ACEDEMIA DE ŞTIINŢE A REPUBLICII MOLDOVA
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Cu titlu de manuscris
C.Z.U: 515.14:515:1 (043.2)

Liubomir Chiriac

SISTEME TOPOLOGICO-ALGEBRICE ŞI APLICAŢIILE LOR

Specialitatea: 01.01.04 - Geometrie şi Topologie

Autoreferat

al tezei de doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice

Chişinău, 2011

Teza a fost elaborată la catedra "Algebră, Geometrie şi Topologie" a Universităţii de Stat Tiraspol (cu sediul în oraşul Chişinău).

Consultant ştiinţific:
Cioban M., academician, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, Universitatea de Stat Tiraspol.

Referenţi oficiali:
Arhanghels'kii Alexandr, academician, doctor habilitat în şt. fiz-mat, profesor universitar, Universitatea de Stat din Moscova "M.V.Lomonosov", Rusia.
Miron Radu, academician, doctor docent în matematică, profesor universitar, Universitatea "Al.I. Cuza", Iaşi, România.
Botnaru Dumitru, doctor habilitat în şt. fiz-mat., conferenţiar universitar, Universitatea Tehnică din Moldova.

Membri ai consiliului ştiinţific specializat:

Arnautov Vladimir, academician, doctor habilitat în şt. fiz-mat, profesor universitar, preşedinte.
Popa Valeriu, doctor în şt. fiz-mat., conferenţiar universitar, secretar ştiinţific.
Soltan Petru, academician, doctor habilitat în şt. fiz-mat, profesor universitar.
Calmuţchi Laurenţiu, doctor habilitat în şt. fiz-mat., profesor universitar.
Ipate Dumitru, doctor habilitat în şt. fiz-mat., conferenţiar universitar.

Susţinerea va avea loc la 19 aprilie 2011, orele, 14.30 în şedinţa Consiliului ştiinţific Specializat DH 01.01.04-05 din cadrul Institutului de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, adresa: str. Academiei, 5, MD-2028, Chişinău, Republica Moldova.

Teza de doctor habilitat şi autoreferatul pot fi consultate la Biblioteca Institutului de Matematică şi Informatică al Academiei de Ştiinţe a Moldovei, precum şi pe site-ul CNAA (www.cnaa.acad.md).

Autoreferatul ştiinţific a fost expediat la 19 martie, 2011

Secretar ştiinţific
al consiliului ştiinţific specializat,
doctor ştiinţe fizico-matematice, conf. univ., __________ V. Popa

Consultant ştiinţific,
academician __________ M.Cioban

Autor ___________ L. Chiriac

Repere conceptuale ale cercetării

Sistemele topologico-algebrice, ca o ramură ale algebrei topologice, reprezintă un domeniu important de cercetare în matematica modernă. Metodele elaborate şi rezultatele obţinute în cadrul teoriei respective sunt implementate cu succes atît în matematica teoretică cît şi în matematica aplicată.

Actualitatea temei şi descrierea situaţiei în domeniul de cercetare

Algebra topologică fiind la frontiera dintre algebra abstractă şi topologia generală începe să se constitue ca teorie în a doua jumătate al secolului XIX-lea în lucrările marilor matematicieni H. Poincare, S. Lie, F. Klein, E. Cartan, D. Hilbert, G. Boole, A. Whitehead, etc. Noţiunea de algebră universală a fost introdusă pentru prima dată, în 1898, în cartea lui Alfred Whitehead "A Treatise on Universal Algebra". În conformitate cu ideile lui Whitehead, pentru a obţine noţiunea de algebră universală este necesar să introducem noţiunea de operaţie. Astfel, aplicaţia $f : A^n \to A$ se numeşte operaţie algebrică *n-ară* pe A, pentru $n \geq 0$. În aşa mod, Whitehead defineşte algebra universală ca un sistem (A, S), unde A este o mulţime nevidă şi S o familie de operaţii. Noţiunea de algebră universală a permis constituirea unui punct de vedere comun asupra teoriei algebrelor booleene şi teoriei grupurilor care deja găsise aplcaţii în geometrie, ecuaţii diferenţiale, fizică teoretică etc.

În 1935 Garret Birkhoff în celebra sa lucrare "On the structure of abstract algebras" [1] formulează conceptele de bază ale teoriei algebrelor universale: varietate, identitate, produs cartezian, congruenţă, obiect liber, etc. În perioada dintre anii 1935 şi 1950, cele mai multe cercetări ştiinţifice în domeniul algebrelor universale au fost realizate sub influenţa ideilor şi subiectelor propuse de G. Birkhoff. Astfel, investigaţiile respective se referă la metodele de construire ale algebrelor libere, examinarea congruenţelor şi subalgebrelor laticelor, studierea omomorfismelor algebrelor universale, etc. În anul 1950, la Congresul Internaţional de Matematică din Cambridge, A. Tarski în comunicarea sa anunţă lansarea unei noi perioade în dezvoltarea algebrelor universale. În contextul respectiv menţionăm că, rezultatele obţinute de A. Tarski, C.C. Chang, A.I. Malţev, L. Henkin, B. Jonsson, R.C. Lyndon, A. Robinson, K. Gödel, etc., au contribuit la constituirea teoriei algebrelor universale contemporane cu aplicaţii în topologie, logică, teoria modelelor, etc.

Introducerea noţiunilor de grup topologic în sens modern, în lucrările lui L.E.I. Brauer şi O. Schreier publicate respectiv în anii 1909-1910 şi 1926 cât şi de grup topologic liber în anii 1944-1945 de către A. A. Marcov [2] au stimulat enorm edificarea teoriei grupurilor topologice. Dezvoltarea spectaculoasă a teoriei grupurilor topologice, în mod special, în prima jumătate a secolului XX, datorită lucrărilor lui A. Weil, C. Chevalley, L.S. Pontrjagin, A.A. Markov, A.D. Alexandrov, J.von Neumann, van Kampess, M.I. Graev, T. Nakayama, Sh. Kakutani, etc., a influenţat benefic direcţiile de cercetare ale algebrelor universale şi au stat la temelia algebrelor topologice universale.

Este important să scoatem în evidenţă faptul că noţiunea de grup a apărut în secolul al XIX-lea şi iniţial au fost definite grupurile finite şi grupurile Lie de trasformări. Astfel, teoria grupurilor topologice practic a început să se dezvolte simultan cu teoria grupurilor abstracte infinite.

La mijlocul anilor 50, A.I. Malţev a formulat unele probleme centrale ale teoriei algebrelor topologice universale, direcţionînd în felul acesta eforturile mai multor matematicieni la dezvoltarea teoriei respective. Unele din problemele lui A.I. Malţev au fost rezolvate de S. Swierczkowski.

În lucrările relativ recente ale cunoscuţilor matematicieni, A. Arhangel'skii, V. Arnautov, M. Cioban, W.W. Comfort, V. M. Glushkov, S. Glavatsky, K. Iwasawa, V. P. Platonov, V. Protasov, D. Remus, P. Smith, A. Mikhalev, K.H. Hofmann, M. Ursul, L. Zippin, au fost soluţionate o serie de probleme cardinale care au influenţat evoluţia teoriei algebrei topologice. Menţionăm că bazele teoriei algebrelor topologice cu signatura continuă au fost elaborate în lucrările lui M. Cioban şi S. Dumitraşcu.

Menţionăm că direcţiile de cercetare în teoria algebrelor universale topologice sunt determinate de teoria abstractă a algebrelor universale, de topologia generală, de teoria grupurilor şi inelelor topologice cât şi de aplicaţiile teoriilor respective.

Probleme de cercetare. Fixăm signatura continuă E şi $-1 \leq i \leq 3.5$. Fie J o mulţime de identităţi. Notăm prin $V(E, i, J)$ clasa E-algebrelor topologice care sunt T_i- spaţii ce satisfac identităţile J. Academicianul M. Cioban în lucrarea sa "Algebra topologică, probleme", 2006, a formulat următoarele probleme ale teoriei sistemelor topologico-algebrice:

Problema 1. *De studiat concordanţa dintre proprietăţile algebrice şi topologice ale E-algebrelor topologice G din $V(E, i, J)$.*

Problema respectivă, de obicei, este examinată prin prisma următoarelor două probleme.

Problema 1T. *Fie G este E-algebră. De determinat tipurile de topologii care pot fi introduse pe E-algebra G, ce o transformă în algebră topologică.*

Problema 1A. *Fie G este spaţiu topologic. De determinat tipurile de structuri algebrice care pot fi introduse pe spaţiul G, ce-l transformă în algebră topologică.*

Problema 1T se numeşte problema topologizării algebrei, iar Problema 1A se numeşte problema algebrizării spaţiului topologic. Observăm că dacă $E = \emptyset$, atunci clasa de E-algebre coincide cu clasa de spaţii topologice. În cazul când E şi G sunt spaţii discrete, proprietăţile E-algebrei G coincid cu proprietăţile E-algebrei abstracte G. În aşa mod, teoria E-algebrelor topologice este o teorie intermediară teoriei spaţiilor topologice şi teoriei E-algebrelor abstracte. Problemele 1T şi 1A au fost cercetate de mulţi matematicieni. Problema 1T a fost studiată, de exemplu, de A. Kertesz şi T. Scele în 1953 care au demonstrat că orice grup comutativ infinit poate fi transformat în grup topologic cu topologie nediscretă. Alte aspecte ale Problema 1T au mai fost examinate de V.I. Arnautov, M.I. Ursul, P.I. Chircu, etc. Problema 1A este cu mult mai complicată. Teorema lui Frobenius reprezintă unul din primele rezultate în această direcţie. Rezultate semnificative în acest sens au fost obţinute de L.S. Pontrjagin, J. Milnor, I. M. James.

Subliniem că pe orice spaţiu topologic G există structură de E-algebră topologică. Este suficient să fixăm anumite aplicaţii continui $e_{nG} : E_n \times G^n \to G$. De exemplu, dacă $n \geq 1$ şi $E_n \neq \emptyset$, atunci notăm $e_{nG}(\omega, x_1, ..., x_n) = x_n$ pentru orice

$(\omega, x_1, ..., x_n) \in E_n \times G^n$. Structura de E-algebră topologică este unică dacă, şi numai dacă, G este un spaţiu dintr-un singur punct. Însă, structuri algebrice cu anumite identităţi nu există pentru toate spaţiile.

Este semnificativ următorul rezultat obţinut de L.S. Pontrjagin: Corpurile numerelor reale R, numerelor complexe C şi a cuaternioanelor sunt unicile corpuri asociative, conexe şi local compacte.

Menţionăm un rezultat important demonstrat de I.M. James în 1957-1958. Fie R^n, $n \geq 1$, spaţiul Euclidian n-dimensional şi $S^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ sfera unitate. Atunci pe S^m există structuri de grupoid topologic cu unitate numai pentru $m \in \{0, 1, 3, 7\}$.

