# Teoria ecvaţională a A-buclei nilpotente

Alexandru V. Covalschi, Vasile I. Ursu

**Institutul de Matematică şi Informatică**

**al Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova**

Ședința specială a seminarului științific consacrată Prof. Valentin Belousov, Februarie 22, 2013

**Chişinău – 2013**

# I. Noțiuni principale

Fie $L$ o buclă şi $a$ un element din $L$. Substituţiile $L_a : L \to L$ şi $R_a : L \to L$ definite prin formulele

$$xL_a = a \cdot x, \quad xR_a = x \cdot a \ (x \in L)$$

se numesc *translaţie de stânga* şi *translaţie de dreapta*. Toate translaţiile buclei $L$ generează un grup *M(L)* numit *grupul multiplicativ* de substituţii al buclei $L$.

Fie $a$ şi $b$ două elemente din bucla $L$. Substituţiile $R_{a,b},\ L_{a,b},\ T_a \in M(L)$ se definesc în modul următor:

$$R_{a,b} = R_a R_b R_{ab}^{-1},\ L_{a,b} = L_a L_b L_{ba}^{-1},\ T_a = R_a L_a^{-1}.$$

Elementul $\alpha \in M(L)$ se numește substituție internă dacă $1\alpha = 1$. Mulțimea tuturor substituțiilor interne formează un subgrup al grupului *M(L)* și, conform lui R. H. Bruck (1958) ea este generată de mulțimea $\{R_{x,y},\ L_{x,y},\ T_x \mid x, y \in L\}$. Se notează cu *J(L)* și se numește *grupul substituţiilor interne*.

Bucla $L$ se numeşte *A-buclă*, dacă orice substituţie internă a ei este automorfism.

Întrucât grupul substituţiilor interne $J(L)$ ale buclei $L$ este generat de toate elementele de forma $R_{a,b}, L_{a,b}, T_a \ (a,b \in L)$, ca substituţiile interne din *J(L)* să fie automorfisme este suficient ca în bucla $L$ să aibă loc egalităţile $(c \cdot d)R_{a,b} = cR_{a,b} \cdot dR_{a,b}, (c \cdot d)L_{a,b} = cL_{a,b} \cdot dL_{a,b},\ (c \cdot d)T_a = cT_a \cdot dT_a$ pentru toate elementele $a,b,c,d \in L$. Prin urmare $A$-bucla putem s-o definim ca o buclă în care sunt adevărate identităţile:

$$(zt)R_{x,y} = zR_{x,y} \cdot tR_{x,y},$$

$$(zt)L_{x,y} = zL_{x,y} \cdot tL_{x,y},$$

$$(zt)T_x = zT_x \cdot tT_x.$$

Prin urmare, clasa tuturor A-buclelor este o varietate definită de aceste identități și identitățile ce definesc bucla în signatura $< \cdot, /, \backslash, 1 >$.

Fie $X = \{x_1, x_2, ...\}$ o mulţime nevidă, elementele căreia le vom numi variabile şi $\sigma = \{\cdot, /, \backslash, 1\}$ - signatura buclelor. Vom defini noţiunea de *cuvânt* al signaturii $\sigma = \{\cdot, /, \backslash, 1\}$ de variabilele mulţimii $X = \{x_1, x_2, ...\}$ astfel:

a) toate variabilele din *X* şi $1 \in \sigma$ sunt cuvinte;

b) dacă *t* şi *s* sunt cuvinte, atunci $t \cdot s$ (sau $ts$ ), $t / s$ şi $s \backslash t$ sunt cuvinte.

Expresia de forma $t(x_1,..., x_n) = 1$, unde $t(x_1,..., x_n)$ este cuvânt se numeşte *identitate.* Spunem că identitatea $t(x_1,..., x_n) = 1$ este adevărată în bucla *L,* dacă pentru orice interpretare $\tau : \{x_1,..., x_n\} \to L$ în *L* este adevărată egalitatea $t(\tau(x_1),..., \tau(x_n)) = 1.$

Mulțimea tuturor identităților adevărate într-o buclă *L*, o notăm cu *I(L)* și se numește ***teoria ecvațională*** a buclei *L*.

