformând-o în funcție totală. De exemplu, fie ϕ un simbol ce nu aparține mulțimii Y. Funcția f extinsă se definește în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, & \text{dacă } f(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \\ \phi, & \text{dacă } f(x) \text{ nu este definită} \end{cases}$$

Funcția total definită f se numește:
- *injectivă* , dacă pentru orice $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *surjectivă*, dacă pentru orice $y \in Y$ există cel puțin un $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.
- *bijectivă, biunivocă* , dacă ea este și injectivă, și surjectivă.

Toate aceste noțiuni pot fi ilustrate grafic cu ajutorul diagramelor, Figura 2.12.11

2.13 Exerciții și probleme

1) Să se demonstreze că $(R_1 R_2)^{-1} = R_2^{-1} R_1^{-1}$.

2) Să se construiască toate variantele posibile de funcții total definite cu domeniul $A = \{1, 2, 3\}$ și codomeniul $B = \{a, b\}$.
Dacă $card(A) = n$, $card(B) = m$, câte variante de funcții total definite sunt posibile pentru *a)* $n > m$, *b)* $n = m$, *c)* $n < m$.

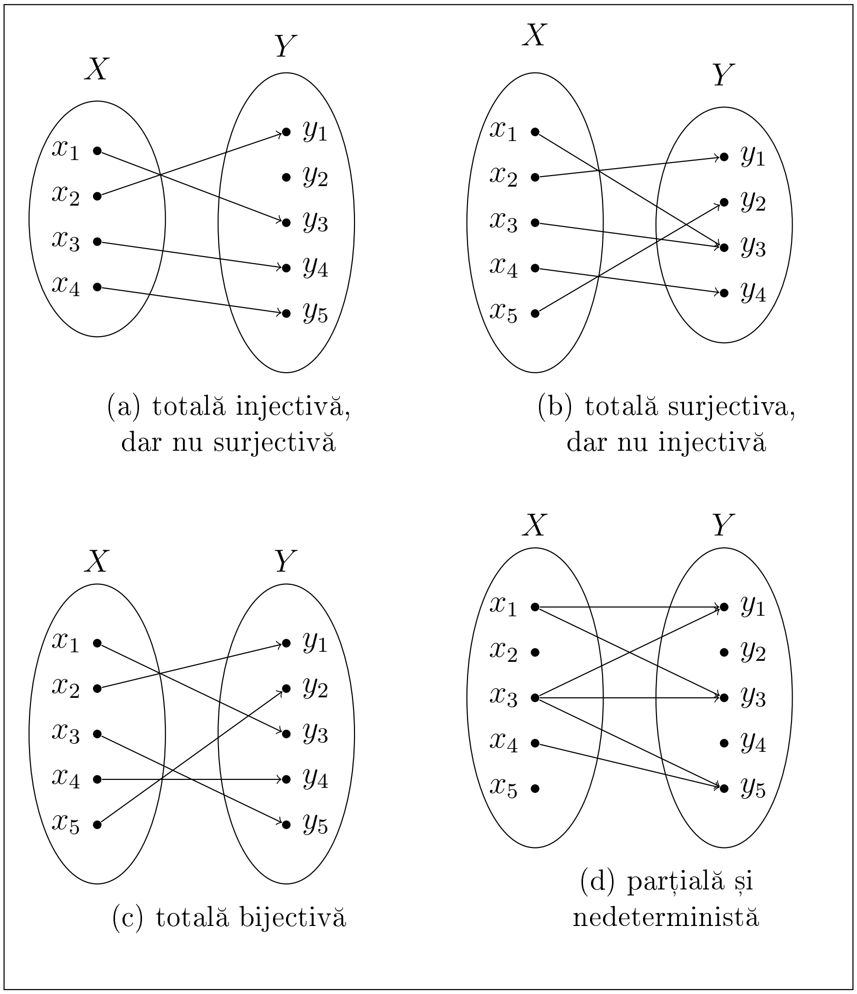


Figura 2.12.11: Reprezentarea schematică a funcțiilor (relațiilor funcționale)

3) Fie $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ - domeniu, $B = \{1, 2, 3\}$ - codomeniu. Să se determine care dintre funcțiile de mai jos sunt total definite:
(a) $f_1 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), (x_2, 3), (x_3, 3)\}$;
(b) $f_2 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), (x_2, 3), (x_3, 3), (x_4, 1)\}$;
(c) $f_3 = \{(x_1, 3), (x_2, 2), (x_3, 1), (x_4, 2)\}$;
(d) $f_4 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), (x_3, 1), (x_1, 3), (x_4, 2)\}$;

4) Fie $A = \{1, 2, b, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{2, 4, b\}$.
$R_1 \subseteq A \times B$, $R_1 = \{(1, a), (2, c), (b, d), (3, b)\}$,

$R_2 \subseteq B \times C$, $R_2 = \{(a,4),(b,2),(c,b),(d,4)\}$.
Să se construiască compoziția $R_1 \circ R_2$.

5) Fie $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$. Să se construiască relația
$R = \{(x,y)|(x-y)$ este divizibil prin $3\}$ și să se demostreze că R este o relație de echivalență.

6) Fie $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Relaia binară $R \subseteq A$ se definește ca
$R = \{(x,y)|x = (x_1,y_1), y = (x_2,y_2), x_1y_2 = y_1x_2\}$.
De exemplu, $(1,3),(3,9),(6,18) \in R$.
Să se demonstreze că R este relație de echivalență. Care sunt clasele de echivalență?

7) Să se demonstreze că dacă R este relație de echivalență, atunci și R^{-1} tot va fi relație de echivalență.

8) Fie $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se construiască relația
$R = \{(x,y)\,|\,x = 3q_1+r_1, y = 3q_1+r_2, 0 \leq r_1, r_2 < 3\}$.
Care sunt clasele de echivalență?

9) Fie $R = \{(x,y)|x+y-par, x,y \in \mathbb{N}\}$

a) să se demonstreze că R este relație de echivalență;

b) să se construiască clasele de echivalență.

10).

Sunt date relațiile:
a) $R = \{((a,b),(c,d))\,|\,a,b,c,d \in \mathbb{N}, a+d = b+c\}$
b) $R = \{((a,b),(c,d))\,|\,a,b,c,d \in \mathbb{N}, ad = bc\}$
Să se demonstreze că aceste relații sunt relații de echivalență.

11).

Definiția 2.13.1.

Relația R_c se numește *relație circulară*, dacă din $(a, b), (b, c) \in R$ întotdeauna rezultă că $(c, a) \in R$.

Să se demonstreze

Teorema 2.13.1.

Dacă relația circulară R_c este reflexivă, atunci R_c este o relație de echivalență.

12).

Este dată relația $R = \{(x + 2, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 6\}$.

Să se calculeze domeniul și codomeniul relației R.