Jon Milnor a arătat că dimensiunea unei algebre reale finit-dimensională fără divizori a lui zero poate primi doar valorile $n = 1, 2, 4, 8$. În acest context putem menţiona şi următoarele rezultate:
1. Fie R^n, $n \geq 0$, spaţiul Euclidian n-dimensional. Dacă $n \notin \{0, 1, 2, 4, 8\}$, atunci pe R^n nu există structuri de corp comutativ.
2. Pe spaţiul Euclidian 8-dimensional R^8 există o structură de corp neasociativ şi nu există structură de corp asociativ.
3. Pe spaţiul Euclidian 4-dimensional R^4 există o structură de corp asociativ şi nu există structură de corp comutativ.
4. Pe orice spaţiu A în raport cu o operaţie binară aditivă $(+)$, cu zero şi fără divizori ai lui zero, definită de egalitatea $x + y = y$ există o structură de semigrup topologic cu unitate de dreapta. În acest caz orice element din A va fi unitate de dreapta.

Din acest punct de vedere putem spune că identităţile influenţează direct asupra proprietăţilor topologice. Algebrele topologice cu anumite proprietăţi topologo-algebrice (ori algebrico-topologice) joacă un rol semnificativ în diverse teorii. De exemplu, J.M. Boardman şi R.M. Vogt [3]. au introdus structuri algebrice care determină: H-spaţii, A_∞-spaţii, $\mathcal{B}$-spaţii, $W\mathcal{B}$-spaţii, E_∞-spaţii. Toate aceste spaţii generează structuri de spaţii buclate. Această teorie a putut fi expusă suficient de transparent numai datorită utilizării algebrelor universale. Chestiunea respectivă a fost interpretată destul de reuşit în lucrarea lui J.P. May [4].

Prin urmare Problema 1 în sensul ei general este foarte importantă. Cu această problemă este legată următoarea direcţie de cercetare:
Influenţa structurilor algebrice asupra proprietăţilor topologice ale algebrelor universale topologice şi aplicarea structurilor topologo-algebrice în studiul proprietăţilor spaţiilor topologice.

De această direcţie ţine şi vestita Problemă V a lui Hilbert. Dezvoltării acestei direcţii sunt consacrate cercetările din această lucrare. Următoarele probleme sunt conectate la direcţia de cercetare formulată mai sus.
Problema 2. *Fie P o proprietate topologico-algebrică. Cînd E-algebra topologică $A \in V(E, i, J)$ posedă proprietatea P?*
Problema 3. *Fie P o proprietate topologico-algebrică. De cercetat structura E-algebrelor topologice $A \in V(E, i, J)$ care posedă proprietatea P?*
Problema 2 este generală, iar problema 3 are un caracter particular. Pot fi considerate următoarele proprietăţi topologice P: a fi spaţiu compact, a fi spaţiu

local compact, a fi spaţiu local compact metrizabil, a fi spaţiu metrizabil, a fi spaţiu complet, a fi spaţiu paracompact.

Problema 4. *Fie $p : A \to B$ este un omomorfism continuu al E-algebrei topologice A în E-algebra topologică B. În ce condiţii p este un omomorfism deschis?*

Fie K o quasivarietate de E-algebre topologice. Pentru orice spaţiu X se determină algebra liberă $(F(X,K), i_X)$ şi algebra abstract liberă $(F^a(X,K), j_X)$. Există un omomorfism continuu $a_X : F^a(X,K) \to F(X,K)$, la care $a_X(j_X(X)) = i_X(X)$. Dacă a_X este izomorfism continuu, atunci se spune că algebra $F(X,K)$ este algebric liberă.

Problema 5. *În ce condiţii algebra $F(X,K)$ este algebric liberă?*

Problema 6. *În ce condiţii $i_X : X \to F(X,K)$ este o scufundare?*

Aplicaţia i_X este o scufundare dacă i_X este un omomorfism al spaţiului X pe subspaţiul $i_X(X)$ din $F(X,K)$.

Problema 7. *De studiat relaţiile dintre proprietăţile spaţiului X şi a E-algebrei topologice $F(X,K)$.*

Problemele 5-7 au fost formulate de A.I. Malţev în cazul signaturii discrete. Două spaţii X şi Y se numesc M_K-echivalente dacă algebrele $F(X,K)$ şi $F(Y,K)$ sunt topologic izomorfe.

Problema 8. *De determinat proprietăţile topologice care se păstrează la relaţia de M_K-echivalenţă?*

Problema 9. *Fie V este o varietate completă de E-algebre topologice cu signatura continuă. Considerăm E-algebra $G \in V$. În ce condiţii există o acoperire universală $p : G^* \to G$, astfel încît $G^* \in V$ şi $p : G^* \to G$ este un omomorfism?*

Spaţiul X se numeşte rezolubil dacă există două submulţimi dense şi disjuncte.

Problema 10. *Fixăm signatura continuă E şi J mulţimea de identităţi. Fie $G \in V(E,i,J)$ o E-algebră topologică minimală. În ce condiţii spaţiul G este rezolubil?*

Problema 11. *În ce condiţii pe un grupoid medial local există măsuri de tipul Haar invariante de dreapta (ori stânga)?*

Tripletul (G, e_G, μ) se numeşte *L-fuzzy E-algebră* dacă următoarele condiţii sunt adevărate:

(A) (G, e_G) este E-algebră;

(F) $\mu : G \to L$ este submulţime L-fuzzy din G;

(AF) mulţimea $\{x \in G : \mu(x) \geq l\}$ este vidă ori este E-subalgebră din G pentru orice $l \in L$.

Omomorfismul $f : A \to B$ al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) în L-fuzzy E-algebra (B, e_B, η) se numeşte *fuzzy omomorfism* dacă $\eta(f(x)) \geq \mu(x)$ pentru orice $x \in A$.

Problema 12. (problema despre fuzzy omomorfisme). *Fie $f : A \to B$ este un omomorfism al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) pe E-algebra B. În ce condiţii $\lambda(f,\mu) = f(\mu)$, adica $(B, e_B, f(\mu))$ este L-fuzzy E-algebră?*

Aceste probleme generale acoperă în esenţă direcţia de cercetare menţionată mai sus. Astfel:

Scopul şi obiectivele lucrării rezidă în studierea sistemelor topologo-algebrice şi aplicaţiile lor. În particular:

1. Studierea algebrelor topologice libere.
2. Elaborarea metodelor adecvate de studiere a topologiilor pe algebre libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte.
3. Descrierea submulţimilor compacte ale algebrelor topologice libere şi ale k-algebrelor.
4. Elaborarea metodelor de cercetare a algebrelor universale topologice cu măsuri invariante. În particular, studierea conceptului de unitate multiplă.
5. Elaborarea metodelor de cercetare a quasigrupurilor topologice cu unităţi multiple.
6. Studierea structurilor uniforme pe spaţii prin prisma obiectelor libere.
7. Studierea echivalenţelor în clasa de spaţii topologice generate de varietăţi de algebre universale topologice.
8. Construirea teoriei generale a descompunerilor grupoizilor topologici cu proprietăţi de invertibilitate.
9. Studierea structurilor fuzzy pe algebre universale. În particular, soluţionarea problemei omomorfismelor pentru algebre fuzzy.

Metodologia cercetării. Topologizarea algebrelor abstracte şi teoria mulţimilor sunt componente de bază a metodelor cercetării. Construcţiile şi metodele de demostraţie se bazează pe aplicarea noţiunilor de algebră topologică, algebră liberă, varietate, quasigrup cu unităţi multiple, spaţiu rezolubil, algebră fuzzy.

Noutatea şi originalitatea ştiinţifică. *Problema principală rezolvată conform obiectivelor tezei, constă în determinarea influenţei structurilor algebrice asupra proprietăţilor topologice ale algebrelor universale topologice şi aplicarea acestora la studierea proprietăţilor spaţiilor topologice.*

Inovaţia ştiinţifică a lucrării este determinată de soluţionarea următoarelor probleme concrete:

- au fost elaborate metode de studiere a topologiilor pe algebre libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte;
- au fost elaborate metode generale de aplicare a structurilor uniforme la studierea algebrelor topologice;
- au fost determinate condiţiile pentru ca omomorfismele continue al grupoizilor topologici cu diviziune continuă să fie deschise;
- au fost descrise submulţimile compacte ale k-algebrelor libere;
- au fost stabilite unele proprietăţi topologice care se păstrează la relaţia de M_K-echivalenţă;
- au fost introduse şi cercetate quasigrupurile cu unităţi multiple;
- a fost elaborată metoda de construcţie a măsurii Haar pe quasigrupuri topologice;
- a fost elaborată metoda de descompunere a grupoizilor topologici cu proprietăţi de invertibilitate;
- a fost construită structura algebrică pe acoperirea universală a E-algebrei topologice cu signatura continuă;
- a fost dată soluţia generală a problemei omomorfismelor pentru algebre fuzzy;
- a fost studiată categoria grupoizilor fuzzy cu diviziune.

Rezultatele obţinute în lucrare respectivă sunt nemijlocit legate de soluţionarea Problemelor 1-12 formulate mai sus. Rezultatele principale sunt noi.

Semnificaţia teoretică a lucrării. Cercetările în domeniul algebrelor topologice au fost iniţiate în secolul al XIX-lea şi direcţionate de necesităţile aplicării matematicii în diverse domenii. Noţiunile de compactitate şi structură uniformă joacă un rol important în aplicaţiile matematicii. Dezvoltarea teoriei generale ale algebrelor universale topologice demonstrează că algebrele topologice libere reprezintă un instrument eficient de studiere al algebrelor topologice. În contextul respectiv a fost dezvoltată o teorie prin intermediul căreia se descriu submulţimile compacte ale algebrelor topologice libere şi ale k-algebrelor. S-au elaborat metode eficiente ce permit studierea topologiilor pe algebre libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte. A fost elaborat un concept nou care permite cercetarea quasigrupurilor topologice cu unităţi multiple. A fost construită teoria generală a descompunerilor grupoizilor topologici cu proprietăţi de invertibilitate. A fost soluţionată problema omomorfismelor pentru algebrele fuzzy. A fost studiată categoria grupoizilor fuzzy cu diviziune.

Valoarea aplicativă a lucrării. Metodologia, metodele şi conceptele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori unele aspecte ale lor formulate de A.I. Malţev, L.S. Pontrjagin, M.M.Cioban. Aparatul matematic aplicat a condus la rezolvarea unor probleme din diverse domenii ale matematicii moderne care au conexiune cu algebra topologică.

Rezultatele ştiinţifice principale înaintate spre susţinere.

- metoda structurilor uniforme care a permis descrierea structurilor topologice a algebrelor libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte;

- metodele algebrelor libere şi k-algebrelor prin intermediul cărora s-a stabilit că la relaţia de M_k-echivalenţă se păstrează grupurile omologice;

- teoria generală de descompunere a algebrelor topologice cu propietăţi de invertibilitate;

- conceptul de (n, m)-unitate care a facilitat descrierea quasigrupurile topologice cu (n, m)-identităţi;

- metoda izotopilor omogeni care a oferit posibilitatea extinderii unor afirmaţii fundamentale din clasa grupurilor topologice în clasa quasigrupurilor topologice (n, m)-omogene;

- metoda de cercetare a condiţiilor pentru care omomorfismele continue a grupoizilor topologici cu diviziune sunt deschise;

- metodele algebrelor universale fuzzy şi omomorfismelor fuzzy prin intermediul cărora s-a soluţionat problema omomorfismelor pentru algebre fuzzy;

- metoda de studiere a bazelor omogene pentru categoria grupoizilor fuzzy cu diviziune;

- metoda de construcţie a unui spaţiu topologic liniar conex, care acoperă o algebră topologică universală cu signatură continuă şi admite o structură de algebră topologică universală cu signatură continuă.