Se spune că teoria ecvațională *I(L)* a buclei *L* are **bază finită**, dacă există o submulţime finită $B \subseteq I(L)$, care implică oricare altă identitate din *I(L)* în clasa de bule.

**Problema bazei finite:** ***Are sau nu teoria ecvaţională a unei algebre bază finită de identități?***

## II. Rezultate anterioare

La momentul actual problema bazei finite de identități este rezolvată pentru:

- orice algebră finită de două elemente (R. G. Lyndon, 1951);
- orice algebră finită cu un număr finit de operații unare (G. Birkhoff, 1935);
- orice grup nilpotent (R. C. Lyndon, 1952);
- orice grup finit (Oates Sh., Powell M. B., 1964);
- orice latice finită (R. McKenzie, 1970)
- orice inel asociativ finit (I. V. Lvov, 1973, R. L. Kruse, 1979 );
- orice semigrup comutativ finit (P. Perkins, 1979);
- orice buclă Moufang comutativă (T. Evans, 1974);
- orice buclă Moufang nilpotentă (V. I. Ursu, 2000).

# III. Rezultatul de bază

Elementul $(x,y,z)=x\backslash((xy\cdot z)/(yz))$ se numeşte *asociatorul de dreapta*, iar elementul $[x,y,z]=((xy)\backslash(x\cdot yz))/z$ - *asociatorul de stânga* a elementelor $x,y,z\in L$.

Elementul $[x,y]=x/(y/xy)$ se numeşte comutattorul elementelor $x,y\in L$.

Din definiţia acestor elemente rezultă că, pentru orice elemente $x,y,z\in L$ au loc următoarele relaţii:

$$xy\cdot z=x(x,y,z),\qquad xR_{y,z}=x(x,y,z);$$

$$x\cdot yz=xy\cdot[x,y,z]z,\qquad zL_{y,x}=[x,y,z]z;$$

$$xy=y\cdot x[x,y],\qquad xT_y=x[x,y].$$

Pentru orice submulţime *X* a buclei *L* prin $[X,L]$ vom marca subbucla în *L*, generată de mulţimea

$$\{[x,y],[z,y,x],(x,y,z)\mid x\in X,\ y,z\in L\}.$$

Deoarece toate substituţiile interne a *A*-buclei sunt automorfizme, atunci uşor se verifică, că comutatorul oricărei subbucle normale a *A*-buclei este normal. Fie $L^{(0)}=L$ şi $L^{(i+1)}=[L^{(i)},L],i>0$. Atunci şirul

$$L=L^{(0)}\supseteq\ldots\supseteq L^{(n)}\supseteq\ldots$$

se numeşte *şir central descendent* a *A*-buclei *L*. Observăm că pentru orice *n>0* bucla-factor $L^{(n)}/L^{(n+1)}$ este subbuclă din centrul buclei-factor $L/L^{(n+1)}$.

Mulţimea

$$Z(L)=\{a\in L\mid ax\cdot y=a\cdot xy, x\cdot ya=xy\cdot a, ax=xa \text{ pentru orice } x,y\in L\}$$

se numeşte *centrul* buclei *L*. Este uşor să observăm că centrul $Z(L)$ este o subbuclă normală în bucla *L*. Folosind centrul vom construi inductiv un şir crescător $Z_n(L),\ n=0,1,\ldots$ de subbucle N-ale normale ale lui *L*. Prin definiţie

