Тождества с подстановками в квазигруппах

Галина Белявская

Семинар памяти В.Д. Белоусова, 2013

1.1 Тождества с подстановками и квазигруппы, изотопные группам

В. Д. Белоусов доказал, что квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе, абелевой группе тогда и только тогда, когда в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ выполняется соответственно следующее тождество:

$$((x(y\backslash z))/u)v = x(y\backslash((z/u)v)), \qquad (1)$$

$$x\backslash(y(u\backslash v)) = u\backslash(y(x\backslash v)). \qquad (2)$$

Ф. Н. Сохацкий охарактеризовал квазигруппы, изотопные группам, тождеством от четырех переменных в квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$:

$$((x(u\backslash z))/u)v = x(u\backslash((z/u)v)). \qquad (3)$$

Это тождество В. Д. Белоусова, в котором $y = u$.

Пусть $(Q, \cdot)$ – квазигруппа. Рассмотрим равенства (будем называть их тождествами с подстановками, иногда – просто тождествами) в квазигруппе $(Q, \cdot)$ вида

$$\alpha_1(\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z) = \alpha_3 x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z), \tag{4}$$

где x, y, z – переменные, α_i, $i = 1, 2, ..., 6$ (кратко, $i \in \overline{1, 6}$) – подстановки на Q, $(\otimes_k)$ – произвольные парастрофные операции (возможно, и операция $(\cdot)$) квазигрупповой операции $(\cdot)$, $k \in \overline{1, 4}$. Эти тождества являются частными случаями обобщенного тождества ассоциативности, поэтому согласно теореме В. Д. Белоусова все квазигруппы в нем изотопны одной и той же группе. Частным случаем тождества (4) является тождество вида

$$\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z = \alpha_3 x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z), \tag{5}$$

т. е. тождество (4), в котором α_1 – тождественная подстановка.

Ниже *типом тождества с подстановками* (4) будем называть набор парастрофных операций $(\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3, \otimes_4)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$ в нем.

Тождество (4) назовем *двойственным к тождеству типа* $(\otimes_1, \otimes_2, \otimes_3, \otimes_4)$, если оно имеет тип $(\otimes_1^*, \otimes_2^*, \otimes_3^*, \otimes_4^*)$, где $x \otimes_i^* y = y \otimes_i x$, $i \in \overline{1,4}$.

1. Тождества с подстановками и квазигруппы, изотопные группам

Тождество вида (4) появляется при характеризации квазигрупп, изотопных группе. Верна следующая

Теорема 1.1 *Если в квазигруппе $(Q,\cdot)$ выполняется тождество (4) некоторого типа с произвольными подстановками α_i, $i \in \overline{1,6}$, то квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна группе. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна группе тогда и только тогда, когда в ней выполняется следующее тождество с подстановками типа $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$:*

$$R_a^{-1}(x \cdot L_b^{-1}y) \cdot z = x \cdot L_b^{-1}(R_a^{-1}y \cdot z)$$

для некоторых фиксированных элементов $a, b \in Q$, где $R_a x = xa$, $L_b x = bx$.

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.1, дает возможность распознавать тождества от любого числа переменных в квазигруппе $(Q, \cdot)$ (в эквазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$), гарантирующие изотопию квазигруппы $(Q, \cdot)$ группе.

Следствие 1.1 *Пусть в квазируппе $(Q, \cdot)$ (в эквазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$) выполняется некоторое тождество от n переменных. Если в нем можно выделить три переменные так, что при фиксации остальных $n-3$ переменных получается тождество с подстановками (4), то квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе.*

Теорема 1.1а *Пусть* $(Q, \circ)$ *– один из парастрофов квазигруппы* $(Q, \cdot)$, $R_a x = x \circ a$, $L_a x = a \circ x$, *тогда тождество с подстановками типа* $(\circ, \circ, \circ, \circ)$*:*

$$R_a^{-1}(x \circ L_a^{-1} z) \circ v = x \circ L_a^{-1}(R_a^{-1} z \circ v),$$

где a *– произвольно фиксированный элемент из* Q, *является необходимым и достаточным для изотопии квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *группе.*

Теорема 1.2. *Пусть* a *– произвольный фиксированный элемент из множества* Q. *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *изотопна группе тогда и только тогда, когда в эквазигруппе* $(Q, \cdot, \backslash, /, a)$ *выполняется одно из тождеств*

$$((x(a\backslash z))/a)v = x(a\backslash((z/a)v)),$$

$$(a/(x\backslash az))\backslash v = x\backslash(a((a/z)\backslash v)),$$

$$((x/(z\backslash a))a)/v = x/((za/v)\backslash a).$$

Учитываем, что $R_a^{-1}x = x/a$, $L_a^{-1}x = a\backslash x$.