Rezultatele obţinute au permis să rezolvăm probleme concrete ori aspecte ale lor formulate de A.I. Malţev, L.S. Pontrjagin, M.M.Cioban. Aceste rezultate generalizează unele teoreme fundamentale demonstrate de L.S. Pontrjagin, A.I. Malţev, M.M. Cioban, A.V. Arhangelskii, I.V. Protasov, A. Tkacenco, E. S. Numela, V. G. Pestov, B. A. Pasyncov, V.M. Valov, M. Ursul.

Implementarea. Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria algebrelor topologice, teoria quasigrupurilor topologice, teoria automatelor, teoria algebrelor fuzzy, la elaborarea cursurilor speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Aprobarea rezultatelor ştiinţifice. Rezultatele lucrării au fost expuse:
- Simpozionul al VI-lea Tiraspolean de Topologie Generală şi Aplicaţiile ei, Chişinău, 1991;
- International Conference on Group Theory, Timisoara, 17-20 September, 1992;
- Conferinţa pregatitoare pentru Congresul Matematicienilor Români de Pretutindeni, Bucureşti, 1993;
- Congresul XVIII al Academiei Româno-Americane de Ştiinte si Arte, Chişinău, 1993;
- The 7-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Piteşti, October, 1993;
- The 8-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Oradea and Chişinău, October, 1994;
- The 9-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Oradea- CAIM, 1995;
- II International Conferences of the Balcanic Union For Fuzzy Systems and Artificial Intelegence. Trabzon, Turkey, 1996;
- International Conference on Mathematics and Informatics (State University of Moldova). 19-21 September 1996;
- Invăţământul universitar din Moldova la 70 ani. Conferinţa ştiintifico-metodica, Chişinău, 9-10 octombrie 2000;
- First Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chişinău, August 16-18, 2001;
- International Seminar on Discrete Geometry dedicated to the 75-th birthday of Professor A. M. Zamorzaev, Chişinău, August 28-29, 2002;
- International Conferences on Radicals (ICOR-2003), dedicated to the memory of Prof. V. Adrunakievich, August 11-16, 2003, Chişinău, Moldova;
- Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chişinău, August 17-19, 2004;
- The 13-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Piteşti, October 14-16, 2005;
- Materialele seminarului Ştiinţifico-metodic "Profesorul Petre Osmatescu-80", 19 noiembrie 2005, Chişinău;
- The 5-th Edition of the anual Symposion "Mathematical Applied in Biology and Biophysics", Iaşi, June 16-17, 2006;
- The XIV-th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Satelite Conference of ICM 2006, Chişinău, August 17-19, 2006;
- 6th Congress of Romaninan Mathematicians, June 28 - July 4, 2007, Bucharest, Romania;
- Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics, Chişinău, August 21-23, 2007;
- Conference. Mathematics and Informatics. MITRE 1-4 October, State University of Moldova, 2008;
- The 16th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2008 Oradea, October 9-11, 2008;

- Conferinţa ştiinţifică republicană ”Matematica-probleme actuale cu aplicaţii”, 8 aprilie, 2009, ASEM, Chişinău;
-The 17th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2009 Constanza, September 17-19, 2009;
-Conference. Mathematics and Information Technologies. MITRE-2009, October 8-9, Mathematical Society of Moldova, State University of Moldova, 2009;
-Scientific Conference dedicated to the 80th anniversary of the foundation of the Tiraspol State University. Actual Problems of Mathematics and Informatics. September 24-25, 2010;
-The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2010 Iasi, October 14-18, 2010.
Publicaţii. Rezultatele principale ale tezei sunt publicate în lucrările [15-59].

Volumul şi structura tezei. Volumul lucrării este 214 pagini. Lucrarea constă din introducere, şase capitole (divizate în paragrafe), concluzii şi recomandări, adnotare şi bibliografie.

Cuvinte cheie: algebră universală topologică, varietate, quasigrup topologic, unităţi multiple, izotopi omogeni, spaţiu rezolubil, grupoid medial şi paramedial, algebre fuzzy.

Conţinutul lucrării

În **Introducere**, se argumentează actualitatea tezei, se prezintă scopul şi problemele cercetării şi se expune succint conţinutul lucrării.

1. Noţiuni, construcţii topologico-algebrice şi rezultate fundamentale

În capitolul respectiv se tratează noţiunile topologice şi algebrice utilizate, construcţiile de bază şi rezultatele fundamentale folosite ulterior în cercetarea direcţiei abordate [6,7]. Vom scoate în evidenţă următoarele noţiuni. Suma discretă $E = \oplus\{E_n : n \in N = 0, 1, \ldots\}$ a spaţiilolr topologice $\{E_n : n \in N\}$ disjuncte două câte două se numeşte signatură continuă. Dacă E este spaţiu discret, atunci signatura E se va numi discretă.

Definiţia 1.2.1. *Se numeşte E-algebră ori algebră universală de signatura E perechea $\{G, e_{nG} : n \in N\}$ pentru care:*
1. G este mulţime nevidă.
2. $e_{nG} : E_n \times G^n \longrightarrow G$ este aplicaţie pentru fiecare $n \in N$.

Mulţimea G se numeşte suportul E-algebrei şi aplicaţiile e_{nG} se numesc structură algebrică pe G. Signatura E este mulţimea tuturor simbolurilor operaţiilor date.

Definiţia 1.2.2. *E-algebra G echipată cu o topologie se numeşte E-algebră topologică dacă toate aplicaţiile $e_{nG} : E_n \times G^n \to G$ sunt continue.*

Definiţia 1.2.4. *Aplicaţia $f : A \to B$ a E-algebrei A în E-algebra B se numeşte omomorfism dacă $f(e_{0A}(\{a\} \times A^0)) = e_{0B}(\{a\} \times B^o)$ pentru orice $a \in E_0$ şi $f(e_{nA}(\omega, x_1, \ldots, x_n)) = e_{nB}(\omega, f(x_1), \ldots, f(x_n))$ pentru orice $n > 0$, $\omega \in E_n$ şi $x_1, \ldots, x_n \in A$.*

Orice spaţiu topologic este T_{-1}-spaţiu. Dacă $-1 \leq i < j \leq 3.5$, atunci orice T_j-spaţiu este la fel şi T_i-spaţiu. Dacă E-algebra topologică G este T_i-spaţiu, atunci G se numeşte T_i-E-algebră, pentru $i \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 3.5\}$.

Definiţia 1.2.5. *Clasa K de E-algebre se numeşte varietate dacă au loc* *următoarele condiţii:*

1. clasa K este închisă în raport cu produsul Cartezian;

2. clasa K este închisă în raport cu luarea subalgebrelor;

3. clasa K este închisă în raport cu trecerea la continuitate a imaginilor omomorfice.

Dacă ultima condiţie nu se îndeplineşte, atunci K se numeşte quasivarietate.

Definiţia 1.2.6. *Clasa K de E-algebre topologice care sunt şi T_i-spaţii se numeşte T_i-varietate completă dacă următoarele condiţii sunt adevărate:*

1. clasa K este închisă în raport cu produsul Cartezian;

2. clasa K este închisă în raport cu luarea subalgebrelor;

3. dacă $(G, \tau) \in K$ şi (G, τ') este E-algebră topologică şi T_i-spaţiu, atunci $(G, \tau') \in K$;

4. dacă $(G, \tau) \in K$ şi (G', τ') este E-algebră topologică, T_i-spaţiu şi există un omomorfism continuu $f : G \overset{pe}{\to} G'$, atunci $(G', \tau') \in K$.

Clasa K de E-algebre topologice se numeşte:

1. T_i-quasivarietate dacă condiţiile 1 şi 2 sunt juste;

2. T_i-varietate dacă condiţiile 1, 2 şi 4 sunt juste;

3. T_i-quasivarietate completă dacă condiţiile 1 - 3 sunt juste.

Fixăm signatura continuă E. Fie G o E-algebră, $L \subseteq E$, şi $H \subseteq G$. Notăm: $d_0(L, H) = H$; $d_1(L, H) = H \cup (\cup\{e_{nG}((L \cap E_n) \times H^n) : n \in N\}), ..., d_{n+1}(L, H) = d_1(L, d_n(L, H))$; Atunci $d(L, H) = \cup\{d_n(L, H) : n \in N\}$.

Dacă $H \neq \emptyset$ şi $L = E$, atunci $d(E, H)$ este o E-subalgebră din G generată de H. Dacă $d(E, H) = G$, atunci mulţimea H generează algebric E-algebra G.

Definiţia 1.2.7. *Fixăm T_i-quasivarietatea K de E-algebre topologice şi spaţiul nevid X. Cuplul $(F(X, K), i_X)$ se numeşte algebră topologică liberă a spaţiului X în clasa K dacă următoarele condiţii sunt adevărate:*

1. $F(X, K) \in K$;

2. $i_X : X \to F(X, K)$ este aplicaţie continuă;

3. Mulţimea $i_X(X)$ generează algebric $F(X, K)$;

4. Pentru orice aplicaţie continue $f : X \to G \in K$ există un singur omomorfism continuu $\hat{f} : F(X, K) \to G$ astfel încât $f(x) = \hat{f}(i_X(x))$ pentru orice $x \in X$. Omomorfismul $\hat{f}$ se numeşte omomorfism generat de f.

Definiţia 1.2.8. *Fixăm T_i-quasivarietatea K de E-algebre topologice şi spaţiul nevid X. Cuplul $(F^a(X, K), a_X)$ se numeşte algebră algebric liberă a spaţiului X în clasa K dacă următoarele condiţii sunt adevărate:*

1. $F^a(X, K) \in K$;

2. $a_X : X \to F^a(X, K)$ este aplicaţie;

3. Mulţimea $a_X(X)$ generează algebric $F^a(X, K)$;

4. Pentru orice aplicaţie $f : X \to G \in K$ există un singur omomorfism $\tilde{f} : F^a(X, K) \to G$ astfel încât $f(x) = \tilde{f}(a_X(x))$ pentru orice $x \in X$.

Teorema 1.2.9.(M. Cioban) *Fie K o T_i-quasivarietate de E-algebre topologice. Atunci pentru spaţiu nevid X există:*

– o unică E-algebră algebric liberă $(F^a(X, K), a_X)$;

– o unică E-algebră topologică liberă $(F(X, K), i_X)$;

– un unic omomorfism continuu $k_X : F^a(X, K) \to F(X, K)$ unde $i_X = k_X \cdot a_X$.