$Z_0(L)=\{e\}$, $Z_1(L)=Z(L)$. Fie $Z(L/Z_1(L))$ centrul buclei-factor $L/Z_1(L)$ şi $\varphi_1 : L \to L/Z_1(L)$ – omomorfismul natural. Definim

$$Z_2(L)=\varphi_1^{-1}(Z(L/Z_1(L))),$$

adică

$$Z_2(L)/Z_1(L)=Z(L/Z_1(L)).$$

Întrucât $Z(L/Z(L))$ este o subbuclă normală în $L/Z(L)$, urmează că proimaginea $Z_2(L)$ în raport cu omomorfismul $\varphi_1$ este subbuclă normală în $L$. Fie $Z(L/Z_2(L))$ centrul lui $L/Z_2(L)$ şi $p_2 : L \to L/Z_2(L)$– omomorfismul natural. Definim

$$Z_3(L)=p_2^{-1}(Z(L/Z_2(L))),$$

adică

$$Z_3(L)/Z_2(L)=Z(L/Z_2(L)).$$

Presupunem că $Z_n(L) \lhd L$ şi $p_n : L \to L/Z_n(L)$ este omomorfismul natural. Definim

$$Z_{n+1}(L)=p_n^{-1}(Z(L/Z_n(L))),$$

adică

$$Z_{n+1}(L)/Z_n(L)=Z(L/Z_n(L)).$$

Rezultă că $Z_{n+1}(L) \lhd L$ şi $Z_n(L) \subseteq Z_{n+1}(L)$.

Şirul $\{e\}=Z_0(L) \subseteq Z_1(L) \subseteq ... \subseteq Z_n(L) \subseteq ...$ de subbucle ale lui $L$ se numeşte *şirul central ascendent* al lui $L$.

Observație: Pentru orice buclă $L$ are loc echivalența $L^{(n)}=\{e\} \Leftrightarrow Z_n=L$.

Bucla $L$ se numeşte *nilpotentă* (sau *central nilpotentă)* dacă există un număr natural $n$ astfel ca $L^{(n)} = \{e\}$. Cel mai mic număr natural $n$ pentru care $L^{(n)} = \{e\}$ se numeşte *clasă de nilpotenţă* a lui $L$.

Bucla $L$ se numeşte *nilpotentă* (sau *central nilpotentă)* dacă există un număr natural $n$ astfel ca $Z_n = L$ cel mai mare număr natural $n$ pentru care $Z_n = L$ se numeşte *clasă de nilpotenţă* a lui $L$.

Rezultatele principale se bazează pe următoarele leme, în care se arată unele relații dintre asociatorii de stânga, asociatorii de dreapta și comutatorii elementelor din bucla factor $L / L^{(n+2)}$.

**Lema 1.** *Pentru orice elemente* $x, y$ *din A-bucla L şi orice element* $a \in L^{(n)}$ *au loc următoarele relaţii:*

$$[a, x, y] \equiv (a, x, y)^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.1);$$

$$[x, a, y] \equiv (x, a, y)^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.2)$$

$$[x, y, a] \equiv (x, y, a)^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.3)$$

**Lema 2.** *Pentru orice A-buclă L, pentru orice elemente* $x, y \in L$ *şi orice elemente* $a, b \in L^{(n)}$ *au loc următoarele relaţii:*

$$[ab, x] \equiv [a, x][b, x] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.4)$$

$$[a, xy] \equiv [a, x][a, y] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.5)$$

$$[a / b, x] \equiv [a, x][b, x]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.6)$$

$$[a, x / y] \equiv [a, x][a, y]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.7)$$

$$[a \backslash b, x] \equiv [a, x]^{-1}[b, x] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.8)$$

$$[a, x \backslash y] \equiv [a, x]^{-1}[a, y] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.9)$$

$$[a^p, x^q] \equiv [a, x]^{pq} \bmod L^{(n+2)} \text{ pentru orice numere întregi } p, q \qquad (2.10)$$