13).

Este dată relația $R = \{(x, y) \mid$ 3x-2y=3, $2 \leq x, y \leq 8\}$.

Să se calculeze domeniul și codomeniul relației R.

14). Sunt date mulțimile $A = \{6, 11, 14, 15, 24\}$ și $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$. Relația $R \subseteq A \times B$ se definește în modul următor:

$$R = \{(x, y) \mid x \text{ este multiplu al lui } y\}$$

Să se construiască relația R, să se demonstreze că R este relație de ordine parțială, să se deseneze graful redus și diagrama Hasse pentru această relație.

15). Să se demonstreze că relația

$$R = \{(x, y) \mid x \text{ este multiplu al lui } y\}, R \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

nu este o relație de ordine parțială.

16). Sunt date relațiile $R_1, R_2, R_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R_4 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

- $R_1=\{(0,0),(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(9,3),(9,-3),\ldots\}$
- $R_2=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0),(6,-1),(7,-2)\}$
- $R_3=\{(0,0),(1,1),(-1,1),(2,2),(-2,2),(3,3),(-3,3),\ldots\}$
- $R_4=\{(2,1),(3,2),(1,2),(4,3),(2,3),(5,4),(3,4),(6,5),\ldots\}$

Să se definească aceste relații prin proprietăți caracteristice.

17). Este dată relația $R=\{(x,y) \mid (x+3y) \text{ este multiplu al lui } 4\}$, $R \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Să se demonstreze că R este relație de echivalență.

18). Sunt date relațiile:

- $R_1=\{(x,y) \mid x=y\}$, $R_1 \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
- $R_2=\{(x,y) \mid |x|=|y|\}$, $R_2 \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
- $R_3=\{(x,y) \mid x\neq y\}$, $R_3 \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
- $R_4=\{(x,y) \mid xy\geq 0 \text{ sau } xy<0\}$, $R_4 \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
- $R_5=\{(x,y) \mid xy\geq 1\}$, $R_5 \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
- $R_6=\{(x+1,x),(x-1,x)\}$, $R_6 \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Să se caracterizeze (reflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă) aceste relații.

19). Să considerăm relația de divizibilitate pentru numerele naturale pe mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Numărul n se împarte fără rest la numărul m (n este divizibil prin m, n este multiplu al lui m), dacă există $k\in\mathbb{N}$ și $n=km$. Fie $R\subseteq A\times A$, $R=\{(n,m) \mid n \text{ este divizibil prin } m\}$.
Să se arăte că R este relație de ordine parțială și să se deseneze graful redus al acestei relații.

20). Fie $A=\{a,b,c,d\}$. Să definim relația $R\subseteq 2^A\times 2^A$, $R=\{(X,Y) \mid X\subseteq Y$, $card(X)$ – impar, $card(Y)$ – impar$\}$.

Să se arăte că R este relație de ordine parțială și să se deseneze graful acestei relații.

2.14 Solutii

1) (i) $(R_1R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1}R_1^{-1}$.
Fie $(x,y) \in (R_1R_2)^{-1}$. Conform definiției $(y,x) \in R_1R_2$ și există z pentru care $(y,z) \in R^1, (z,x) \in R^2$. Rezultă că $(x,z) \in R_2^{-1}$, $(z,y) \in R_1^{-1}$. Prin urmare, $(x,y) \in R_2^{-1}R_1^{-1}$.
(ii) $R_2^{-1}R_1^{-1} \subseteq (R_1R_2)^{-1}$.
Fie $(x,y) \in R_2^{-1}R_1^{-1}$. Există z pentru care $(x,z) \in R_2^{-1}$, $(z,y) \in R_1^{-1}$. Rezultă că $(z,x) \in R_2, (y,z) \in R_1$ sau $(y,x) \in R_1R_2$.
Astfel, $(x,y) \in (R_1R_2)^{-1}$.

2) Pentru argumentul 1 se pot alege 2 valori, a și b. Pentru agumentul 2 se pot alege câte 2 valori pentru fiecare valoare a argumentului 1, iar pentru argumentul 3 pot fi selectate câte 2 valori pentru fiecare valoare a argumentelor 1 și 2. În total vom obține $2^3 = 8$ variante de funții total definite. Soluția problemei este reprezentată în Tabela 2)1.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	a	a	a	a	b	b	b	b
2	a	a	b	b	a	a	b	b
3	a	b	a	b	a	b	a	b

Tabela 2)1: Reprezentarea tabelară a funcțiilor

În caz general, dacă $|A| = n$, iar $|B| = m$, pot fi construite m^n funcții total definite pentru $n \leq m$. Dacă $n > m$, atunci funcții total definite cu domeniul A și codomeniul B nu există. În acest caz pot fi construite doar funcții parțial definite și/sau nedeterministe.

3) Fie $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ - domeniu, $B = \{1, 2, 3\}$ - codomeniu. Să se determine care dintre funcțiile de mai jos sunt total definite:
(a) $f_1 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), (x_2, 3), (x_3, 3)\}$;
(b) $f_2 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), (x_2, 3), (x_3, 3), (x_4, 1)\}$;
(c) $f_3 = \{(x_1, 3), (x_2, 2), (x_3, 1), (x_4, 2)\}$;
(d) $f_4 = \{(x_1, 1), (x_2, 2), (x_3, 1), (x_1, 3), (x_4, 2)\}$;

(a) f_1 nu este funcție total definită, deoarece nu este definită $f_1(x_4)$. f_1 este parțial definită.
(b) f_2 nu este funcție total definită, deoarece $f_2(x_1) = f_2(x_4) = 1$.
Nu se îndeplinește proprietatea de unicitate.
(c) f_3 este funcție total definită.
(d) f_4 nu este funcție total definită, deoarece $f_4(x_1) = 1$ și $f_4(x_1) = 3$. f_4 este nedeterministă.

4) Soluția problemei este reprezentată în Figura 4)1. Analitic $R_1 \circ R_2 = \{(1,4),(2,6),(b,4),(3,3)\}$.

