# Неполные множества ортогональных парастрофов $T$-квазигрупп

*Татьяна Попович*

**IMI - 2015, V.D. Belousov - 90**

Как известно, бинарная квазигруппа имеет систему из шести парастрофов $A$, ${}^sA$, ${}^rA$, ${}^{lr}A$, ${}^lA$, ${}^{rl}A$, которые могут совпадать.

В данном сообщении мы продолжаем исследование квазигрупп с различными множествами парастрофов и ортогональность этих множеств.

В работе [BelPop,2011] показаны возможные варианты равенства (склеивания) парастрофов квазигруппы и установлены условия, при которых квазигруппы из системы парастрофов склеиваются определенным образом.

**Теорема 1 [Pop,2012].** *Возможны следующие множества парастрофов квазигруппы* $(Q,\, A)$ : $\overline{\Sigma}_1(A) = \{A\}$; $\overline{\Sigma}_6(A) = \{A,\, {}^sA,\, {}^rA,\, {}^{lr}A,\, {}^lA, {}^{rl}A\}$;

$\overline{\Sigma}_2(A) = \{A,\, {}^sA\} = \{A = {}^{lr}A = {}^{lr}A,\, {}^lA = {}^rA = {}^sA\}$;

$\overline{\Sigma}_3(A) = \{A,\, {}^{lr}A,\, {}^{rl}A\}$ *со следующими вариантами склеивания:*

$\overline{\Sigma}_3^1(A) = \{A = {}^rA,\, {}^lA = {}^{lr}A,\, {}^{rl}A = {}^sA\}$;

$\overline{\Sigma}_3^2(A) = \{A = {}^lA,\, {}^rA = {}^{rl}A,\, {}^{lr}A = {}^sA\}$;

$\overline{\Sigma}_3^3(A) = \{A = {}^sA,\, {}^rA = {}^{lr}A,\, {}^lA = {}^{rl}A\}$.

Квазигруппа $(Q,\, A)$ называется $T$-квазигруппой, если существует абелева группа $(Q,\, +)$, ее автоморфизмы $\varphi$ и $\psi$ и элемент $c \in Q$ такие, что $A(x,\, y) = \varphi x + \psi y + c$ для all $x,\, y \in Q$.

Парастрофы $T$-квазигруппы $A(x,\, y) = \varphi x + \psi y + c$ имеют вид:

$A(x,\, y) = \varphi x + \psi y + c$, ${}^sA(x,\, y) = \psi x + \varphi y + c$, ${}^rA(x,\, y) = \psi^{-1}(y - \varphi x - c)$,

${}^lA(x,\, y) = \varphi^{-1}(x - \psi y - c)$, ${}^{rl}A(x,\, y) = \psi^{-1}(x - \varphi y - c)$, ${}^{lr}A(x,\, y) = \varphi^{-1}(y - \psi x - c)$,

где $Ix = -x$.

**Теорема 2 [BelPop,2012].** *Пусть* $(Q, A)$ *- конечная или бесконечная* $T$*-квазигруппа вида* $A(x, y) = \varphi x + \psi y$. *Тогда два ее парастрофа ортогональны тогда и только тогда, когда соответствующие этим парастрофам отображения:*

*(*$1 \perp l$ *или* $s \perp lr$*)*$\to \varphi + \varepsilon$, $(r \perp rl) \to \varphi + \varepsilon$ *и* $\varphi - \varepsilon$,

$(1 \perp r$ *или* $s \perp rl) \to \psi + \varepsilon$, $(l \perp lr) \to \psi + \varepsilon$ *и* $\psi - \varepsilon$,

$(1 \perp lr$ *или* $s \perp l) \to \varphi + \psi^2$, $\quad (1 \perp rl$ *или* $s \perp r) \to \varphi^2 + \psi$,

$(r \perp lr$ *или* $rl \perp l) \to \varphi - \psi$, $\quad (1 \perp s) \to \varphi - \psi$ *и* $\varphi + \psi$,