**Lema 3.** Pentru orice *A-buclă L, pentru orice elemente* $x, y \in L$ *şi orice elemente* $a, b \in L^{(n)}$ *au loc următoarele relaţii:*

$$(x, a, y) \equiv (a, x, y)(x, y, a) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.11)$$

$$(ab, x, y) \equiv (a, x, y)(b, x, y) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.12)$$

$$(a, xy, z) \equiv (a, x, z)(a, y, z) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.13)$$

$$(a, x, yz) \equiv (a, x, y)(a, x, z) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.14)$$

$$(a / b, x, y) \equiv (a, x, y)(b, x, y)^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.15)$$

$$(a, x / y, z) \equiv (a, x, z)(a, y, z)^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.16)$$

$$(a, x, y / z) \equiv (a, x, y)(a, x, z)^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.17)$$

$$(a \backslash b, x, y) \equiv (a, x, y)^{-1}(b, x, y) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.18)$$

$$(a, x \backslash y, z) \equiv (a, x, z)^{-1}(a, y, z) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.19)$$

$$(a, x, y \backslash z) \equiv (a, x, y)^{-1}(a, x, z) \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.20)$$

$$(a^p, x^q, y^r) \equiv (a, x, y)^{pqr} \bmod L^{(n+2)} \text{ pentru orice numere întregi } p, q, r \qquad (2.21)$$

**Corolar 1.** *Pentru orice A-buclă L, pentru orice elemente* $x, y, z \in L$ *şi orice elemente* $a, b \in L^{(n)}$ *au loc următoarele relaţii:*

$$[x, y, ab] \equiv [x, y, a][x, y, b] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.24);$$

$$[xy, z, a] \equiv [x, z, a][y, z, a] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.25);$$

$$[x, yz, a] \equiv [x, y, a][x, z, a] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.26);$$

$$[x, y, a / b] \equiv [x, y, a][x, y, b]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.27);$$

$$[x / y, z, a] \equiv [x, z, a][y, z, a]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.28);$$

$$[x, y / z, a] \equiv [x, y, a][x, z, a]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.29);$$

$$[x, y, a \backslash b] \equiv [x, y, a][x, y, b]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.30);$$

$$[x \backslash y, z, a] \equiv [x, z, a][y, z, a]^{-1} \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.31);$$

$$[x, y \backslash z, a] \equiv [x, y, a]^{-1}[x, z, a] \bmod L^{(n+2)} \qquad (2.32);$$

$$[x^p, y^q, a^r] \equiv [x, y, a]^{pqr} \bmod L^{(n+2)} \text{ pentru orice numere întregi } p, q, r \qquad (2.33).$$

**Teorema 1.** *Orice A-bucla nilpotentă şi finit generată L satisface condiţiei maximalităţii pentru subbucle (adică orice subbuclă a bulclei L este generată de un număr finit de elemente).*

Se spune că bucla $L$ este rezidual finită sau finit-aproximabilă, dacă pentru orice element neunitate $x \in L$ există un omomorfism $\varphi_x$ de la $L$ pe o buclă finită astfel ca $\varphi_x(x) \neq e$.

**Teorema 2.** *A-bucla finit generată este finit aproximabilă.*

Fie $F = F(x_1, x_2, ...)$ - $A$-buclă liberă cu o mulţime numerabilă de generatori liberi $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Pentru orice $i = 1,2,...$ vom defini endomorfismul $\delta_i : F \to F$ de relațiile:

$$x_i\delta_i = \begin{cases} e, \ dacă \ i = j; \\ x_i, \ dacă \ i \neq j. \end{cases}$$

Notăm $\bar{\delta}_i(u) = u / \delta_i(u), i = 1,2,...$.

**Lema 4.** *Dacă pentru elementul* $u \in F$ *are loc egalitățile* $u\delta_i = e$, $i \in \{1,...,2n\}$, *atunci* $u \in F^{(n)}$.