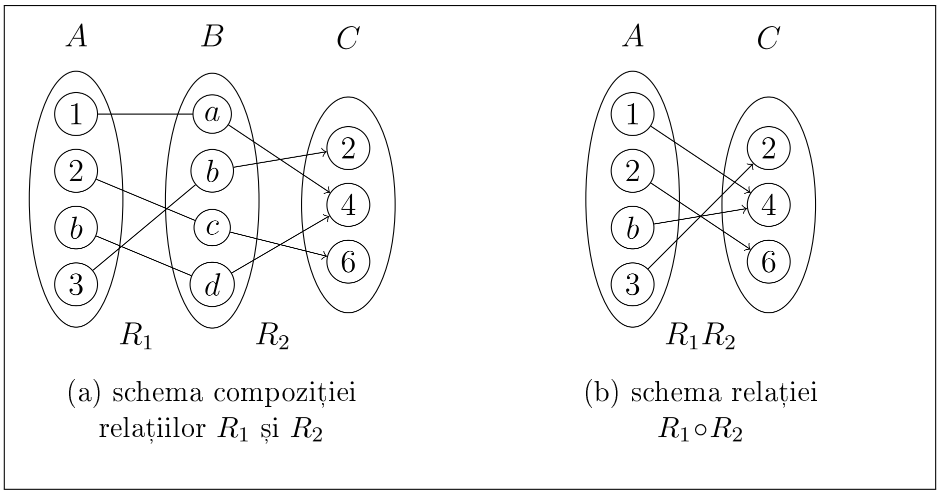


Figura 4)1: Reprezentarea schematică a compoziției relațiilor binare

5) Observăm că $R \subseteq A \times A$. Să demonstrăm că R este relație de echivalență.
(a) *Reflexivitatea.* $x - x = 0$, 0 este divizibil prin 3.
(b) *Simetria.* Fie $(x, y) \in R$. Atunci $x - y = 3k$, iar $y - x = 3(-k)$ - divizibil prin 3.
(c) *Tranzitivitatea.* Fie $(x, y), (y, z) \in R$. $x - y = 3k, y - z = 3r$. $x - z = x - y + y - z = 3k + 3r = 3(k + r)$. Rezultă că $(x, z) \in R$.
$R = \{(1,1),(1,4),(1,7),(2,2),(2,5),(2,8),(3,0),(3,3),(3,6),(3,9),$
$(4,1),(4,4),(4,7),(5,2),(5,8),(6,0),(6,3),(6,6),(6,9),(7,1),(7,4),$
$(7,7),(8,2),(8,5),(8,8),(9,0),(9,3),(9,6),(9,9)\}$.

6) Să demonstrăm că R este relație de echivalență.

(a) *Reflexivitatea.* Fie $x = (x_1, y_1)$. Deoarece $x_1y_1 = y_1x_1$, rezultă că $(x, x) = ((x_1, y_1), (x_1, y_1)) \in R$.

(b) *Simetria.* Fie $(x, y) \in R$ și $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$, $x_1y_2 = y_1x_2$. Rezultă că $x_2y_1 = y_2x_1$. Astfel, $(y, x) \in R$.

(c) *Tranzitivitatea.* Fie $(x, y), (y, z) \in R$, $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, $x_1y_2 = x_2y_1, x_2y_3 = y_2x_3$. Înmulțind ultimele două egalități parte cu parte, obținem: $x_1y_2x_2y_3 = x_2y_1y_2x_3$. După simplificare: $x_1y_3 = y_1x_3$. Așadar, $(x, z) \in R$.

Este logic să notăm $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ prin $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots$ Observăm că oricare n-ar fi perechea $\frac{n}{m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, perechile $\frac{n}{m}, \frac{2n}{2m}, \frac{-2n}{2m}, \frac{3n}{3m}, \frac{-3n}{3m}, \ldots$ se vor include în aceiași clasă de echivalență. De exemplu, $\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{-2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{-3}{9}, \ldots$ Este clar, fiecare pereche din această clasă definește același număr rațional și invers, orice număr rațional $\frac{n}{m}$ definește o clasă de echivalență în R.

7) Să demonstrăm că R^{-1} este relație de echivalență.

(a) *Reflexivitatea* este evidentă.

(b) *Simetria.* Fie $(a, b), (b, a) \in R$. Atunci $(b, a), (a, b) \in R^{-1}$.

(c) *Tranzitivitatea.* Fie $(a, b), (b, c), (a, c) \in R$. Rezultă că $(c, b), (b, a), (c, a) \in R^{-1}$.

8) Din definiție $(x, y) \in R$ dacă împărțite la 3 și x, și y au același cât. De exemplu, 3 și 5: $3 = 1 \cdot 3 + 0,\ 5 = 1 \cdot 3 + 2$.
Să demonstrăm că R este relație de echivalență.

(a) *Reflexivitatea.* Evident, $(x, x) \in R$.

(b) *Simetria.* Fie $(x, y) \in R$, $x = q_1 \cdot 3 + r_1, y = q_1 \cdot 3 + r_2, 0 \leq r_1, r_2 < 3$. Evident, $(y, x) \in R$.

(c) *Tranzitivitatea.* Fie $(x, y), (y, z) \in R, x = q_1 \cdot 3 + r_1, y = q_1 \cdot 3 + r_2, z = q_1 \cdot 3 + r_3, 0 \leq r_1, r_2, r_3 < 3$. Împărțite la 3 și x, și y, și z produc același cât - q_1. Rezultă că $(x, z) \in R$.

În dependență de câtul împărțirii, clasese de echivalență se construiesc simplu:

$[0] = \{1, 2\}$, $[1] = \{3, 4, 5\}$, $[2] = \{6, 7, 8\}$, $[3] = \{9\}$.

9).

a)
- *Reflexivitatea* este evidentă, deoarece $x + x$ este număr par pentru orice x;

- *Simetria.* Dacă $(x, y) \in R$, atunci și $(y, x) \in R$, deoarece $x + y = y + x$.

- *Tranzitivitatea.* Fie $x + y = 2i$, și $y + z = 2j, i, j \in \mathbb{N}$. Să arătăm că $x + z = 2k, k \in \mathbb{N}$.
Deoarece $2i > y, 2j > y$ $(x, z \in \mathbb{N})$, obținem $x + z = (2i - y) + (2j - y) = 2i + 2j - 2y = 2k, k \in \mathbb{N}$.

b)
Să observăm că oricare n-ar fi 2 numere impare x, y, $(x, y) \in R$. Astfel, mulțimea numerelor impare alcătuiesc o clasă de echivalență:

$$K_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

Analogic, pentru numerele pare avem a doua clasă de echivalență.

$$K_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

10).

Să demonstrăm relația a).
- *Reflexivitatea.* $((a, b), (a, b)) \in R$, deoarece $a + b = b + a$.

- *Simetria.* Să ne convingem că, dacă $((a, b), (c, d)) \in R$, adică $a + d = b + c$, atunci și $((c, d), (a, b)) \in R$. Este adevărat, deoarece $c + b = d + a$.

- *Tranzitivitatea.* Fie $((a, b), (c, d)) \in R$ și $((c, d), (e, f)) \in R$. Avem $a+d = b+c$ și $c+f = d+e$. Adunând aceste 2 egalități obținem $a+d+c+f = b+c+d+e$, deci, $a + f = b + e$. Rezultă că $((a, b), (e, f)) \in R$.

Relația b) se demonstrează analogic.

11).

Fie relația circulară R_c relație reflexivă. Să arătăm că R_c este simetrică și tranzitivă.