$(l \perp r$ *или* $lr \perp rl) \to \psi\varphi - \varepsilon$, *являются подстановками.*

В работе [BelPop,2012] были изучены квазигруппы, все шесть парастрофов которых различны и попарно ортогональны ($tot$-$CO$-квазигруппы), в работе [BelPop,2014] исследованы квазигруппы, пять парастрофов которых составляют ортогональное множество ($near$-$tot$-$CO$-квазигруппы). В этих работах дана информация о спектре $tot$-$CO$-квазигрупп и $near$-$tot$-$CO$-квазигрупп, соответственно.

Данное сообщение посвящено изучению квазигрупп, множество парастрофов которых совпадает с $\overline{\Sigma}_2(A)$ или $\overline{\Sigma}_3(A)$ и является ортогональным.

**I. $T$-квазигруппы с множеством парастрофов $\overline{\Sigma}_2 = \{A, {}^{s}\!A\}$**

**Теорема 3.** *$T$-квазигруппа $A(x,y) = \varphi x + \psi y$ имеет множество парастрофов $\overline{\Sigma}_2$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $A(x,y) = \varphi x + \varphi^{-1} y$, где $\varphi^3 = I$. Множество $\overline{\Sigma}_2$ этой квазигруппы ортогонально тогда и только тогда, когда отображения $\varphi - \varphi^{-1}$ и $\varphi + \varphi^{-1}$ являются подстановками.*

**Следствие 1.** *Квазигруппа $A(x,\, y) = ax + a^{-1}y \pmod n$, $(a,n) = 1$, имеет ортогональное множество парастрофов $\overline{\Sigma}_2$, тогда и только тогда, когда $a^3 = n - 1 \pmod n$, а числа $a - a^{-1}$ и $a + a^{-1}$ являются простыми по модулю $n$.*

**Пример 1.** Квазигруппа $A(x,\, y) = 3x + 5y \pmod 7$ имеет ортогональное множество парастрофов $\overline{\Sigma}_2$. Система парастрофов данной квазигруппы имеет вид

$\overline{\Sigma}_2 = \{A, {}^{s}\!A\} = \{3x + 5y \pmod 7,\ 5x + 3y \pmod 7\}$.

| $A$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 | 0 | 5 |
| 2 | 6 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 | 0 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 |
| 6 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 |

| ${}^{s}\!A$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 1 | 5 | 1 | 4 | 0 | 3 | 6 | 2 |
| 2 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 |
| 4 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 | 0 | 3 |
| 5 | 4 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 |
| 6 | 2 | 5 | 1 | 4 | 0 | 3 | 6 |

Следующая теорема дает информацию о спектре квазигрупп, множество парастрофов которых совпадает с ортогональным множеством $\overline{\Sigma}_2$.

**Теорема 4.** *Для любого $n$, взаимно простого с 2, 3 и 5, существует квазигруппа порядка $n$ с ортогональным множеством парастрофов $\overline{\Sigma}_2$.*

**II. $T$-квазигруппы с множеством парастрофов $\overline{\Sigma}_3$**

В этом случае $T$-квазигруппы с $\overline{\Sigma}_3^1$, $\overline{\Sigma}_3^2$, $\overline{\Sigma}_3^3$ имеют разный вид и различные условия ортогональности соответствующего множества парастрофов. А именно, для $T$-квазигрупп вида $A(x, y) = \varphi x + \psi y$ верна

**Теорема 5.** *$T$-квазигруппа имеет множество парастрофов $\overline{\Sigma}_3^1$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $A(x, y) = \varphi x + Iy$. Множество $\overline{\Sigma}_3^1$ этой квазигруппы ортогонально тогда и только тогда, когда отображения $\varphi - \varepsilon$ и $\varphi + \varepsilon$ являются подстановками.*