**Lema 5.** *Fie* $n > 0$ *şi* $w \in F$. *Atunci* $w$ *poate fi reprezentat în forma* $w = vu_{2n}u_{2n-1}...u_2u_1$, *unde* $v \in F^{(n)}$ *şi* $u_i = w\delta_i\bar{\delta}_1...\bar{\delta}_{i-1}$ *.pentru orice* $i \in \{1,...,2n\}$.

**Teorema 3.** *Teoria ecvaţională a A-buclei nilpotente are bază finită.*

**Corolar 2.** *Teoria (cuasi)ecvaţională a varietăţii, generate de A-bucla nilpotentă, este rezolvabilă.*

**Corolar 3.** *Problema egalităţii cuvintelor în A-bucla nilpotentă şi finit generată este rezolvabilă.*

**Corolar 4.** *Oricare varietate **K**, a A-buclelor nilpotente de clasa $\leq n$ este generată de toate A-buclele sale cu $2n+1$ generatori, şi de aceea rangul axiomatic al varietăţii **K** nu întrece 2n+1.*

**Corolar 5.** *Fiecare subvarietatete **M** a căreiva varietăţi **K** a A-buclelor nilpotente de clasa $\leq n$ este generată de imaginea omomorfă a A-buclei **K**-*libere cu $2n+1$*generatori liberi, şi, prin urmare rangul de bază **M*** nu întrece $2n+1$.

**Corolar 6.** *Orice varietate, generată de A-bucla nilpotentă şi finită conţine un număr finit de subvarietăţi diferite. Fiecare din aceste subvarietăţi are bază finită de identităţi.*

## Bibliografia


1. R. H. Bruck, “A Survey of Binary Systems”, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1958.
2. Горбунов В. А., "Квазитождества двухэлементных алгебр." Algebra i Logika 22.2 (1983): 121-127.
3. Карташов В. К., "Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов." Algebra i Logika 19.2 (1980): 173-193.
4. A. Iu. Olishanski. Conditional identities in finite groups. Siberian mathematical journal, 1974, V. 15, N. 76, p. 217-231 (In Russian).
5. Белкин В. П., "Квазитождества конечных колец и решёток." Algebra i Logika 17.3 (1978): 247-259.
6. V. I. Ursu. On quasi-finitely generated commutative Moufang loops. Algebra and Logic, 1991, V. 30, N. 6, p. 726-734 (In Russian).
7. Ursu, Vasile I., "On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. I. "Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 53.3 (2012): 475-489.
8. Ursu, Vasile I., "On quasivarieties of nilpotent Moufang loops. II. "Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 53.3 (2012): 491-499.
9. G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras. Proc. Camb. Philos. Soc., 1935, V. 31, p. 433-454.
10. R. C. Lyndon, Identities in two-valued calculi, Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71, 457-465.
11. W. Taylor, Characterizing Mal'cev conditions, Algebra Universalis 1973, 3, 351-397.
12. K.A. Baker, Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class, Adv. in Math., 1977, 24, 207-243.
13. R. McKenzie, Para-primal varieties: A study of finite axiomatizability and definable principal congruences in locally finite varieties, Algebra Universalis, 1978, 8, 336-348.

14. R. C. Lyndon, Two notes on nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 579-583.
15. Oates Shtila, Powell M. B., Identical relations in finite groups – J. Algebra, 1964, I, N1, 11-39.
16. R. McKenzie, Equational bases for lattice theories. – Math. Scand., 1970, 27, p. 24-28.
17. I. V. Lvov, Varieties of associative rings I, II, Algebra and Logic 1973, 12, 150-167, 381-393.
18. R.L. Kruse, Identities satisfield by a finite ring. – J. Algebra, 1979, 29, N2, 298-318.
19. P. Perkins, Bases for equational theories of semigroups, J. Algebra 1969, 11, 298-314.
20. T. Evans, Identities and relations in commutative Moufang loops. J. Algebra, 1974, 31, 508-513.
21. V. I. Ursu, On identities of nilpotent Moufang loops, Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees 45 (2000), no. 3, 537-548.