- *Simetria.* Să ne convingem că, dacă $(a, b) \in R_c$, atunci și $(b, a) \in R_c$. Este adevărat, deoarece $(b, b) \in R_c$ și prin circularitate $(b, a) \in R_c$.

- *Tranzitivitatea.* Fie $(a, b), (b, c) \in R_c$. Să arătăm că $(a, c) \in R_c$. Din $(a, b), (b, c) \in R_c$ rezultă că $(c, a) \in R_c$, iar prin simetrie și $(a, c) \in R_c$.

12).

Substituind $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ în $(x + 2, 2x + 1)$ obţinem:

$$R = \{(3, 2), (4, 4), (5, 6), (6, 8), (7, 10), (8, 12)\}$$

De aici rezultă:
$domeniu(R) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$codomeniu(R) = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

13).

$R = \{(3, 3), (5, 6)\}$,
$domeniu(R) = \{3, 5\}$,
$codomeniu(R) = \{5, 6\}$.

14).

$R=\{(6,6),(6,2),(6,3),(14,2),(14,7),(25,5), (24,2),$
$(24,3),(24,6)\}$

Nu există nici o relaţie pentru 11, adică nu există $y \in B$ pentru care $(11, y)$ ar putea fi inclus în R.

Să demonstrăm în continuare că R este relaţie de ordine parţială.

- *Reflexivitatea.* Evident, orice număr este multiplu pentru el însuşi.

- *Antisimetria.* Să ne convingem că, dacă $(x, y), (y, x) \in R$, atunci rezultă că $x = y$. Avem $x = ky, y = lx, k, l \in \mathbb{N}$, de unde $x = ky = klx$, ceea ce este adevărat doar pentru $k = l = 1$. Rezultă $x = y$

- *Tranzitivitatea.* Fie $(x, y), (y, z) \in R$. Să arătăm că şi $(x, z) \in R$. Avem $x = ky, y = lz$ şi $x = ky = klz$, deci $x = mz$ şi $(x, z) \in R$.

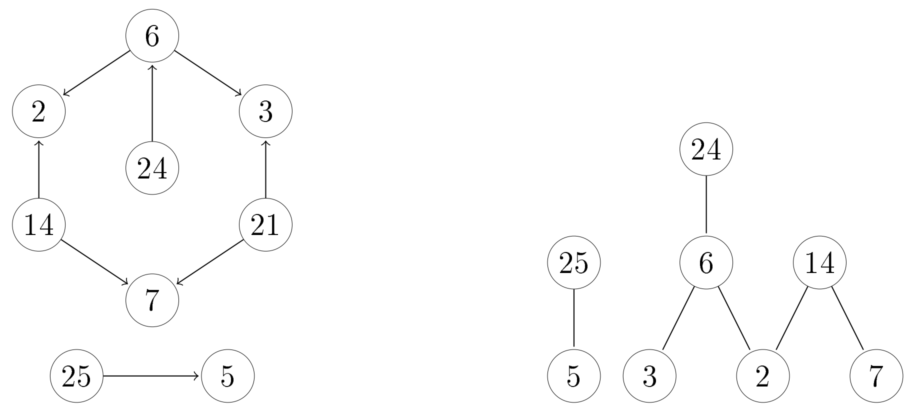
Reprezentările grafice sunt inserate în Figura 14)2.

15). Să se demonstreze că relaţia

$$R = \{(x, y)\,|x \text{ este multiplu al lui } y\}, R \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

nu este o relaţie de ordine parţială.

Ne convingem uşor că R este reflexivă şi tranzitivă, dar nu este antisimetrică. Într-adevăr, R nu este antisimetrică, deoarece, din $(2, -2), (-2, 2) \in R$, adică $2 = (-1)(-2), -2 = (-1)2$, rezultă $2 \neq -2$.



(a) Graful redus. (b) Diagrama Hasse.

Figura 14)2: Reprezentări grafice pentru relația
"x este multiplu al lui y".

16).

- $R_1 = \{(x,y) \mid x = y^2\}$
- $R_2 = \{(x,y) \mid x + y = 5,\ 1 \le x \le 7\}$
- $R_3 = \{(x,y) \mid y = |x|\}$
- $R_4 = \{(x+1,x),(x-1,x)\}$

17).

- *Reflexivitatea.* Droarece $x + 3x = 4x$ este multiplu al lui 4, $(x,x) \in R$.

- *Simetria.* Fie $(x,y) \in R$, $x + 3y = 4l$. Pentru (y,x) obținem $y + 3x = y + 12l - 9y = 12l - 8y = 4(3l - 2y)$. Deci, $(y,x) \in R$.

- *Tranzitivitatea.* Fie $(x,y),(y,z) \in R$, $x + 3y = 4l, y + 3z = 4m$. Pentru (x,z) obținem: $x + 3z = 4l - 3y + 4m - y = 4l + 4m - 4y = 4(l + m - y)$. Rezultă că $(x,z) \in R$.

18).

- $R_1 = \{(x,y) \mid x = y\}$, $R_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
  R_1 este reflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă.

- $R_2 = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$, $R_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

  R_2 este reflexivă, simetrică, tranzitivă. Nu este antisimetrică, deoarece din $(x, y), (y, x) \in R_2$ nu întotdeauna rezultă $x = y$. De exemplu, (2,-2),(-2,2)$\in R_2$, dar $2 \neq -2$.

- $R_3 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$, $R_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

  – nu este reflexivă, deoarece $x = x$,$(x, x) \notin R_3$;
  – este simetrică;
  – nu este antisimetrică, deoarece din $x \neq y, y \neq x$ nu rezultă $x = y$;
  – nu este tranzitivă, deoarece, de exemplu, (5,3),(3,5)$\in R_3$, dar (5,5)$\notin R_3$.

- $R_4 = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$, $R_4 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

  Deoarece $x, y \in \mathbb{Z}$, avem $x, y \leq -1$ sau $x, y \geq 1$, adică x, y nu pot primi valoarea 0.
  Astfel, R_4
  – este reflexivă;
  – este simetrică;
  – nu este antisimetrică. Din $xy \geq 1$ și $yx \geq 1$ nu rezultă $x = y$;
  – este tranzitivă. Fie $(x, y), (y, z) \in R_4$, $xy \geq 1$ și $yz \geq 1$. Sunt posibile 2 cazuri:

  1) $x \geq 1, y \geq 1$. Din $yz \geq 1$ rezultă că $z \geq 1$ și, respectiv $xz \geq 1$.

  2) $x \leq -1, y \leq -1$. Din $yz \geq 1$ rezultă că $z \leq -1$ și, respectiv $xz \geq 1$.

