APLICAȚII COMPATIBILE CU RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

Vladimir Izbaș

Institutul de Matematică și Informatică, Academia de Științe a Moldovei,
str. Academiei 5, MD-2028 Chisinău, Moldova,
e-mail: vizb@math.md izbas@mail.md

1. RELAȚII ȘI APLICAȚII

Fie A și B două mulțimi. Se numește **relație binară** între elementele mulțimilor A și B, luate în această ordine, orice triplet ordonat $\alpha = (A, B, G_\alpha)$, unde G_α este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$, numită **graficul** acestei relații. Deseori relația se identifică cu graficul ei. Notațiile

$$(a, b) \in \alpha, \quad (a, b) \in G_\alpha, \quad a\alpha b$$

sunt echivalente și exprimă faptul că a și b sunt în relația α. Cu α^{-1} se notează relația inversă a relației α și care se definește astfel: $\alpha^{-1} = (B, A, G_\alpha^{-1})$, unde $G_\alpha^{-1} \subseteq B \times A$ și

$$G_\alpha^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in G_\alpha\},$$

adică

$$a\alpha b \Leftrightarrow b\alpha^{-1}a.$$

Cu $a\alpha$ sau $(a)\alpha$ notăm submulţimea mulţimii B definită astfel:

$$a\alpha = \{b \in B | a\alpha b\},$$

care se numeşte **imaginea** lui a prin α. O relaţie binară $\alpha = (A, B, G_\alpha)$ se numeşte **aplicaţie de la A la B** dacă şi numai dacă

$$a) \quad a\alpha \neq \emptyset, \forall a \in A, \text{ şi } b) \quad a\alpha b \text{ şi } a\alpha c \text{ implică } b = c,$$

echivalent faptului că $a\alpha$ constă doar dintr-un singur element, care va fi notat, deasemenea, cu $a\alpha$ şi denumit valoarea lui α în a. Pentru aplicaţii se utilizează şi notaţia obişnuită:

$$\alpha : A \to B, a \to a\alpha.$$

Relaţia binară $\alpha = (A, A, G_\alpha)$ se numeşte simplu **relaţie binară definită pe A.**

2. ALGEBRA RELAȚIILOR

Asupra relațiilor binare între elementele mulțimilor A și B se definesc operațiile booleene cunoscute: **intersecție - $\cap$, reuniune - $\cup$, diferență - $\setminus$, complementară -notată cu $"^{-}"$, sau $\complement$**,

$$\alpha \cap \beta = (A, B, G_{\alpha\cap\beta}), \qquad G_{\alpha\cap\beta} = G_\alpha \cap G_\beta,$$

$$\alpha \cup \beta = (A, B, G_{\alpha\cup\beta}), \qquad G_{\alpha\cup\beta} = G_\alpha \cup G_\beta,$$

$$\alpha \setminus \beta = (A, B, G_{\alpha\setminus\beta}), \qquad G_{\alpha\setminus\beta} = G_\alpha \setminus G_\beta,$$

$$\overline{\alpha} = (A, B, G_{\overline{\alpha}}), \qquad G_{\overline{\alpha}} = (A \times B) \setminus G_\alpha.$$

Dacă α și β sunt relații binare între elementele mulțimilor A și B, atunci vom spune că $\alpha \subseteq \beta$ dacă și numai dacă, $G_\alpha \subseteq G_\beta$.

Se numește **compusa** relațiilor binare $\alpha = (A, B, G_\alpha)$ și $\beta = (C, D, G_\beta)$ relația binară între elementele mulțimilor A și D, notată cu $\alpha \circ \beta$ și definită prin $\alpha \circ \beta = (A, D, G_{\alpha\circ\beta})$, unde pentru $a \in A$ și $d \in D$ avem $a(\alpha \circ \beta)d$, dacă și numai dacă există un element $b \in B \cap C$ astfel încât $a\alpha b$ și $b\beta d$, scurt

$$\alpha \circ \beta = (A, D, G_{\alpha\circ\beta})$$

$$\forall a \in A, \forall d \in D, \quad a(\alpha \circ \beta)d \Leftrightarrow \exists b \in B \cap C, \quad a\alpha b, \quad b\beta d.$$

Operația de compunere a relațiilor binare este asociativă, dar nu este comutativă. Dacă $\alpha = (A, A, G_\alpha)$, adică $A = B$, atunci se mai spune că α este o **relație omogenă** pe A. Orice aplicație $\varphi : A \to A,\ a \to a\varphi$ este o relație binară $\varphi = (A, A, G_\varphi)$ cu graficul $G_\varphi = \{(a, a\varphi) | a \in A\}$. Cu i_A notăm aplicația $x \to x$ din A în A, sau relația binară $i_A = (A, A, G_{i_A})$ cu $G_{i_A} = \{(x, x) | x \in A\}$.

3. ECHIVALENȚE ȘI PARTIȚII

Relația binară θ definită pe A se numește **relație de echivalență** dacă ea este:

- **reflexivă** ($i_A \subseteq \theta$),
- **simetrică** ($\theta \subseteq \theta^{-1}$) și
- **tranzitivă** ($\theta \circ \theta \subseteq \theta$).