2. Aplicaţiile structurilor uniforme la studierea algebrelor topolgice libere

În acest capitol se cercetează topologiile pe algebrele libere ale spaţiilor pseudocompacte şi numărabil compacte. Un rol importnat în studiul efectuat îl joacă structurile uniforme. Este demonstrată o generalizare a teoremei lui Nummela-Pestov [7, 8] pentru varietăţi de algebre uniforme. Spaţiul X este pseudocompact dacă şi numai dacă toate funcţiile continue pe X sunt mărginite. Şirul de submulţimi $\{X_n : n \in N = \{0, 1, 2, ...\}\}$ din X se numeşte monoton dacă $X_n \subset X_{n+1}$ pentru orice $n \in N$.

Definiţia 2.2.1. *Spaţiul Tychonoff X se numeşte limită inductivă a şirului monoton $\{X_n : n \in N\}$ dacă:*
1. $X = \cup\{X_n : n \in N\}$ şi submulţimile X_n sunt închise în X;
2. submulţimea F este închisă în X atunci şi numai atunci când toate intersecţiile $F \cap X_n$ sunt închise în X.

Orice limită inductivă a şirului de spaţii compacte se numeşte k_ω-spaţiu.

Definiţia 2.2.2. *Spaţiul X se numeşte limită funcţională ori C-limită a şirului $\{X_n : n \in N\}$ dacă:*
1. X este spaţiu Tychonoff;
2. $X = \cup\{X_n : n \in N\}$ şi submulţimile X_n sunt închise în X;
3. funcţia $f : X \longrightarrow R$ este continuă dacă şi numai dacă restricţia $f|X_n$ este continuă pe X_n pentru orice $n \in N$.

Dacă spaţiul X este limită inductivă a şirului monoton de subspaţii compacte $\{X_n : n \in N\}$ atunci $\{X_n : n \in N\}$ se numeşte k_ω-descompunere a spaţiului X.

Spaţiul Y se numeşte C-scufundat în X dacă şi numai dacă orice funcţie continue pe Y are o extensiune continue pe X. Notăm cu νX extensiunea Hewitt a spaţiului Tychonoff X. Dacă X este spaţiul Tychonoff, $Y \subset X$, şi Y este dens în X, atunci Y este C-scufundat în X dacă şi numai dacă $Y \subset X \subset \nu Y$. Notăm cu $\Pi = \{X : X^n$ este pseudocompact pentru orice $n \in N$ $\}$.

Definiţia 2.2.10. *Şirul $\{X_n : n \in N\}$ se numeşte Π_ω-descompunere a spaţiului Tychonoff X dacă:*
1. X este C-limită a şirului $\{X_n : n \in N\}$;
2. pentru orice $n \in N$ subspaţiul X_n este pseudocompact şi este C-scufundat în X.

Definiţia 2.2.15. *Spaţiul Tychonoff X se numeşte Π_ω-spaţiu dacă există Π_ω-descompunere monotonă $\{X_n : n \in N\}$ astfel încât $X_n \in \Pi$ pentru orice $n \in N$.*

Teorema 2.2.16. *Dacă X este Π_ω-spaţiu, atunci X^n este Π_ω-spaţiu pentru orice $n \in N$.*

Corolarul 2.2.17. *Dacă X este Π_ω-spaţiu, atunci $\nu(X^m) = (\nu X)^m$ pentru orice $m \in N$.*

Fie $C = \{X : X^n$ este normal şi compact numărabil pentru orice $n \in N\}$.

Definiţia 2.3.1. *C_ω-descompunere este Π_ω-descompunere $\{X_n : n \in N\}$ în cazul când X_n este compact numărabil şi normal pentru orice $n \in N$.*

Definiţia 2.3.2. *Spaţiul X este C_ω-spaţiu dacă şi numai dacă există o C_ω-descompunere monotonă $\{X_n : n \in N\}$ astfel încât $X_n \in C$ pentru orice $n \in N$.*

C_ω-spaţiul şi clasa C a fost introdusă de A. Tkacenko. Orice C_ω-spaţiu este Π_ω-spaţiu. Afirmaţia inversă nu este corectă.

Propoziţia 2.3.4. *Dacă X este C_ω-spaţiu, atunci X^n este un C_ω-spaţiu normal pentru orice $n \in N$.*

Notăm spaţiul X cu o uniformitate separabilă μ cu μX. Dacă X este spaţiu Tychonoff, atunci notăm cu uX mulţimea X cu o uniformitate u compatibilă cu topologia în X. Fie u_X o uniformitate maximală pe spaţiul X. Atunci notăm cu u_0X spaţiul X cu uniformitatea maximală u_X. Notăm completarea în sens Weyl a spaţiului uniform μX cu $\beta\mu X$. Dacă $Y \subset X$, atunci $\mu|Y$ este restricţia uniformităţii μ pe Y.

Fixăm signatura E cu uniformitatea discretă u_E. E-algebra A cu uniformitatea μ se numeşte uniformă dacă aplicaţiile $e_{nA} : E_n \times A_n \longrightarrow A$ sunt uniform continue.

Definiţia 2.5.1. *Clasa K de E-algebre uniforme formează o varietate completua dacă:*
1. clasa K este închisă în raport cu produsul Cartezian şi luarea subalgebrelor;
2. clasa K este închisă în raport cu trecerea la continuitatea uniformă a imaginilor omomorfice;
3. dacă $\mu A \in K$ şi algebra A este uniformă faţă de uniformitatea η, atunci $\eta A \in K$.

Fixăm o varietate completă netrivială K de algebre uniforme.

Teorema 2.5.11. *Orice spaţiu Tychonoff X este C-scufundat în $F(X, K)$.*

Considerăm signatura E. E-algebra topologică A cu uniformitatea u pe ea este algebră T-uniformă dacă este posibil de introdus în βuA o structură de E-algebră topologică astfel încât A va fi o subalgebră a algebrei βuA. În acest caz vom spune că algebra T-uniformă βuA este completare a algebrei T-uniforme uA.

Orice algebră uniformă ori slab uniformă este T-uniformă. Afirmaţia inversă nu este corectă.

Algebra topologică A este T-uniformizabilă dacă şi numai dacă pe A există o uniformitate compatibilă care induce o structură de algebră T-uniformă pe A. Dacă algebra topologică A este completă în sens Diedonné, atunci este T-uniformizabilă.

Definiţia 2.6.3. *Clasa K de algebre T-uniformizabile se numeşte varietate T-uniformi-zabilă completă dacă:*
1. clasa K este închisă în raport cu produsul Cartezian şi luarea subalgebrelor;
2. dacă $A \in K$ şi A este algebră T-uniformă în raport cu topologia τ şi uniformitatea μ, atunci $(A, \tau) \in K$;
3. dacă $A \in K$ şi $f : A \longrightarrow B$ este omomorfism continuu pe algebra T-uniformizabilă B, atunci $B \in K$.

Fie K o varietate T-uniformizabilă completă netrivială de E-algebre. Atunci, pentru orice algebră $A \in K$, se poate defini uniformitatea maximală ν_A care T-uniformizează A. Notăm cu $\hat{A}$ completarea algebrei A relativ de uniformitatea ν_A. Conform principiului păstrării identităţilor la operaţia de completare, obţinem că $\hat{A} \in K$.

Teorema 2.6.4. *Fie K o varietate netrivială de E-algebre. Atunci pentru*

spaţiul uniform μX există algebra $F(\mu X, K) \in K$ astfel încât:
1. μX este subspaţiu uniform al spaţiului uniform $(F(\mu X, K), \nu_{F(\mu X,K)})$;
2. mulţimea X generează algebric $F(\mu X, K)$;
3. pentru orice aplicaţie uniformă continuă $f : X \longrightarrow A \in K$, unde A este echipată cu uniformitatea ν_A, există un omomorfism continuu $\hat{\hat{f}} : F(\mu X, K) \longrightarrow A$ astfel încât $f = \hat{\hat{f}}|X$;
4. algebra $F(\mu X, K)$ este algebric liberă în clasa K.

Fixăm signatura E, $i \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 3,5\}$, şi T_i-varietatea K, netrivială, completă de E-algebre topologice. Notăm cu K_u familia tuturor algebrelor T-uniformizabile din K. Clar că, K_u conţine toate algebrele din K paracompacte, complete în sens Diedonné, şi toate algebrele discrete din K. În aşa mod, K_u este varietate T-uniformă şi completă de algebre şi clasele K şi K_u coincid algebric. Prin urmare, pentru orice spaţiu Tychonoff X, există un izomorfism continuu $\pi_X : F(X, Y) \longrightarrow F(X, K_u)$ astfel încât $\pi_X(x) = x$ pentru orice $x \in X$ şi $\pi_X|X$ este omeomorfism. Dacă $X \subset A$ atunci notăm cu $\langle X \rangle$ algebra generată de mulţimea X în A.

Teorema 2.7.1. *Fie $G \in K_u$. Considerăm mulţimea $X \subset G$ şi închiderea ei $[X]$ în G, $\mu = v_G \mid X$ şi $\bar{\mu} = v_G \mid [X]$. Atunci:*
1. dacă $\langle [X] \rangle = F(\bar{\mu}[X], K_u)$, atunci $\langle X \rangle = F(\mu X, K_u)$;
2. dacă $\langle X \rangle = F(\mu X, K_u)$, atunci $\langle [X] \rangle = F(\bar{\mu}[X], K_u)$.

Teorema respectivă a fost demonstrată pentru varietăţi de grupuri de Nummela şi Pestov.

Fixăm signatura numărabilă $E, i \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 3.5\}$, şi T_i-varietatea completă K de E-algebre topologice.

Teorema 2.9.1. *Dacă X este un k_ω-spaţiu, atunci $F(X, K) = F(X, K_u)$.*

Teorema 2.9.2. *Fie $i = 3,5$. Pentru spaţiul Tychonoff X, următoarele condiţii sunt echivalente:*
1. X este Π_ω-spaţiu;
2. $F(X, K)$ este Π_ω-spaţiu;
3. $F(X, K_u)$ este Π_ω-spaţiu omeomorf cu $F(X, K)$.

Teorema 2.9.3. *Pentru spaţiul X, următoarele condiţii sunt echivalente:*
1. X este C_ω-spaţiu;
2. $F(X, K)$ este C_ω-spaţiu;
3. $F(X, K_u)$ este C_ω-spaţiu.

Fixăm signatura numărabilă E şi $T_{3,5}$-varietate completă şi netrivială K de E-algebre topologice.

Teorema 2.10.6. *Pentru spaţiul Tychonoff X următoarele condiţii sunt echivalente:*
1. spaţiul X este complet în sens Diedonné;
2. spaţiul $F(X, K)$ este complet în sens Diedonné;
3. spaţiul $F(X, K_u)$ este complet în sens Diedonné.

Fie E o signatură numărabilă şi K o T_i-varietate completă de E-algebre topologice, unde $i \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 3,5\}$. Dacă X este P-spaţiu, atunci $F(X, K)$ este P-spaţiu.