- $R_5 = \{(x + 1, x), (x - 1, x)\}$, $R_6 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

  – nu este reflexivă, deoarece $x \neq x + 1$, $x \neq x - 1$;
  – este simetrică. Dacă $(x, y), (y, x) \in R_5$, atunci sunt posibile 2 cazuri:

  1) $(x+1, x) \in R_5$, atunci pentru $x = y-1$ obținem $(x, x+1) = (y-1, y) \in R_5$.

  2) $(x-1, x) \in R_5$, atunci pentru $x = y+1$ obținem $(x, x-1) = (y+1, y) \in R_5$.

  – nu este antisimetrică. De exemplu, din (3,4),(4,3)$\in R_5$ nu rezultă 4=3.
  – nu este tranzitivă. De exemplu, (4,3),(3,2)$\in R_5$, iar (4,2)$\notin R_5$.

19).

– *Reflexivitatea.* Evident, $(n, n) \in R$.

– *Tranzitivitatea.* Fie $n = k_1 m, m = k_2 l$. Substituind m obținem: $n = k_1 m = k_1 k_2 l = kl$, $k = k_1 k_2$.

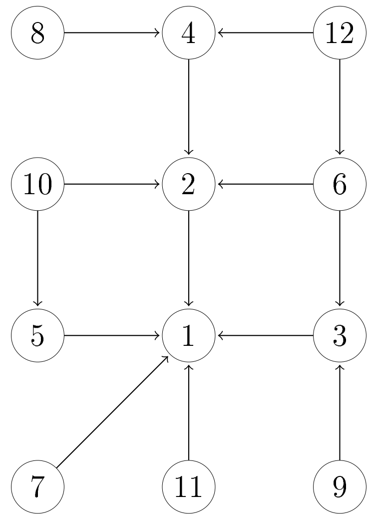


Figura 19)3: Relația "n este divizibil prin m".

– *Antisimetria.* Fie $(m, n), (n, m) \in R$, adică $n = k_1 m, m = k_2 n$. Obținem $n = k_1 m = k_1 k_2 n$. Deoarece $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, rezultă că $k_1 = k_2 = 1$, respectiv, $n = m$.

Graful redus al relației este prezentat în figura 19)3.

20).

În 2^A există 8 subulțimi cu $card(X)$ impar. Acestea sunt:

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$,$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

De aici relația R se construiește simplu:
R=$\{(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a, b, c\}),(\{a\},\{a, b, d\}),(\{a\},\{a, c, d\}),$
$(\{b\}, \{b\}), (\{b\}, \{a, b, c\}), (\{b\}, \{a, b, d\}), (\{b\}, \{b, c, d\}),$
$(\{c\}, \{c\}), (\{c\}, \{a, c, d\}), (\{c\}, \{a, b, c\}), (\{c\}, \{b, c, d\}),$
$(\{d\}, \{d\}), (\{a, b, c\}, \{a, b, c\}), (\{a, b, d\}, \{a, b, d\}),$
$(\{a, c, d\}, \{a, c, d\}), (\{b, c, d\}, \{b, c, d\})\}$.

Reflexivitatea, *tranzitivitatea* și *antisimetria* se demonstrează simplu.

Graful redus al relației este prezentat în Figura 20)4.

$$\begin{tikzcd}
 & \{c\} \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[ddl] & & \\
 & \{b,c,d\} & \{d\} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \{a,c,d\} \\
\{a,b,c\} & \{b\} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r] & \{a,b,d\} & \\
 & & \{a\} \arrow[u] \arrow[uur] \arrow[ull] &
\end{tikzcd}$$

Figura 20)4: Relația "$X \subseteq Y$, $card(X)$ – impar, $card(Y)$ – impar".

CAPITOLUL 3

Metode de demonstrare

***

Ce este o teoremă? Teorema reprezintă o afirmație care poate fi adevărată sau falsă, ceea ce se stabilește prin demonstrație. În caz general o teoremă poate fi formulată ca "q dacă p" sau "dacă p, atunci q", unde p și q sunt niște propoziții, p se numește "ipoteză" ("premisă"), iar q - "concluzie". Vom numi această formulare *teorema directă*. Schimbând cu locul ipoteza cu concluzia vom obține *teorema reciprocă* pentru teorema directă. Dacă teorema directă este adevărată, teorema reciprocă nu întotdeauna va fi adevărată.
De exemplu,

- *teorema directă*: "dacă numărul natural n este divizibil cu 9, atunci n este divizibil și cu 3".
- *teorema reciprocă*: "dacă numărul natural n este divizibil cu 3, atunci n este divizibil și cu 9" nu este adevărată, de exemplu, pentru $n = 24$.

Menționăm că "numărul natural n este divizibil cu 9" este ipoteza teoremei directe, iar "n este divizibil și cu 3" este concluzia teoremei directe. Pentru teorema reciprocă avem exact situația inversă.

În unele cazuri ambele teoreme - directă și reciprocă - sunt adevărate. De exemplu,

- *teorema directă*: "dacă triunghiul are 2 înălțimi congruente, atunci el este isoscel".
- *teorema reciprocă*: "dacă triunghiul este isoscel, atunci el are 2 înălțimi congruente".

În acest caz ambele teoreme pot fi unite în una: "Triunghiul este isoscel atunci și numai atunci, când are 2 înălțimi congruente” sau “Triunghiul este isoscel dacă și numai dacă are 2 înălțimi congruente”.

Pentru a demonstra veridicitatea unor astfel de teoreme trebuie de demonstrat atât teorema directă, cât și cea reciprocă.

În continuare ne vom opri la câteva metode de demonstrare (cele mai răspândite): metoda inducției matematice, metoda reducerii la absurd și principiul porumbeilor.

3.1 Metoda inducției matematice

O metodă foarte des folosită în matematică pentru demonstrarea afirmațiilor ce depind de un numar natural este *inducția matematică*. Fie $m \in \mathbb{N}$ și $P(n)$ o afirmație care depinde de n ($n \in \mathbb{N}$).
Dacă

(1) $P(m)$ este adevărată și

(2) din faptul că $P(k)$ este adevărată întotdeauna rezultă că și $P(k+1)$ este adevărată pentru toți $k \geq m$,

atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq m$.
$P(n)$ se mai numește *ipoteza inducției*, (1) - *baza inducției*, iar (2) – *pasul inducției*. De obicei $m = 0$ sau $m = 1$.

Aducem mai jos câteva exemple.

Exemplul 3.1.1.

Să se calculeze suma

$$S(n) = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1), n \in \mathbb{N}$$

Mai întâi să calculăm:

$S(1) = 1$
$S(2) = 1 + 3 = 4$
$S(3) = 1 + 3 + 5 = 9$
$S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$\ldots$

Este logic să presupunem că, în caz general, $S(n) = n^2$, aceasta fiind *ipoteza inducției*.

(1) *Baza inducției.* Pentru $k = 1$ afirmația este adevărată, deoarece $S(1) = 1 = 1^2$

(2) *Pasul inducției.* Fie $S(k) = k^2$ pentru $k > 1$. Să calculăm $S(k + 1)$.