2 Тождества с подстановками и квазигруппы, изотопные абелевым группам

В неопубликованной работе, посвященной алгоритмическим вопросам теории квазигрупп, М. М. Глухов доказал, что среди тождеств, характеризующих многообразие квазигрупп, изотопных абелевым группам, не существует уравновешенных тождеств от трех переменных. Попутно им были установлены следующие уравновешенные тождества длины 4, которые характеризуют квазигруппы, изотопные абелевым группам:

1) $x\backslash(y(u\backslash v)) = u\backslash(y(x\backslash v))$; 2) $(x/y)(u\backslash v) = (v/y)(u\backslash x)$;
3) $((xy)/u)v = ((xv)/u)y$; 4) $xu/(z\backslash y) = zu/(x\backslash y)$;
5) $x(y\backslash(uv)) = u(y\backslash(xv))$; 6) $((u/v)x)/y = ((u/y)x)/v$.

Тождества 1),2) - тождества В. Д. Белоусова. Тождества 3),4) установил А. Драпал, а тождество 6) замечено А. Х. Табаровым.

Рассмотрим тождества с подстановками, связанные с квазигруппами, изотопными абелевым группам.

Первая часть следующей теоремы описывает тождества с подстановками, гарантирующими изотопию квазигруппы абелевой группе. Вторая часть дает возможность получить тождества с подстановками любого типа, отличного от типов $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $(*,*,*,*)$, где $(*) = (\cdot)^*$, каждое из которых характеризует квазигруппы, изотопные абелевым группам. Согласно теореме 1.1 эти два исключенных здесь типа соответствуют тождеству, характеризующему квазигруппы, изотопные группам.

Теорема 2.1. *Если в квазигруппе* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество (5) типа* $(\otimes_1,\circ,\circ^*,\otimes_4)$ *с некоторыми ее парастрофами* $(\circ)$, $(\otimes_1),(\otimes_4)$ *и с произвольными подстановками* α_i, $i\in\overline{2,6}$, *то квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *изотопна абелевой группе.*

Для любого типа $(\otimes_1,\otimes_2,\otimes_3,\otimes_4)$, *где* $(\otimes_i)=(\cdot)$, *или* $(\otimes_i)=(\cdot)^*$, $i\in\overline{1,4}$, *отличного от* $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ *и* $(*,*,*,*)$, *существует тождество с подстановками вида (5), которое является необходимым и достаточным для изотопии квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *абелевой группе.*

Следствие 2.1. *Пусть в квазигруппе* $(Q,\cdot)$ *(в эквазигруппе* $(Q,\cdot,\backslash,/)$*) выполняется некоторое тождество от* n *переменных. Если в нем можно выделить три переменные так, что при фиксации остальных* $n-3$ *переменных получается тождество с подстановками (5) типа, указанного в теореме 2.1, то квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *изотопна абелевой группе.*

Теорема 2.1а *Каждое из тождеств в эквазигруппе* $(Q, \cdot, \backslash, /, a)$*:*

$$((x \cdot y)/a) \cdot (a\backslash z) = x \cdot a\backslash((z/a) \cdot y),$$

$$((y/a) \cdot (a\backslash x))/a \cdot (a\backslash z) = (x/a) \cdot a\backslash((z/a) \cdot (a\backslash y)),$$

$$z \cdot a\backslash((y/a) \cdot x) = (z \cdot x)/a \cdot (a\backslash y),$$

$$(y \cdot x)/a \cdot z = (y \cdot z)/a \cdot x,$$

$$z \cdot a\backslash((y/a) \cdot (a\backslash x)) = (x/a) \cdot a\backslash(z \cdot (a\backslash y)),$$

$$((x/a) \cdot y)/a \cdot (a\backslash z) = ((z/a) \cdot y)/a \cdot (a\backslash x),$$

$$((x/a) \cdot y)/a \cdot (a\backslash z) = ((z/a) \cdot (a\backslash x))/a \cdot y$$