Ĭn acest caz imaginea $a\theta$ se numește **clasă de echivalență generată de elementul** a, sau $\theta-$**clasă** și se notează, deobicei cu $[a]_\theta$. Două $\theta-$clase ori coincid, ori nu se intersectează. Mulțimea tuturor claselor echivalenței θ se notează cu $A_{/\theta}$ si se numește

mulţimea căt (mulţimea factor) a echivalenţei θ. Mulţimea factor $A_{/\theta}$ formează o **partiţie** P_θ a mulţimii A, adică:

$$\mathbf{a)}\ [a]_\theta \neq \emptyset, \forall a \in A;$$

$$b)\ [a]_\theta = [b]_\theta \Leftrightarrow a\theta b,\ \forall a, b \in A;$$

$$c)\ \bigcup_{a\in A} [a]_\theta = A.$$

Dacă $\alpha : A \to A$ este o aplicaţie, atunci relaţia

$$\epsilon_\alpha = (A, A, G_{\epsilon_\alpha}),\ G_{\epsilon_\alpha} = \{(x, y)|x\alpha = y\alpha,\ x, y \in A\}$$

este o relaţie de echivalenţă. Mmulţimea factor determinată de această relaţie de echivalenţă se notează cu $A_{/\epsilon_\alpha}$ si formează partiţia P_{ϵ_α}.

4. $\Sigma-$ECHIVALENȚE

DEFINIȚIE. Fie α o aplicație și θ o relație de echivalență definite pe A. Aplicația α se numește **compatibilă cu** θ **(conservă relația** θ**)**, dacă avem $(a\alpha)\theta(b\alpha)$ ori de căte ori avem $a\theta b$: scurt

$$a\theta b \Rightarrow (a\alpha)\theta(b\alpha),\ \forall a, \forall b \in A$$

DEFINIȚIE. Fie Σ o mulțime de aplicații (funcții) definite pe A și θ o relație de echivalență definită pe A. Echivalența θ se numește $\Sigma-$**echivalență**, dacă orice aplicație $\sigma \in \Sigma$ este compatibilă cu θ: scurt

$$a\theta b \Rightarrow (a\alpha)\theta(b\alpha),\ \forall a, \forall b \in A,\ \forall \alpha \in \mathbf{\Sigma}.$$

Vom arăta cum pot fi găsite toate aplicațiile ce conservă o relație de echivalență dată și vom calcula numărul lor.

PROPOZIȚIE. Oricare ar fi aplicația α și relația de echivalență θ definite pe mulțimea A este adevărată egalitatea

$$(a\alpha)\theta = a(\alpha \circ \theta),\ \forall a \in A.$$

PROPOZIȚIE. Fie Σ o mulțime de aplicații definite pe A și θ o relație de echivalență definită pe A. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) θ este o $\Sigma-$echivalență;
b) $\sigma^{-1} \circ \theta \circ \sigma \subseteq \theta,\ \forall \sigma \in \Sigma$;
c) dacă $x\theta = y\theta$, atunci $x(\sigma \circ \theta) = y(\sigma \circ \theta)$, oricare ar fi $x, y \in A$ și $\sigma \in \Sigma$;
d) corespondența $\overline{\sigma} : A_{/\theta} \to A_{/\theta},\ x\theta \to x(\sigma \circ \theta)$ este aplicație pe mulțimea $A_{/\theta}$.

Remarcăm că condiția b) ne transferă calculele în algebra relațiilor binare, iar condiția c) ne sugerează cum să construim aplicații compatibile cu relaţia de echivalenţă θ. Mai mult, este adevărată următoarea afirmaţie:

PROPOZIŢIE. Pentru orice relaţie de echivalenţă θ definită pe mulţimea A şi orice aplicaţie $\overline{\sigma} : A_{/\theta} \to A_{/\theta}$ definită pe mulţimea $A_{/\theta}$ există o aplicaţie σ definită pe A şi compatibilă cu θ astfel încât

$$(a\theta)\overline{\sigma} = [a\sigma]_{\theta}.$$

Deci orice aplicaţie pe mulţimea $A_{/\theta}$ poate fi obţinută în maniera indicată anterior dintr-o aplicaţie a mulţimii A care conservă echivalenţa θ. Dacă mulţimea A este finită atunci putem evalua mulţimea tuturor aplicaţiilor definite pe A care conservă relaţia de echivalenţă θ. Anume este adevărată următoarea teoremă.

TEOREMĂ. Fie A o mulţime nevidă, θ o relaţie de echivalenţă definită pe A şi $n = card(A_{/\theta})$, $A_{/\theta} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Atunci are loc următoarea egalitate:

$$|F_\theta(A)| = \sum_{f \in F_n} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(|A_k|^{\sum\limits_{i \in \overline{1,n}, f(i)=k} |A_i|} \right) \right),$$

unde F_n este mulţimea tuturor aplicaţiilor definite pe $\{1, 2, 3, ..., n\}$, iar $F_\theta(A)$ este mulţimea tuturor aplicaţiilor definite pe A care conservă echivalenţa θ.

TEOREMĂ. Funcţia

$$\phi : F_\theta(A) \to F(A_{/\theta}), \ \sigma\phi = \overline{\sigma}, \ \forall \sigma \in F_\theta(A)$$

este un omomorfism.

REFERENCES

1. A. A. Albert, *Quasigroups. I* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 54 (1943) p.507-

2. V. D. Belousov. *Foundations of the theory of quasigroups and loops* (Russian), Izdat. "Nauka Moscow, 1967, 223 pp.

4. D.C.Murdoch. *Structure of abelian quasigeroups*, Trans. Amer. Math. Soc.**49** (1941), 392-409.