$S(k+1) = 1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = S(k)+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2$
Rezultă că $S(n) = n^2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 3.1.2.

Să se demonstreze că

$$n - 3 < \frac{n^2 - n}{15},\ \text{pentru orice } n > 15 \ (\textit{ipoteza inducției})$$

(1) *Baza inducției.* Pentru $k = 16$ afirmația este adevărată, deoarece $16 - 3 = 13$, $\frac{16^2 - 16}{15} = \frac{256 - 16}{15} = \frac{240}{15} = 16$ și $13 < 16$.

(2) *Pasul inducției.* Fie (a) $k - 3 < \frac{k^2 - k}{15}$ pentru orice $k > 16$. Să arătăm că $(k+1) - 3 < \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{15}$. Observăm că (b) $1 < \frac{2k}{15}$, deoarece $k > 16$.
Dacă adunăm inegalitățile (a) și (b) obținem: $(k - 3) + 1 < \frac{k^2 - k}{15} + \frac{2k}{15}$.
Urmează:
$(k+1) - 3 < \frac{k^2 - k + 2k}{15}$, $(k+1) - 3 < \frac{k^2 + 2k + 1 - k - 1}{15}$, $(k+1) - 3 < \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{15}$.

Rezultă că $n - 3 < \frac{n^2 - n}{15}$, pentru orice $n > 15$.

Principiul inducției matematice trebuie aplicat cu atenție. În caz contrar putem obține “demonstrații” absurde, cum ar fi, de exemplu, “toate pisicile sunt negre”.

3.2 Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este foarte des folosită în matematică și informatică. La baza acestei metode stă una din legile fundamentale ale logicii - legea terțului exclus. Schema metodei este următoarea. Fie dată o afirmație, s-o notăm prin A, pentru care există afirmația contradictorie, negația afirmației A, s-o notăm prin $\neg A$ (sau $\overline{A}$). Este foarte important să ne convingem, că nu există o altă variantă (terțul exclus sau a treia variantă). Dacă asupra afirmațiilor A și $\neg A$ aplicăm legea terțului exclus, atunci este suficient să se demonstreze că este adevărată (falsă) una din afirmații, cealaltă automat devine falsă (adevărată).

În mod obișnuit se presupune provizoriu că A nu este adevărată, dar este adevărată $\neg A$. Invocând o serie de raționamente, afirmații deja demonstrate, se ajunge la un rezultat absurd, ceea ce înseamnă că afirmația $\neg A$ nu este adevărată. Aplicând legea terțului exclus (negarea negației) concludem că este adevărată afirmația $\neg(\neg A)$. Așa cum $\neg(\neg A) = A$, concluzia finală va fi: afirmația A este adevărată.
Aducem mai jos câteva exemple.

Exemplul 3.2.1.

Să se demonstreze că numărul natural n este par dacă și numai dacă n^2 este par.

- *dacă*: fie n^2 par. Să arătăm că și n este par. Presupunem contrariul, adică n este impar, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Calculăm $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2k_1+1$, $k_1 = 2k^2+2k$, $k_1 \in \mathbb{N}$. Rezultă că și n^2 este impar. Absurd, deoarece n^2 este dat par.
- *numai dacă*: fie n par. Atunci $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Calculam $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k_2, k_2 \in \mathbb{N}$. Rezultă că și n^2 este par.

Exemplul 3.2.2.

Să se demonstreze că nu există număr rațional x cu proprietatea $x^2 = 2$ (teorema lui Pitagora).

Să presupunem contrariul, adică există un număr rațional $x = \dfrac{m}{n}$, $x^2 = 2$, $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$, iar fracția $\dfrac{m}{n}$ este ireductibilă (m și n nu au divizori comuni). Așa cum $x^2 = 2$, $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$ sau $m^2 = 2n^2$. De aici rezultă că m^2 este număr par. Am demonstrat mai sus că patratul unui număr este par atunci și numai atunci, când acest număr este par. Așadar, există $k \in \mathbb{N}$ și $m = 2k$. Substituind în egalitatea de mai sus obținem: $4k^2 = 2n^2$ sau $2k^2 = n^2$. Rezultă că n tot este par. Absurd, deoarece m și n nu au divizori comuni.
Concluzia finală: nu există număr rațional x cu proprietatea $x^2 = 2$.

Exemplul 3.2.3.

Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale de pe segmentul $[0, 1]$ nu este numărabilă (teorema lui Cantor, metoda diagonalizării). Demonstrarea a fost expusă în subcapitolul 1.3.

3.3 Principiul porumbeilor

Ideea principiului porumbeilor (principiul Dirichlet, principiul cutiilor) este simplă: dacă, de exemplu, avem 9 căsuțe pentru porumbei dar trebuie "cazați" 10 porumbei, atunci cel puțin o căsuță va "găzdui" doi sau mai mulți porumbei (Figura 3.3.1).

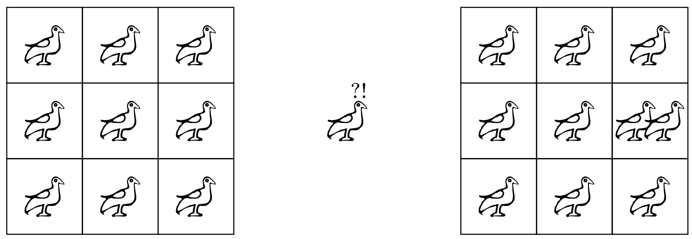


Figura 01: Principiul porumbeilor

Să formulăm principiul un pic mai general. Dacă avem m cutii, $m \geq 1$, în care trebuie să plasăm n obiecte, $n > m$, atunci cel puțin într-o cutie vom plasa mai mult de un obiect. Deși formularea principiului este foarte simplă, există multe afirmații (probleme) care pot fi demonstrate (soluționate) aplicând acest principiu.

Exemplul 3.3.1.

Fie dată mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ("porumbeii"). Orice submulțime arbitrară de 5 elemente din mulțimea A va conține cel puțin 2 numere suma cărora va fi 9.

Soluție
Să observăm că $(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)$ sunt toate perechile posibile suma cărora este 9, acestea fiind "căsuțele". Astfel, numere desperecheate pot fi alese cel mult 4. De exemplu, $\{1, 7, 3, 4\}$. Al cincilea număr obligatoriu va fi perechea unui numar deja inclus în submulțimea selectată.

Exemplul 3.3.2.

Cinci filozofi cinează zilnic la o masă rotundă fiecare având farfuria proprie (Figura 02). Fotoliile și farfuriile sunt amplasate simetric în jurul mesei. Într-o zi, grăbindu-se (sau fiind un pic distrați), filozofii s-au așezat la masă fiecare având în față o farfurie străină.