является необходимым и достаточным для изотопии квазигруппы $(Q, \cdot)$ *абелевой группе.*

3. Тождества с подстановками и различные типы линейности

Напомним, что *линейная слева (линейная справа)* квазигруппа $(Q, \cdot)$ – это квазигруппа, для которой существуют группа $(Q, +)$, ее автоморфизм φ (автоморфизм ψ) и подстановка β (подстановка α), такие что $x \cdot y = \varphi x + \beta y$ ($x \cdot y = \alpha x + \psi y$). Эти два типа квазигрупп мы будем рассматривать как полулинейные над группой. Класс линейных слева (линейных справа) квазигрупп обозначим через $L\mathcal{L}$ (через $R\mathcal{L}$). Если φ и ψ – оба автоморфизма и $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$, где c – некоторый фиксированный элемент из множества Q, то квазигруппа является *линейной* (над группой). Класс линейных квазигрупп обозначим через $\mathcal{L}$.

Теорема 3.1 *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа, тогда* $(Q,\cdot) \in L\mathcal{L}$ *, если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_1(xy\cdot z) = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z),$$

$$xy\cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y * \alpha_6 z);$$

$(Q,\cdot) \in R\mathcal{L}$ *, если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_2(xy)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z),$$

$$\alpha_2(x*y)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z);$$

$(Q,\cdot) \in \mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_1(xy\cdot z) = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z),$$

$$\alpha_1(xy\cdot z) = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(y \cdot \alpha_6 z);\ \alpha_2(xy)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (y \cdot \alpha_6 z),$$

где α_i, $i \in \overline{1,6}$, *– некоторые подстановки множества* Q.

Теорема 3.2 *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ является линейной слева (линейной справа) тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество с подстановками*

$$(xy) \cdot z = R_{e_a}x \cdot L_a^{-1}(L_a y \cdot z),$$

соответственно тождество

$$R_a^{-1}(xy) \cdot z = x \cdot (R_a^{-1}y \cdot L_{f_a}^{-1}z)$$

и является линейной тогда и только тогда, когда в ней выполняются оба эти тождества для некоторого произвольно фиксированного элемента $a \in Q$.

Теорема 3.2a *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *является линейной слева (линейной справа) тогда и только тогда, когда в эквазигруппе* $(Q, \cdot, \backslash, /, a)$ *с нульарной операцией выполняется тождество*

$$(x(a\backslash y))z = (x(a\backslash a)) \cdot (a\backslash yz),$$

соответственно тождество

$$(xy/a) \cdot ((a/a)z) = x((y/a)z).$$

и является линейной тогда и только тогда, когда в ней выполняются оба эти тождества для некоторого произвольно фиксированного элемента $a \in Q$.

Следующая теорема характеризует линейные квазигруппы единственным тождеством с подстановками.

Теорема 3.3 *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *является линейной тогда и только тогда, когда в ней выполняется следующее тождество с подстановками*

$$xy \cdot v = R_a x \cdot (\alpha_a y \cdot L_a^{-1} v),$$

где $\alpha_a y = R_{e_a}^{-1} L_a^{-1} R_a L_{f_a} y$.

Теорема 3.3а *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *является линейной тогда и только тогда, когда эквазигруппа* $(Q, \cdot, \backslash, /, a)$ *с нульарной операцией удовлетворяет тождеству*

$$xy \cdot av = xa \cdot (\alpha_a y \cdot v),$$

где $\alpha_a y = (a \backslash ((a/a)y \cdot a))/(a \backslash a)$.

Казигруппа $(Q,\cdot)$ называется *алинейной слева (алинейной справа)*, если существуют группа $(Q,+)$, ее антиавтоморфизм $\overline{\varphi}$ (антиавтоморфизм $\overline{\psi}$), элемент $c \in Q$ и подстановка β (подстановка α) , такие что $x \cdot y = \overline{\varphi}x + \beta y$ $(x \cdot y = \alpha x + \overline{\psi}y)$. Класс квазигрупп алинейных слева, алинейных справа и алинейных обозначим соответственно через $LA\mathcal{L}$, $RA\mathcal{L}$ и $A\mathcal{L}$.