3. Grupoizi topologici şi quasigrupuri cu unităţi multiple

În acest capitol sunt descrise quasigrupurile topologice cu (n, m)-identităţi, care se obţin utilizând izotopiile grupurilor topologice. Astfel de quasigrupuri se numesc quasigrupuri (n, m)-omogene. Obiectivul central al cercetărilor noastre ţine de extinderea unor afirmaţii din clasa grupurilor topologice în clasa quasigrupurilor topologice (n, m)-omogene. Se examinează, de asemenea, grupoizii mediali, paramediali şi conexiunea lor cu grupoizii asociativi. Sunt cercetate algebre topologice cu signatură continuă universal acoperite.

O mulţime nevidă G se numeşte grupoid relativ de operaţia binară notată cu $\{\cdot\}$, dacă pentru orice pereche ordonată de elemenete a, b din G, se defineşte în mod unic elementul $ab \in G$. Dacă grupoidul G este spaţiu topologic şi operaţia multiplicativă $(a, b) \to a \cdot b$ este continuă, atunci G se numeşte grupoid topologic. Grupoidul G se numeşte grupoid cu diviziune, dacă pentru orice elemente $a, b \in G$ ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii, nu necesar unice. Grupoidul G se numeşte grupoid primitiv cu diviziuni, dacă există două operaţii binare $l : G \times G \to G$, $r : G \times G \to G$, astfel încît $l(a, b) \cdot a = b$, $a \cdot r(a, b) = b$ pentru orice $a, b \in G$. Astfel, grupoidul primitiv cu diviziuni este algebră universală cu trei operaţii binare. Dacă în grupoidul topologic G, diviziunile primitive l şi r sunt continue, atunci putem spune că G este grupoid topologic primitiv cu diviziuni continue. Grupoidul G cu diviziuni se numeşte quasigrup, dacă fiecare din ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii unice. In quasigrupul G diviziunile l, r sunt unice. Dacă operaţia multiplicativă din quasigrupul $(G, \cdot)$ este continuă atunci G se numeşte quasigrup semitopologic. Dacă în quasigrupul semitopologic G, diviziunile l şi r sunt continue, atunci G se numeşte quasigrup topologic. Grupoidul G se numeşte medial dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$ pentru orice $x, y, z, t \in G$.

Considerăm grupoidul $(G, +)$. Pentru fiecare două elemente a, b din $(G, +)$ notăm: $1(a, b, +) = (a, b, +)1 = a+b$, $n(a, b, +) = a+(n-1)(a, b, +)$, $(a, b, +)n = (a, b, +)(n-1) + b$ pentru orice $n \geq 2$.

Dacă o operaţie binară $(+)$ este fixată pe mulţimea G, atunci vom folosi notaţiile $n(a, b)$ şi $(a, b)n$ în loc de $n(a, b, +)$ şi $(a, b, +)n$.

Definiţia 3.2.1. *Fie $(G, +)$ groupoid, $n \geq 1$ şi $m \geq 1$. Elementul e al groupoidului $(G, +)$ se numeşte (n, m)-zero în G, dacă:*
1. $e + e = e$
2. $n(e, x) = x$, pentru orice $x \in G$
3. $(x, e)m = x$, pentru orice $x \in G$.

Dacă în definiţia de mai sus au loc condiţiile 1 şi 2, vom spune că e se numeşte (n, ∞)-zero. Dacă în definiţia de mai sus au loc condiţiile 1 şi 3, vom spune că e se numeşte (∞, m)-zero. Clar că e este (n, m)-zero, dacă e este în acelaşi timp (n, ∞) şi (∞, m)-zero pentru orice $x \in G$.

Dacă $(G, \cdot)$ este grupoid multiplicativ, atunci elementul e se numeşte (n, m)-unitate. Noţiunea de (n, m)-unitate a fost introdusă de M. Cioban şi L. Chiriac în [10].

Teorema 3.2.3. *Fie $(G, \cdot)$ un grupoid multiplicativ, $e \in G$ şi următoarele condiţii sunt adevărate:*
1. $ex = x$ pentru orice $x \in G$;
2. $x^2 = x \cdot x = e$ pentru orice $x \in G$;
3. $x \cdot yz = y \cdot xz$ pentru orice $x, y, z \in G$;

4. Pentru orice $a, b \in G$ există un unic punct $y \in G$ astfel încât $ay = b$.
Atunci e este $(1,2)$-unitate în G.

Definiţia 3.3.1. *Fie $(G,+)$ un grupoid topologic. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte izotop omogen al grupoidului $(G,+)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât: $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$, pentru orice $x, y \in G$.*

Dacă $h : X \to X$ este o aplicaţie, atunci $h^1(x) = h(x)$ şi $h^n(x) = h\left(h^{n-1}(x)\right)$ pentru orice $x \in X$ şi $n \geq 2$.

Definiţia 3.3.2. *Fie $n, m \leq \infty$. Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte (n,m)-izotop omogen al grupoidului topologic $(G,+)$ dacă există două automorfisme topologice $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât:*
1. $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$;
2. $\varphi\psi = \psi\varphi$;
3. Dacă $n < \infty$, atunci $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$;
4. Dacă $m < \infty$, atunci $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.

Definiţia 3.3.3. *Grupoidul $(G,\cdot)$ se numeşte izotop al grupoidului topologic $(G,+)$, dacă există două omeomorfisme $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y)$ pentru orice $x, y \in G$.*

Ţinînd cont de condiţiile din definiţia 3.3.3 putem spune că izotopul $(G,\cdot)$ este generat de omeomorfismele φ,ψ ale grupoidului topologic $(G,+)$ şi-l vom nota cu $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$.

Teorema 3.3.4. *Fie $(G,+)$ un grupoid topologic, $\varphi,\psi : G \to G$ sunt omeomorfisme şi $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$. Atunci:*
1. $(G,+) = \left(G,\cdot,\varphi^{-1},\psi^{-1}\right)$;
2. $(G,\cdot)$ este grupoid topologic;
3. Dacă $(G,+)$ este groupoid cancelativ, atunci şi $(G,\cdot)$ este groupoid cancelativ;
4. Dacă $(G,+)$ este grupoid cu diviziune, atunci şi $(G,\cdot)$ este grupoid cu diviziune;
5. Dacă $(G,+)$ este grupoid topologic primitiv cu diviziuni, atunci şi $(G,\cdot)$ este grupoid topologic primitiv cu diviziuni;
6. Dacă $(G,+)$ este quasigrup topologic, atunci şi $(G,\cdot)$ este quasigrup topologic;
7. Dacă $n, m, p, k \in N$ şi $(G,\cdot)$ este (n,m)-izotop omogen a grupoidului $(G,+)$ şi e este (k,p)-zero în $(G,+)$, atunci e este o (mk, np)-unitate în $(G,\cdot)$.

Fie $(G,\cdot)$ este quasigrup topologic medial. Conform Teoremei Toyoda există o operaţie binară $(+)$ pe G, două elemente $0, c \in G$ şi două automorfisme topologice $\varphi,\psi : (G,+) \to (G,+)$ astfel încât $(G,+)$ este un grup topologic comutativ, 0 este zero în $(G,+)$ şi $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi,0,c)$ este izotop omogen a grupului $(G,+)$. În particular, $\varphi\psi = \psi\varphi$.

G.B. Beleavskaya a demonstrat o generalizare a Teoremei Toyoda. Menţionăm:

Teorema 3.5.1. *Fie $(G,+)$ un quasigrup topologic, $0 \in G, 0+0 = 0, \varphi,\psi$ sunt două automorfisme din $(G,+)$ şi $(G,\cdot) = (G,+,\varphi,\psi)$. Atunci:*
1. $\{0\}$ este un subquasigrup a quasigrupului $(G,+)$ şi $(G,\cdot)$.
2. Dacă $n < +\infty$, atunci 0 este (n,∞)-unitate din $(G,\cdot)$ dacă şi numai dacă $\varphi^n(x) = x$ pentru orice $x \in G$.
3. Dacă $m < +\infty$, atunci 0 este (∞,m)-unitate din $(G,\cdot)$ dacă şi numai dacă $\psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.
4. Dacă $n, m < +\infty$, atunci 0 este (n,m)-unitate din $(G,\cdot)$ dacă şi numai dacă $\varphi^n(x) = \psi^m(x) = x$ pentru orice $x \in G$.

Considerăm pe G o relaţie de echivalenţă α. Notăm cu G/α o totalitate de clase de echivalenţe $\alpha(x)$ şi $\pi_\alpha : G \to G/\alpha$ este o proiecţie naturală. Pe G/α considerăm topologia-factor. Aplicaţia π_α este continue. Dacă α este o congruenţă pe $(G,\cdot)$ (ori pe $(G,+)$), atunci aplicaţia π_α este deschisă.

Relaţia de echivalenţă α pe G se numeşte compactă dacă mulţimile $\alpha(x)$ sunt compacte.

Teorema 3.5.2. *Fie $(G,+)$ un grup topologic comutativ, 0 este zero din $(G,+)$, $c \in G$, φ şi ψ sunt două automorfisme a grupului topologic $(G,+)$ şi $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi,0,c)$. Dacă spaţiul G conţine o submulţime compactă F de caracter numărabil, atunci pentru orice submulţime deschisă U din G care conţine elementul* 0 *există o relaţie de echivalenţă compactă α_U pe G astfel încât:*
1. $\alpha_U(0) \subseteq U$.
2. α_U este congruenţă pe $(G,\cdot)$.
3. α_U este congruenţă pe $(G,+)$.
4. Proiecţia naturală $\pi_U = \pi_{\alpha_U} : G \to G/\alpha_U$ este o aplicaţie perfectă.
5. Spaţiul G/α_U este metrizabil.

Coloralul 3.5.5. *Quasigrupul medial topologic complet în sens Čech este paracompact şi admite un omomorfism perfect deschis pe un quasigrup medial metrizabil.*

Coloralul 3.5.6. *Quasigrupul medial, metrizabil, şi local compact este paracompact şi admite un omomorfism perfect deschis pe un quasigrup medial metrizabil şi local compact.*

Notăm cu $B(X)$ familia tuturor submulţimilor Borel din spaţiul X. Funcţia reală nenegativă μ definită pe familia $B(X)$ se numeşte măsură Radon pe X dacă posedă următoarele proprietăţi:

- $\mu(H) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq H, F$ este submulţime compactă din $H\}$ pentru orice $H \in B(X)$;

- pentru orice punct $x \in X$ există o submulţime deschisă V_x astfel încât $x \in V_x$ şi $\mu(V_x) < \infty$.