Dar masa poate fi rotită schimbând poziția farfuriilor. Să se demonstreze că există, prin rotații, o poziție în care cel puțin 2 filozofi vor avea în față farfuria proprie.

Soluție

Poziția inițială este prezentată în Figura 03a (Figura 02). În rezultatul rotațiilor total sunt posibile 5 poziții. Vedem aceste poziții (pozițiile 0-4) în Figura 03b.

Așa cum poziția 0, conform condiției, nu poate fi soluție, o excludem din listă. Obținem 4 poziții (pozițiile 1-4 Figura 03c) care vor fi examinate în continuare. Astfel avem 4 poziții ("căsuțe") la care trebuie să aliniem 5 filozofi ("porumbei"). Doar cel mult 4 filozofi pot fi aliniați la poziții diferite. Al cincilea filozof se va alinia cu una din pozițiile la care s-a aliniat deja cel puțin un filozof. Vedem schema soluției în tabelul final, Figura 03d.

Problema poate fi generalizată simplu pentru n filozofi, $n \geq 2$.

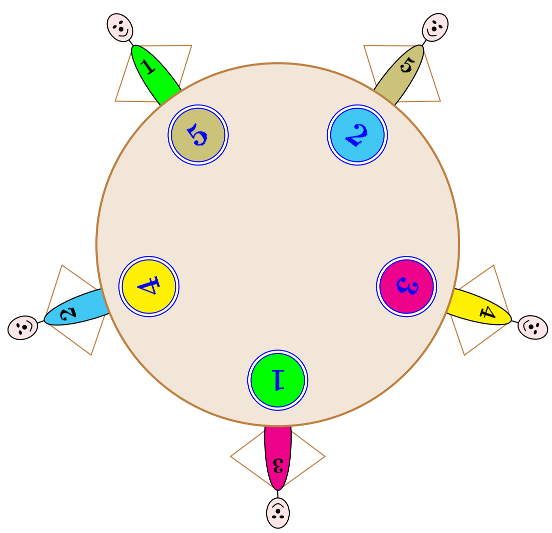


Figura 02: Cina celor cinci filozofi

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	5	4	1	3	2
1					
2					
3					
4					

(a) poziția inițială

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	5	4	1	3	2
1	4	1	3	2	5
2	1	3	2	5	4
3	3	2	5	4	1
4	2	5	4	1	3

(b) toate pozițiile posibile

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0					
1	4	1	3	2	5
2	1	3	2	5	4
3	3	2	5	4	1
4	2	5	4	1	3

(c) poziții spre examinare

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0					
1	4	1	3	2	5
2	1	3	2	5	4
3	3	2	5	4	1
4	2	5	4	1	3

(d) rezultatul final

Figura 03: Cina celor cinci filozofi. Soluția

CAPITOLUL 4

Logică matematică și algebră Booleană

***

Logică matematică și algebră Booleană

CAPITOLUL 5

Grafuri și arbori

***

Grafuri și arbori

Capitolul 6

Elaborarea algoritmilor

***

Noțiunea de algoritm este una centrală în informatică și matematică. La fel ca în cazul mulțimilor studierea algoritmilor începe cu noțiuni și formulări intuitive. Prin algoritm se înțelege o secvență finită și ordonată de pași (reguli) ce determină un proces de calcul care pornind de la o mulțime finită de date inițiale, urmând pașii formulați, construiește după un număr finit de pași, posibil cu repetări, o mulțime finită de rezultate.
Proprietățile principale ele algoritmului:

Finitudine. Algoritmul întotdeauna se va opri după efectuarea unui număr finit de pași.

Determinism. Pașii algoritmului trebuie să fie definiți precis, fără posibilități de inerpretare ambigue.

Intrări. Algoritmul poate avea zero sau o mulțime finită de date care se specifică la inițierea algoritmului sau în mod dinamic pe parcursul executării.

Ieșiri. La final algoritmul returnează una sau mai multe valori care au o relație specifică cu intrările și reprezintă soluția problemei.

Eficacitate. Deoarece o problemă poate fi soluționată prin mai multe metode (algoritmi), este logic să se aleagă metoda care folosește cât mai puțin timp și cât mai puține resurse. Uneori aceste criterii sunt antagoniste. În acest caz se alege raportul optimal.

Au fost propuse și definiții formale pentru noțiunea de algoritm (mașina Turing, funcțiile recursive, mașina Post, algoritmul normal Markov), dar s-a demonstrat că toate aceste modele sunt echivalente (teza Turing-Church).

Proprietatea algoritmului de a avea o secvență ordonată de pași se realizează atribuind fiecărui pas o etichetă unică. De obicei aceste etichete sunt alfanumerice. Structura generală a unui agoritm este următoarea:

0. Start
1. Pasul 1
2. Pasul 2

   ......

n-1. Pasul n-1

n. Stop

Un pas în descrierea algoritmului poate fi:

- Instrucțiune Start (inițierea algoritmului)
- Instrucțiune Stop (terminarea algoritmului)
- Instrucțiune de intrare (specificarea datelor de intrare)
- Instrucțiune de ieșire (extragerea rezultatelor)
- Secvență liniară de calcule (atribuiri, operații matematice etc.)
- Instrucțiune decizională (if-then-else, goto, loop, do-while etc.)
- Comentariu (o explicație, o constatare, care nu influențează executarea algoritmului)

Deoarece problemele propuse spre rezolvare pot fi mai simple, mai complicate, foarte complicate, dar și din considerente că pentru una și aceeași problemă pot exista mai multe metode (algoritmi) de soluționare, au fost inventate mai multe tehnici de elaborare a algoritmilor. Ne vom opri în continuare la câteva, cele mai răspândite, astfel de tehnici.

6.1 Tehnica forței brute

Este o abordare directă care rezolvă problema prin analiza exhaustivă a tuturor soluțiilor posibile. Este calea cea mai simplă, cea mai intuitivă de a rezolva problema. Algoritmii proiectați cu aplicarea forței brute nu sunt întotdeauna eficienți. Dacă, de exemplu, spațiul soluțiilor posibile este foarte mare, algoritmul ar putea necesita zile sau chiar ani pentru rezolvarea problemei.

Exemple de algoritmi care ilustrează tehnica forței brute:

- Căutare liniară (secvențială)
- Căutarea elementului maximal (minimal)
- Înmulțirea matricelor prin definiție
- Căutarea celor mai apropiate două puncte în plan

- Căutarea unui subșir într-un șir
- Sortare prin metoda bulelor (bubble sorting)

Exemplul 6.1.1.

Fie dată o listă de numere $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n), n \geq 1$, și un număr x numit cheia de căutare. Se cere să se verifice dacă x se află în această listă. Cu alte cuvinte, să se găsească (dacă există) $1 \leq i \leq n$ pentru care $x = l_i$. Ideea algoritmului este simplă: verificăm pe rând, începând cu primul, elementele din listă până când găsim elementul căutat.