Укажем ряд тождеств с подстановками, приводящих к соответствующему типу алинейности квазигруппы.

Теорема 3.4 *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазируппа. Тогда* $(Q,\cdot) \in LA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z),$$

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y * \alpha_6 z);$$

$(Q,\cdot) \in RA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_2(xy) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z),$$

$$\alpha_2(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z);$$

$(Q,\cdot) \in A\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество:*

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z),$$

где $\alpha_i, i \in \overline{2,6}$, *- подстановки множества* Q.

Алинейные квазигруппы тоже можно охарактеризовать одним тождеством с подстановками.

Теорема 3.5 *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *является алинейной тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество с подстановками*

$$(y * v) \cdot u = L_a y \cdot (\beta_a^{-1} v * R_a^{-1} u) \;\;)$$

для некоторого произвольно фиксированного элемента $a \in Q$, где $\beta_a v = R_{e_a}^{-1} R_a^{-1} L_a L_{f_a} v$.

Теорема 3.5а *Квазигруппа является линейной тогда и только тогда, когда эквазигруппа* $(Q, \cdot, \backslash, /, a)$ *с нульарной операцией удовлетворяет тождеству*

$$ay \cdot uv = (\beta_a v \cdot y) \cdot ua,$$

где $\beta_a v = ((a((a/a)v))/a)/(a \backslash a)$.

Под квазигруппой *смешанного типа линейности* будем понимать квазигруппу $(Q,\cdot)$, для которой существуют такая группа $(Q,+)$ и элемент $c\in Q$, что $x\cdot y=\varphi x+c+\overline{\psi}y$ или $x\cdot y=\overline{\varphi}x+c+\psi y$, где φ,ψ – автоморфизмы, а $\overline{\varphi},\overline{\psi}$ – антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$.

Если группа $(Q,+)$ абелева, то эти квазигруппы превращаются в T-квазигруппы. В случае неабелевой группы они являются линейными слева и алинейными справа (линейными справа и алинейными слева), т. е. принадлежат классу квазигрупп $L\mathcal{L}\bigcap RA\mathcal{L}$ (классу $R\mathcal{L}\bigcap LA\mathcal{L}$ соответственно). Более того, верна следующая

Теорема 3.6 *Пусть* $(Q,\cdot)$ *– квазигруппа. Тогда*

$(Q,\cdot) \in L\mathcal{L} \bigcap RA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество:*

$$(xy)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z);$$

$(Q,\cdot) \in R\mathcal{L} \bigcap LA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество:*

$$(x * y)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z),$$

где $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$ *– некоторые подстановки множества* Q.

Следующая теорема характеризует T-квазигруппы тоже с помощью тождеств с подстановками.

Теорема 3.7 *Квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *является* T*-квазигруппой тогда и только тогда, когда в квазигруппе* $(Q, \cdot)$ *выполняются следующие два тождества с подстановками:*

$$xy \cdot v = R_a x \cdot (\alpha_a y \cdot L_a^{-1} v),$$

$$(y * v) \cdot u = L_a y \cdot (\beta_a^{-1} v * R_a^{-1} u)$$

для некоторого произвольно фиксированного элемента $a \in Q$*, где* $\alpha_a y = R_{e_a}^{-1} L_a^{-1} R_a L_{f_a} y$*,* $\beta_a v = R_{e_a}^{-1} R_a^{-1} L_a L_{f_a} v$*.*

Теорема 3.7а *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *является* T*-квазигруппой тогда и только тогда, когда в эквазигруппе* $(Q,\cdot,\backslash,/,a)$ *выполняются следующие два тождества:*

$$xy \cdot av = xa \cdot (\alpha_a y \cdot v),$$

$$ay \cdot uv = (\beta_a v \cdot y) \cdot ua,$$

где $\alpha_a y = (a\backslash((a/a)y \cdot a))/(a\backslash a)$, $\beta_a v = ((a((a/a)v))/a)/(a\backslash a)$, *а* a *- произвольный фиксированный элемент из* Q.