Definiţia 3.6.1. *Fie $(A,\cdot)$ un quasigroup topologic cu diviziunile $\{r,l\}$. Măsura Radon μ pe A se numeşte:*

- ***măsura Haar invariantă de stânga,*** *dacă $\mu(U) > 0$ şi $\mu(xH) = \mu(H)$ pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$, punct $x \in A$ şi mulţime Borel $H \in B(A)$;*

- ***măsura Haar invariantă de dreapta,*** *dacă $\mu(U) > 0$ şi $\mu(Hx) = \mu(H)$ pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$, punct $x \in A$ şi mulţime Borel $H \in B(A)$;*

- ***măsura Haar invariantă,*** *dacă $\mu(U) > 0$ şi $\mu(xH) = \mu(Hx) = \mu(l(x,H)) = \mu(r(H,x)) = \mu(H)$ pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \subseteq A$, punct $x \in A$ şi mulţime Borel $H \in B(A)$;*

Definiţia 3.6.2. *Vom spune că pe quasigrupul topologic $(A,\cdot)$* ***există o unică măsură invariantă Haar de stânga (de dreapta),*** *dacă pentru orice două măsuri Haar invariante de stânga (de dreapta) μ_1, μ_2 pe A există o constantă $c > 0$ astfel încât $\mu_2(H) = c \cdot \mu_1(H)$ pentru orice mulţime Borel $H \in B(A)$.*

Dacă $(G,+)$ este grup comutativ local compact, atunci pe G există o unică măsură invariantă Haar μ_G.

Teorema 3.6.3. *Fie $(G,\cdot)$ un quasigrup medial local compact, $(G,+)$ un*

grup topologic comutativ, $\varphi, \psi : G \to G$ două automorfizme din $(G, +), b \in G$ şi $(G, \cdot) = g(G, +, \varphi, \psi, 0, b)$. Pe grupul $(G, +)$ considerăm măsura invariantă Haar μ_G. Atunci:
1. Pe $(G, \cdot)$ măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta) este unică.
2. Dacă μ este măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta) pe $(G, \cdot)$, atunci şi μ este măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta) pe $(G, +)$ too.
3. Pe $(G, \cdot)$ există o măsura Haar invariantă de dreapta dacă şi numai dacă $\mu_G(\varphi(H)) = \mu_G(H)$ pentru orice $H \in B(A)$.
4. Dacă $n < +\infty$, şi pe G există o $(n, +\infty)-$unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsura Haar invariantă de dreapta.
5. Dacă $m < +\infty$, şi pe G există o $(+\infty, m)-$unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsura Haar invariantă de stânga.
6. Dacă $n, m < +\infty$, şi pe G există o $(n, m)-$unitate, atunci pe $(G, \cdot)$ măsura μ_G este unica măsura Haar invariantă.

Teorema 3.6.4. *Fie $(G, +)$ un quasigrup topologic şi $(G, \cdot)$ un (n, m)-izotop omogen a quasigrupului $(G, +)$. Atunci:*
1. Pe $(G, +)$ există măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta) dacă şi numai dacă pe $(G, \cdot)$ există măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta).
2. Dacă pe $(G, +)$ măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta) este unică, atunci şi pe $(G, \cdot)$ măsura Haar invariantă de stânga(de dreapta) este unică.

Teorema 3.6.5. *Pe quasigrupul medial compact G există o unică măsura Haar μ pentru care $\mu(G) = 1$.*

În secţiunile $3.8 - 3.11$ se studiază unele proprietăţi ale (n, m)-izotopilor omogeni, grupoizilor mediali, paramediali şi conexiunea lor cu grupoizii topologici asociativi.

Definiţia 3.9.3. *Quasigrupul topologic $(G, \cdot)$ se numeşte:*
1. omogen, dacă $(G, \cdot)$ este izotop omogen în grupul topologic $(G, +)$.
2. (n, m)-omogen, dacă $(G, \cdot)$ este (n, m)-izotop omogen în grupul topologic $(G, +)$.

Vom nota cu:

- N clasa quasigrupurilor mediale.
- $Q(n, m)$ clasa quasigrupurilor (n, m)-omogene.

Considerăm: $M(n, m) = N \cap Q(n, m)$. Clasa $M(1, 1)$ coincide cu clasa grupurilor topologice abeliene.

Teorema 3.9.5. *Fie $Q(n, m)$ clasa quasigrupurilor (n, m)-omogene. Atunci:*
1. Pentru fiecare $G \in Q(n, m)$ există (n, m)-identitate $e \in G$ cu proprietăţile:
1.1 $e \cdot e = e$;
1.2 $n(e, x) = x$;
1.3 $(x, e)m = x$;
1.4 $ex \cdot e = e \cdot xe$.
2. Dacă $\varphi(x) = ex$ şi $\varphi^n(x) = n(e, x) = x$, atunci $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e, x)$.
3. Dacă $\varphi^{-1}(x) = (n-1)(e, x)$ şi $\varphi^n(x) = n(e, x) = x$, atunci $(n-1)(e, ex) = x$.
4. Dacă $\psi(x) = xe$ şi $\psi^m(x) = (x, e)m = x$, atunci $\psi^{-1}(x) = (x, e)(m-1)$.
5. Dacă $\psi^{-1}(x) = (x, e)(m-1)$ şi $\psi^m(x) = (x, e)m = x$, atunci $(xe, e)(m-1) = x$.

Corolar 3.9.6. *Clasa $Q(n, m)$ a (n, m)-quasigrupurilor omogene formează o varietate de quasigrupuri topologice.*

Corolar 3.9.7. *Clasa $M(n,m)$ de quasigrupi mediale topologice cu (n,m)-unitate*
formează o varietate.

Elementul e se numeşte idempotent dacă $ee = e$, bijectiv dacă aplicaţiile $x \to xe$ şi $x \to ex$ sunt omeomorfisme.

Teorema 3.10.2. *Fie $(G,\cdot)$ un grupoid topologic paramedial şi e, e_1 şi e_2 sunt elemente în G pentru care:*

1. $ee_1 = e_1$ şi $e_2e = e_2$.

2. Aplicaţiile $x \to e_1x$ şi $x \to xe_2$ sunt omeomorfisme a lui G peste el însuşi.

3. Aplicaţia $x \to xe$ este surjectivă.

Dacă există în G operaţia binară $\{\circ\}$ astfel încît $(e_1x) \circ (ye_2) = yx$, atunci $(G,\circ)$ este semigrup topologic comutativ cu e_1e_2 identitate.

Grupoidul topologic $(G,\cdot)$ se numeşte izotop a grupoidului topologic paramedial $(G,\circ)$ dacă există perechea f, g de omomorfisme în $(G,\circ)$ peste el însuşi astfel încît $x \cdot y = f(x) \circ g(y)$, $ff = gg$ pentru orice $x, y \in G$.

Grupoidul topologic $(G,\circ)$ se numeşte radical dacă aplicaţia $s : G \to G$ definită prin $s(x) = x \circ x$ este omeomorfism.

Dacă $(G,\circ)$ este paramedial şi radical atunci s, şi de aici s^{-1}, este antiomomorfism în $(G,\circ)$. Grupoidul topologic $(G,\cdot)$, în care operaţia $\{\cdot\}$ este definită prin $x \cdot y = s^{-1}(x) \circ s^{-1}(y) = s^{-1}(y \circ x)$, este izotop a lui $(G,\circ)$, şi se numeşte izotop radical a lui $(G,\circ)$.

Izotopul radical $(G,\cdot)$ al lui $(G,\circ)$ este idempotent dacă, $x \cdot x = s^{-1}(x \circ x) = s^{-1}(s(x)) = x$ pentru fiecare $x \in G$.

Teorema 3.10.4. *Dacă $(G,\circ)$ este grupoid topologic cu e unitate, $(G,\cdot)$ este grupoid topologic comutativ, idempotent şi $(x \circ y) \cdot (z \circ t) = (ty) \circ (zx)$, atunci $(G,\circ)$ este semigrup radical comutativ.*

Considerăm grupoidul topolgic $(G,+)$. Dacă α este o operaţie binară în G, atunci $\alpha(x) = \{y \in G : x\alpha y\}$ pentru fiecare $x \in G$. Relaţia de echivalenţă α din G se numeşte relaţie de congruenţă în $(G,+)$ dacă din $(x\alpha u)$ şi $(y\alpha v)$ rezultă $(x+y)\alpha\ (u+v)$. Fixăm quasigrupul topologic $(G,+)$ cu (k,p)-zero e. Fie $(G,\cdot) = g(G,+,\varphi,\psi)$ un (n,m)-izotop omogen. Atunci, în baza teoremei 3.3.4., e este (mk,np)-unitate în quasigrupul topologic $(G,\cdot)$.

Definiţia 3.11.1. *Subquasigrupul H a quasigrupului $(G,+)$ se numeşte subquasigrup normal, dacă $e \in H$ şi $H = G(\alpha)$ pentru careva congruenţă α.*

Definiţia 3.11.3. *Subquasigrupurile $(H_1,+)$ şi $(H_2,+)$ ale quasigrupului $(G,+,r,l)$ se numesc conjugate, dacă $H_2 = h(H_1)$ pentru careva automorfism topologic $h : G \to G$.*

Teorema 3.11.4. *Fie H un subquasigrup al quasigrupului topologic $(G,+,r,l)$ şi $e \in H$. Atunci există aşa un subquasigrup Q al quasigrupurilor topologice $(G,+)$ şi $(G,\cdot)$ pentru care:*

1. $e \in Q \subseteq H$.

2. Q este intersecţie unui număr finit de subquasigrupuri conjugate cu H din quasigrupul $(G,+)$.

3. Dacă H este mulţime închisă, atunci şi Q este mulţime închisă.

4. Dacă H este G_δ mulţime, atunci şi Q este G_δ mulţime.

5. Dacă H este mulţime deschisă, atunci şi Q este mulţime deschisă.

6. Dacă H este subquasigrup normal, atunci şi Q este subquasigrup normal cu diviziune în $(G,+)$ şi $(G,\cdot)$.

În secţiunile $3.12-3.15$ s-a demonstrat că, orice n-grupoid topologic A poate fi scufundat în n-groupoidul topologic B cu diviziune. Au fost găsite condiţiile pentru ca omomorfismele continue a grupoizilor topologici cu diviziune continuă să fie deschise.

Definiţia 3.12.1. *Mulţimea nevidă A se numeşte n-grupoid relativ de operaţia n-ară notată cu ω, dacă pentru elementele ordonate $a_1,...,a_n \in A$, există un unic element $\omega(a_1,...,a_n) \in A$ definit.*

n-grupoidul A se numeşte n-grupoid cu diviziune ori nD-grupoid, dacă ecuaţia $\omega(a_1,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n) = b$ are o soluţie (nu necesară unică), pentru orice $a_1,...,a_n,b \in A$ şi fiecare $1 \leq i \leq n$.

Dacă operaţia n-ară ω a n-grupoidului (A,ω) cu topologie este continue, atunci A se numeşte n-grupoid topologic.

n-grupoidul A se numeşte comutativ, dacă $\omega(a_1,...,a_n)$ nu depinde de ordinea elementelor $a_1,...,a_n \in A$.

Teorema 3.12.2. *Orice n-grupoid topologic A poate fi scufundat în nD-grupoidul topologic B astfel încât:*
1. Următoarele proprietăţi sunt invariante: paracompact, secvenţial, numărul lui Suslin, axiomele de separaţie şi proprietatea de a fi spaţiu Lindelöf şi k-spaţiu.
2. Dacă n-grupoidul A este comutativ, atunci şi nD-grupoidul este comutativ.
3. $w(B) = w(A)$, $\chi(B) = \chi(A)$, $d(B) = d(A)$.