Algoritmul 6.1.1 CĂUTARE LINIARA (l, x)

0. ***start***
1. $l := (l_0, l_1, \ldots, l_{n-1})$
2. ***for*** $i := 0$ ***to*** $n-1$
3.   ***if*** $x = l_i$ ***then***
4.   ***return*** "x aparține listei l, $x = l_i$ "
5.   ***stop***
6.   ***endif***
7. ***endfor***
8. ***return*** "x nu aparține listei l "
9. ***stop***

Exemplul 6.1.2.

Sortarea prin metoda buleleor presupune parcurgerea listei de la stânga la dreapta comparând fiecare element cu succesorul său. Daca aceste elemente nu sunt in ordine crescătoare, ele se interschimbă. Astfel, la parcurgeri multiple elementele mai mari se vor deplasa spre dreapta, iar cele mai mici - spre stânga. Daca lista este deja ordonată, toate perechile de elemente vecine sunt in ordine crescătoare și algoritmul se oprește.

Un exemplu de aplicare a algoritmului este prezentat în Figura 01.

Algoritmul 6.1.2 SORTARE PRIN METODA BULELOR (l)

start
$l := ({}_0, l_1, \ldots, l_{n-1})$
$ord :=$ ***true***
loop while ord
    $ord :=$ ***false***
    for $i := 0$ ***to*** $n-2$
        $x := l_i$
        when $x > l_{i+1}$
            $l_i := l_{i+1};\ l_{i+1} := x;\ ord :=$ ***true***
        end when
    endfor
endwhile
return l
stop

Lista inițială $l = (l_0\ l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5\ l_6\ l_7) = (15\ 43\ 6\ 10\ 31\ 6\ 17\ 4)$

								Iterația 0
15	43	6	10	31	6	17	4	i=1
15	6	43	10	31	6	17	4	i=2
15	6	10	43	31	6	17	4	i=3
15	6	10	31	43	6	17	4	i=4
15	6	10	31	6	43	17	4	i=5
15	6	10	31	6	17	43	4	i=6
								Iterația 1
15	6	10	31	6	17	4	43	i=0
6	15	10	31	6	17	4	43	i=1
6	10	15	31	6	17	4	43	i=3
6	10	15	6	31	17	4	43	i=4
6	10	15	6	17	31	4	43	i=5
								Iterația 2
6	10	15	6	17	4	31	43	i=2
6	10	6	15	17	4	31	43	i=4
								Iterația 3
6	10	6	15	4	17	31	43	i=1
6	6	10	15	4	17	31	43	i=3
								Iterația 4
6	6	10	4	15	17	31	43	i=2
								Iterația 5
6	6	4	10	15	17	31	43	i=1
								Iterația 6
6	4	6	10	15	17	31	43	i=0
								Iterația 7
4	6	6	10	15	17	31	43	

Lista finală $l = (l_0\ l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5\ l_6\ l_7) = (4\ 6\ 6\ 10\ 15\ 17\ 31\ 43)$

Figura 01: Sortare prin metoda bulelor

Exemplul 6.1.3.

Fie date n puncte pe plan $l = (l_0, l_1, \ldots, l_{n-1})$ specificate prin coordonatele lor, $l_i = (x_i, y_i)$. Să se determine două cele mai apropiate puncte.

Ideea algoritmului este simplă: se calculează distanțele între toate perechile posibile de puncte $(l_i, l_j), l_i \neq l_j$, ținând cont de faptul că distanța între (l_i, l_j) este egală cu distanța între (l_j, l_i) (pentru a evita calculele redundante).

Un exemplu de aplicare a algoritmului este prezentat în Figura 02. Date inițiale: lista punctelor $l = (n_0, n_1, \ldots, n_{10})$=((0.5, 0.5), (1.0, 4.0), (2.5, 5.5), (2.5, 3.5), (6.0, 5.0, (5.0, 6.0), (4.5, 4.0), (5.5, 3.5), (5.0, 2.0), (3.5, 2.5), (6.0, 1.0), (2.5, 1.5)).

Rezultatul obținut: n_6=(4.5, 4.0), n_7=(5.5, 3.5), $d(n_6, n_7)$=1.118.

Algoritmul 6.1.3 DISTANȚA MINIMALĂ ÎNTRE DOUĂ PUNCTE (l)

0. ***start***
1. $l := ((x_0, y_0)(x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}))$

   /*Introducem coordonatele punctelor.*/
2. $x := \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + ((y_1 - y_0)^2}$

   /*Presupunem că distanța dintre n_0 și n_1 este distanța minimală.*/
3. ***for*** $i := 0$ ***to*** $n - 2$
4.   ***for*** $j := i + 1$ ***to*** $n - 1$
5. $d := \sqrt{(x_j - x_i)^2 + ((y_j - y_i)^2}$
6.   ***when*** $d < x$
7. $x := d;\ imin := i;\ jmin := j;$
8.   ***endwhen***
9.   ***endfor***
10. ***endfor***
11. ***return*** $((x_{imin}, y_{imin}), (x_{jmin}, y_{jmin}), x)$
12. ***stop***

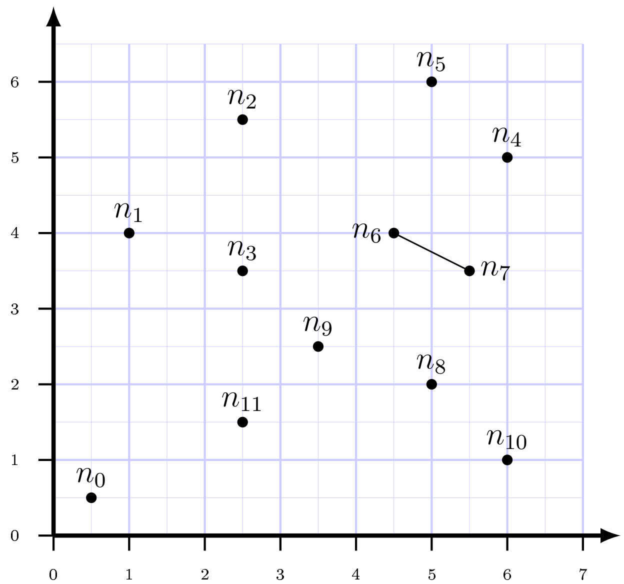


Figura 02: Distanța minimală între două puncte

6.2 Algoritmi recursivi

6.3 Divide et impera

6.4 Backtracking

6.5 Algoritmi "greedy"

6.6 Programare dinamică

Bibliografie

***

[1] Schwartz, J.T., Dewar, R.B.K., Dubinsky, E., and Schonberg, E. Programming with sets, an introduction to SETL. Springer-Verlag, 1986.

Index

***