*$T$-квазигруппа имеет множество парастрофов $\overline{\Sigma}_3^2$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $A(x, y) = Ix + \psi y$. Множество $\overline{\Sigma}_3^2$ этой квазигруппы ортогонально тогда и только тогда, когда отображения $\psi - \varepsilon$ и $\psi + \varepsilon$ являются подстановками.*

*$T$-квазигруппа имеет множество парастрофов $\overline{\Sigma}_3^3$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $A(x, y) = \varphi x + \varphi y$. Множество $\overline{\Sigma}_3^3$ этой квазигруппы ортогонально тогда и только тогда, когда отображения $\varphi + \varepsilon$ и $\varphi - \varepsilon$ являются подстановками.*

**Следствие 2.** *Множества парастрофов $\overline{\Sigma}(A)$, $\overline{\Sigma}(B)$, $\overline{\Sigma}(C)$, $T-$квазигрупп $(Q, A) :$ $A(x, y) = \varphi x - y$, $(Q, B) :$ $B(x, y) = -x + \varphi y$, $(Q, C) :$ $C(x, y) = \varphi x + \varphi y$ определяют ортогональное множество, совпадающее с множеством $\overline{\Sigma}_3$, тогда и только тогда, когда отображения $\varphi - \varepsilon$ и $\varphi + \varepsilon$ являются подстановками.*

**Следствие 3.** *Каждая из $T-$квазигрупп $A(x, y) = ax - y \pmod n$, $B(x, y) = -x + ay \pmod n$, $(x, y) = ax + ay \pmod n$ определяет ортогональное множество $\overline{\Sigma}_3$ тогда и только тогда, когда числа $a - 1 \pmod n$ и $a + 1 \pmod n$ являются взаимно простыми с $n$.*

**Пример 2.** $T-$квазигруппа $(Q, A) :$ $A(x, y) = 3x - y \pmod 5$ определяет ортогональное множество парастрофов с тремя операциями. Множество парастрофов данной квазигруппы имеет вид

$$\overline{\Sigma}_3^1 = \{A = {}^rA, {}^lA = {}^{lr}A, {}^{rl}A = {}^sA\} = \{3x - y \pmod 5,\ 2x + 2y \pmod 5, 4x + 3y \pmod 5\}$$

| $A$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 |

| ${}^{lr}A$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 2 | 4 |
| 4 | 3 | 0 | 2 | 4 | 1 |

| ${}^{rl}A$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 0 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 3 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 4 | 2 | 0 | 3 |

Следующая теорема дает информацию относительно спектра квазигрупп, множество парастрофов которых совпадает с множеством $\overline{\Sigma}_3$ и является ортогональным.

**Теорема 6.** Для любого $n$, взаимно простого с 2 и 3, существует квазигруппа порядка $n$, система парастрофов которой соответствует ортогональное множество $\overline{\Sigma}_3$.

## Список литературы


[1] Lindner C.C., Steedly D. *On the number of parastroph of quasigroups.* Algebra Univ. 5 (1975), p. 191-196.

[2] Beleavskaya G., Popovich T. *Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups.* Bul. Acad. Ştiinţe al R.M. Matematica, 2012, Nr. 1(68)(Chişinău, IMI), p. 21-31(2012)

[3] Mullen G., Shcherbacov V. *On orthogonality of binary operations and squares.* Buletinul Academiei de ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica 2 (48), 2005, p. 3-42.

[4] Popovich T. *On conjugate sets of quasigroups.* Buletinul Academiei de ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica, N3 (67), 2011, p. 69-76.2011

[5] Beleavskaya G., Popovich T. *Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs.* Journal of Mathematical Sciences, vol.185, N2, August 2012, p. 184-191.

[6] Beleavskaya G., Popovich T. *Near-totally conjugate orthogonal quasigroups.* Bul. Acad. Ştiinţe al R.M. Matematica, 2014 (to appear).