Fie $E = E_2 = \{\cdot\}$. Atunci E-algebrele din $V(E)$ se numesc grupoizi. Dacă $\phi = \{ax = b, ya = b\}$, atunci algebrele din $V(E,\phi)$ se numesc grupoizi cu diviziune.

Introducem obiectul liber al mulţimei X în clasa $V(E,\phi)$ conform definiţii date de M. Cioban.

Definiţia 3.13.1. *E-algebra liberă a mulţimei X în clasa $V(E,\phi)$, ori grupoid liber cu diviziune, se numeşte E-algebra $\Gamma(X) \in V(E,\phi)$ dacă:*
1. $X \subset \Gamma(X)$ şi mulţimea X algebric generează E-algebra $\Gamma(X)$, i.e. dacă $X \subset Y \subset \Gamma(X)$, $Y \neq \Gamma(X)$, şi Y este subalgebră a algebrei $\Gamma(X)$, atunci $Y \notin V(E,\phi)$.
2. Pentru orice aplicaţie $f : X \longrightarrow A$, unde $A \in V(E,\phi)$, există un omomorfism $\hat{f} : \Gamma(X) \longrightarrow A$ astfel încât $\hat{f} \mid X = f$.

Teorema 3.13.2. *Grupoidul liber cu diviziune $\Gamma(X)$ este quasigrup.*

Corolarul 3.13.3 *(Bruck R.H.). Orice grupoid cu diviziune este imagine omomorfică a unui quasigrup liber.*

Teorema 3.13.4. *Pentru orice grupoid topologic A există un quasigrup semitopologic B, un subspaţiu $X \subset B$, şi un factor omomorfism $g : B \xrightarrow{\text{pe}} A$ astfel încât:*

1. Aplicaţia $f = g|X : X \to A$ este deschisă şi $f(X) = A$.

2. Spaţiul Hausdorff B este suma unui număr numărabil de subspaţii disjuncte închise.

3. În orice acoperire deschisă a spaţiului B poate fi înscrisă o acoperire deschisă σ - discretă.

4. Dacă A este spaţiu regulat, atunci B este paracompact şi spaţiu perfect normal.

M. Ursul a formulat următoarea problemă:" *Este posibil de reprezentat grupoidul topologic cu diviziune în formă de imagine factor-omomorfică a unui quasigrup semitopologic ?*". Conform Teoremei 3.13.4, răspunsul la problema formulată mai sus este pozitiv.

L.Pontrjagin a demonstrat pentru o clasă largă de grupuri topologice că omomorfismele sunt deschise. Academicianul M.Cioban a generalizat această afirmaţie pentru algebre topologice cu signatura continue. În secţiunea 3.14 au fost găsite condiţiile pentru care omomorfismele continue a grupoizilor topologici cu diviziune sunt deschise.

Dacă operaţia $(G, \cdot)$ este continuă în grupoidul $(G, \cdot)$ cu topologie, atunci $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid topologic. Diviziunea în grupoidul topologic este continuă de dreapta dacă pentru orice elemente $a, b, c \in G$ pentru care $ac = b$ şi orice vecinătate O_c a punctului c, în $(G, \cdot)$ există aşa vecinătăţi O_a şi O_b a punctelor a şi b, astfel încât pentru orice $a^{'} \in O_a$ şi $b^{'} \in O_b$ există $c^{'} \in O_c$, pentru care $a' \cdot c' = b'$. Continuitatea de stânga se defineşte similar. Dacă în grupoidul topologic $(G, \cdot)$ diviziunea este continuă atât de stânga cât şi de dreapta, atunci vom spune că $(G, \cdot)$ este grupoid topologic cu diviziune continuă. Noţiunea de grupoid topologic cu diviziune continuă a fost introdusă de M. Cioban.

Aplicaţia $h : X \to Y$ a spaţiului X pe spaţiul Y se numeşte aproape deschisă dacă $Inth(U) \neq \emptyset$ pentru orice submulţime nevidă şi deschisă U din X.

Aplicaţia $f : A \to B$ a submulţimei A în submulţimea B se numeşte de ordin finit dacă submulţimea $f^{-1}(y)$ este finită pentru orice $y \in B$.

Teorema 3.14.1. *Fie G şi G_1 grupoizi topologici cu diviziune continue. Atunci orice omomorfism continuu aproape deschis $h : G \to G_1$ este deschis.*

Teorema 3.14.3. *Fie G şi G_1 grupoizi topologici cu diviziune continue. Fie G un spaţiu local compact şi Lindelöf, G_1 un spaţiu Baire şi pentru orice $a, b \in G_1$ submulţimea soluţiilor $ax = b$ este finită. Atunci orice omomorfism continuu $g : G \xrightarrow{\text{pe}} G_1$ este deschis.*

În secţiunea 3.15 din acest Capitol s-a demonstrat:

Teorema 3.15.4. *Fie G o buclă medială de stânga cu identitatea $x^2 = e$. Dacă P este o submulţime compactă deschisă astfel încât $e \in P$, atunci P conţine o buclă medială de stânga, compactă şi deschisă Q din G.*

În secţiunea $3.16 - 3.18$ din capitol este soluţionată Problema 12. L.S. Pontrjagin [11] a demonstrat că un spaţiu liniar conex care acoperă un grup topologic admite, în mod natural, o structură de grup topologic. Acest rezultat a fost generalizat pentru algebre topologice universale cu signatură continuă. Rezultatul obţinut acoperă teorema lui Malţev [12] care este justă numai pentru signatura discretă şi finitşi. În felul acesta a fost rezolvată Problemă menţionată mai sus.

Toate spaţiile sunt considerate T_2-spaţii. Fixăm signatura continue E. Menţionăm că dacă J este o mulţime de identităţi atunci totalitatea $V(J)$ de E-algebre topologice Hausdorff, care satisfac identităţile mulţimei J formează o varietate de E-algebre topologice. Spaţiul X se numeşte conex dacă şi numai dacă nu conţine submulţimi proprii simultan deshise şi închise.

Fie $I = [0, 1]$. Spaţiul X se numeşte liniar conex dacă pentru orice două puncte $a, b \in X$ există o aplicaţie continuă $f : I \longrightarrow X$ pentru care $f(0) = a$ şi $f(1) = b$.

Spaţiul X se numeşte simplu conex dacă şi numai dacă este liniar conex şi există aşa aplicaţii continue $p : I \longrightarrow X$ şi $q : I \longrightarrow X$ pentru care $p(0) = q(0)$ şi $p(1) = q(1)$, astfel încât p şi q sunt homotopice relativ de 0 şi 1. Spaţiul X se numeşte local simplu conex dacă fiecare punct $x \in X$ posedă o bază locală de vecinătăţi U care sunt simplu conexe.

Aplicaţia continuă $f : X \to Y$ se numeşte o fibrare local trivială cu spaţiu topologic Z, numit fibră (strat), dacă pentru orice punct $y_0 \in Y$ există aşa o mulţime deschiaă $U \subset Y$, unde $y_0 \in U$, şi omeomorfismul $\varphi : U \times Z \to f^{-1}U$, astfel încât $\varphi(\{y\} \times Z) = f^{-1}(y)$ pentru orice $y \in U$.

Dacă stratul Z este discret şi spaţiile X şi Y sunt liniar conexe şi simplu local conexe, atunci f se numeşte aplicaţie de acoperire.

Aplicaţia de acoperire $f : X \to Y$ a spaţiului simplu liniar conex X pe spaţiul liniar conex Y se numeşte universală dacă spaţiul X este conex.

Dacă aplicactia de acoperire f este universală, atunci spaţiul X se numeşte acoperire universală a spaţiului Y.

Fie V o varietate completă de E-algebre topologice cu signatura continuă pentru care are loc următoarea condiţie:

A. Pentru orice algebră $G \in V$ există aşa un element 1_G, astfel încât $e_{0G}(E \times G^0) \subseteq \{1_G\}$ şi $\omega(1_G, ..., 1_G) = 1_G$ pentru orice $\omega \in E_n$ şi $n \geq 1$.

Considerăm algebra $G \in V$ liniar conexă, local conexă şi local simplu conexă. Se ştie bine că există o acoperire universală $p : G^* \to G$ şi un punct $1^*_G \in G$, astfel încât $p(1^*_G) = 1_G$.

Teorema 3.17.1. *Fie G o E-algebră topologică, $G \in V$. Atunci există pe G^* o structură algebrică astfel încât $G^* \in V$ şi $p : G^* \to G$ este omomorfism.*

4. Submulţimile compacte ale algebrelor libere cu topologii şi echivalenţa spaţiilor

În capitolul respectiv sunt descrise submulţimile compacte ale algebrelor topologice libere şi ale k-algebrelor. Toate spaţiile examinate se consideră Hausdorff. Aplicaţia $f : X \to Y$ a spaţiului X în spaţiu Y se numeşte k-continuă, dacă pentru orice submulţime compactă $\Phi \subseteq X$ restricţia $f|\Phi : \Phi \to Y$ este continuă.

Notăm cu Tyh categoria tuturor spaţiilor complet regulate, cu Reg categoria tuturor spaţiilor regulate, cu Hsd categoria tuturor spaţiilor Hausdorff.

Fie $\mathcal{L}$ o clasă de spaţii şi $(X, \mathcal{T}) \in \mathcal{L}$ un spaţiu X topologic echipat cu topologia $\mathcal{T}$. Definim $k(\mathcal{T}) = \{U \subseteq X : U \cap \Phi$ este deschis în Φ pentru orice submulţime compactă Φ din $X\}$ şi $k_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ este topologia pe X generată de familia tuturor aplicaţiilor k-continui $\{f : X \to Y : Y \in \mathcal{L}$ şi $f(X) = Y\}$. Clar că $\mathcal{T} \subseteq k_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \subseteq k(\mathcal{T})$ şi $k(\mathcal{T}) = k_{Hsd}(\mathcal{T})$. Notăm cu $k_{\mathcal{L}}X$ mulţimea X cu topologia $k_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$.

Dacă $(X, \mathcal{T})$ este spaţiu regulat, atunci notăm $k_\rho(\mathcal{T}) = k_{Reg}(\mathcal{T})$ şi cu $k_\rho X$ ori $k_\rho(X)$ notăm mulţimea X cu topologia $k_\rho(\mathcal{T})$. Dacă $(X, \mathcal{T})$ este spaţiu Hausdorff, atunci cu kX ori $k(X)$ notăm mulţimea X cu topologia $k(\mathcal{T})$. Dacă $(X, \mathcal{T})$ este spaţiu complet regulat, atunci notăm $k_R(\mathcal{T}) = k_{Tyh}(\mathcal{T})$ şi cu $k_R X$ ori $k_R(X)$ notăm mulţimea X cu topologia $k_R(\mathcal{T})$.

Dacă $\mathcal{T}$ este topologie complet regulată pe X, atunci $\mathcal{T} \subseteq k_R(\mathcal{T}) \subseteq k_\rho(\mathcal{T}) \subseteq k(X)$.

Definiţia 4.1.1. *Spaţiu X se numeşte:*

– k-spaţiu dacă $kX = X$;

– *k_ρ-spaţiu dacă X este regulat şi $k_\rho X = X$;*
– *k_R-spaţiu dacă X este complet regulat şi $k_R X = X$.*

Fie *kHsd* categoria tuturor k-spaţiilor, ρReg este categoria tuturor k_ρ-spaţiilor şi $RTyh$ categoria tuturor k_R-spaţiilor. Atunci $k : Hsd \to kHsd$, $k_\rho : Reg \to \rho Reg$ şi $k_R : Tyh \to RTyh$ sunt functori covarianţi.

Fie $\mathcal{L} \in \{Hsd, Reg, Tyh\}$, $\{X_\alpha \in \mathcal{L} : \alpha \in A\}$ o familie de spaţii şi $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Notăm cu $\Pi_\mathcal{L}\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ spaţiul $k_\mathcal{L} X$. În particular, $\Pi_k\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \Pi_{Hsd}\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, $\Pi_\rho\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \Pi_{Reg}\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ şi $\Pi_R\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \Pi_{Tyh}\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Operaţia $\Pi_\mathcal{L}$ este produsul în categoria $\mathcal{L}$.

Spaţiul X se numeşte funcţional Hausdorff ori FH-spaţiu dacă pentru orice două elemente distincte $a, b \in X$ există aşa o funcţie continuă $f : X \to R$ astfel încât $f(a) \neq f(b)$.

Submulţimea H din spaţiul X se numeşte mărginită dacă $f(H)$ este o submulţime mărginită din mulţimea numerelor reale R pentru orice funcţie continuă $f : X \to R$.

Spaţiul X se numeşte μ-complet dacă închiderea $cl_X H$ oricărei submulţime mărginită $H \subseteq X$ este compactă.

Propoziţia 4.1.4. *Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu μ-complet şi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \subseteq k(\mathcal{T})$. Atunci spaţiul $(X, \mathcal{T}')$ este μ-complet.*

Corolarul 4.1.5. *Dacă X este un spaţiu μ-complet, atunci kX este μ-complet.*

Corolarul 4.1.6. *Dacă X este un spaţiu regulat μ-complet, atunci $k_\rho X$ este μ-complet.*

Corolarul 4.1.7. *Dacă X este un spaţiu complet regulat μ-complet, atunci $k_R X$ este μ-complet.*

Definition 4.2.3. *E-algebra G cu o topologie pe G se numeşte k-E-algebră topologică dacă aplicaţiile $e_{nG} : E_n \times G^n \to G$, $n \in N$, sunt k-continue.*

Orice E-algebră topologică este o k-E-algebră. Dacă $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ este o familie de k-E-algebre, atunci $\Pi_k\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, $\Pi_\rho\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ şi $\Pi_R\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ sunt k-E-algebre.

În categoria k-algebrelor considerăm omomorfismele, omomorfismele continui, izomorfismele, izomorfismele continui, izomorfismele topologice.

Propoziţia 4.2.4. *Fie $\mathcal{T}$ o topologie pe E-algebra G. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $(G, \mathcal{T})$ este k-E-algebră.
2. Dacă $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \subseteq k(\mathcal{T})$, atunci $(G, \mathcal{T}')$ este k-E-algebră.
3. Pentru o topologie $\mathcal{T}'$, unde $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \subseteq k(\mathcal{T})$, $(G, \mathcal{T}')$ este o k-E-algebră.

Propoziţia 4.2.5. *Fie E o k_ω-signatură, G o E-algebră, $\mathcal{T}$ o topologie pe G şi $(G, \mathcal{T})$ un k_ω-spaţiu. Atunci G este E-algebră dacă şi numai dacă G este k-E-algebră.*

Fie $i \in \{2, 3, 3.5$. Fixăm signatura continuă $E = \oplus\{E_n : n \in N\}$. Considerăm că E este T_i-spaţiu.

Notăm cu $V_i(E)$ clasa tuturor E-algebrelor topologice care sunt T_i-spaţii şi cu $W_i(E)$ notăm clasa tuturor k-E-algebrelor care sunt T_i-spaţii. Este clar că $V_i(E) \subseteq W_i(E)$.

Dacă V este clasa k-E-algebrelor şi $V \subseteq W_i(E)$, atunci notăm:

– $S(V)$: clasa k-E-algebrelor isomorfic topologic cu subalgebrele din V;

– $\Pi(V)$: clasa produselor topologice Tychonoff ale k-E-algebrelor din V;

– $\Gamma(V)$: clasa imaginilor izomorfe ale k-E-algebrelor din V, adică $G \in \Gamma(V)$ dacă este abstract isomorfă unei algebre din V.

– $\Gamma_i(V) = \Gamma(V) \cap V_i(V)$;

– $\Gamma'_i(V) = \Gamma(V) \cap W_i(V)$.

Definiţia 4.2.12. *Clasa V de k-E-algebre se numeşte:*

– T_i-quasivarietate dacă $V = \Pi(V) = S(V)$ şi $V \subseteq W_i(E)$;

– T_i-quasivarietate completă dacă $V = \Pi(V) = S(V) = \Gamma'_i(V) \subseteq W_i(V)$ şi $\Gamma_i(V') \neq \emptyset$ pentru orice subclasă nevidă $V' \subseteq V$;

– t-completă T_i-quasivarietate dacă $V = \Pi(V) = S(V) = \Gamma_i(V) \subseteq V_i(V)$.

Definiţia 4.2.14. *Fie V o T_i-quasivarietate din k-E-algebre şi X spaţiu nevid.*

(A). Perechea $(F^a(X,V), a_X)$ se numeşte algebră liberă a spaţiului X în clasa V dacă:

A1. $F^a(X,V) \in V$ şi $a_X : X \to F^a(X,V)$ este o aplicaţie.

A2. Submulţimea $a_X(X)$ generează algebric $F^a(X,V)$.

A3. Pentru orice aplicaţie $f : X \to G \in V$ există un omomorfism continuu $a(f) : F^a(X,V) \to G$ astfel încât $f = a_X \circ a(f)$.

(B). Perechea $(F^k(X,V), q_X)$ se numeşte algebră k-liberă a spaţiului X în clasa V dacă:

B1. $(F^k(X,V) \in V$ şi $q_X : X \to F^k(X,V)$ este o aplicaţie k-continuă.

B2. Submulţimea $q_X(X)$ generează algebric $F^k(X,V)$.

B3. Pentru orice aplicaţie k-continuă $f : X \to G \in V$ există un omomorfism continuu $q(f) : F^k(X,V) \to G$ astfel încât $f = q_X \circ q(f)$.

(C). Perechea $(F(X,V), t_X)$ se numeşte algebră t-liberă a spaţiului X în clasa V dacă:

C1. $F(X,V) \in V$ şi $t_X : X \to F(X,V)$ este o aplicaţie continuă.

C2. Submulţimea $t_X(X)$ generează algebric $F(X,V)$.

C3. Pentru orice aplicaţie continuă $f : X \to G \in V$ există un omomorfism continuu $t(f) : F(X,V) \to G$ astfel încât $f = t_X \circ t(f)$.

Teorema 4.2.15. *Fie V o T_i-quasivarietate de k-E-algebre. Atunci pentru orice spaţiu nevid X există:*

– o unică E-algebră liberă $(F^a(X,V), a_X)$;

– o unică E-algebră k-liberă $(F^k(X,V), q_X)$;

– o unică E-algebră t-liberă $(F(X,V), t_X)$;

– un unic omomorfism continuu $b_X : F^a(X,V) \to F^k(X,V)$, $c_X : F^a(X,V) \to F(X,V)$ şi $l_X : F^k(X,V) \to F(X,V)$ astfel încât $q_X = b_X \circ a_X$ şi $t_X = c_X \circ a_X = l_X \circ q_X$.

Definiţia 4.2.17. *Fie V o T_i-qvasivarietate de k-E-algebre. Dacă $b_X : F^a(X,V) \to F^k(X,V)$ este un izomorfism, atunci spunem că algebra $F^k(X,V)$ este algebric liberă în V. Dacă $c_X : F^a(X,V) \to F(X,V)$ este un izomorfism, atunci spunem că algebra $F(X,V)$ este algebric liberă în V.*

Teorema 4.2.20. *Fie $i \in \{2, 3, 3.5\}$ şi V o T_i-quasivarietate completă. Atunci:*

1. Pentru orice spaţiu X complet regulat algebrele $F^k(X,V)$ şi $F(X,V)$ sunt algebric libere în V.

2. Dacă clasa V este netrivială, adica $|G| \geq 2$ pentru o algebră $G \in V$, atunci pentru orice spaţiu X complet regulat aplicaţia $t_X : X \to F(X,V)$ este o scufundare şi $t_X(X)$ o mulţime închisă în $F(X,V)$.

Corolarul 4.2.21. *Fie V o T_i-quasivarietate completă netrivială din k-E-algebre. Atunci pentru orice FH-spaţiu X algebrele $F^k(X,V)$ şi $F(X,V)$ sunt topologic libere în V şi $t_X : X \to F(X,V)$ este injecţie continue.*

Remarca 4.2.22. Dacă E este signatură discretă şi $V = \Pi(V) = S(V) = \Gamma'_i(V) \subseteq W_i(E)$, atunci V este T_i-quasivarietate completă de k-E-algebre.

Această afirmaţie nu este justă pentru cazul când signatura E nu este discretâ.

Fixăm k_ω-signatura E, $i \in \{2, 3, 3.5\}$ şi T_i-quasivarietate V completă netrivială de k-E-algebre. Fie $tV = \{G \in V : G$ este E-algebră topologică$\}$. Atunci tV este T_i-quasivarietate t-completă şi netrivială de E-algebre topologice. Pentru orice spaţiu complet regulat X aplicaţiile $t_X : X \to F(X,V)$ şi $t_X : X \to F(X,tV)$ sunt scufundări. Mai mult ca atât, există un izomorfism continuu $h_X : F(X,V) \to F(X,tV)$ astfel încât $h_X(t_X(x)) = t_X(x)$ pentru orice $x \in X$.

Legăturile dintre k-algebrele libere şi algebrele libere sunt stabilite în următoarele afirmaţii:

Teorema 4.3.1. *Dacă X este un spaţiu complet regular, atunci:*

1. Pentru orice submulţime mărginită B din $F(X,V)$ există o submulţime mărginită L din X, o submulţime compactă H din E şi $n \in N$ astfel încât $B \subseteq a_n(H, i_X(L))$.

2. Pentru orice submulţime mărginită B din $F^k(X,V)$ există o submulţime mărginită L din X, o submulţime compactă H din F şi $n \in N$ astfel încât $B \subseteq a_n(H, k_X(L))$.

3. Dacă X este μ-complet, atunci spaţiile $F(X,V)$, $F^k(X,V)$ sunt μ-complete.

4. Dacă X este μ-complet şi $i = 2$, atunci $F^k(X,V) = k(F(X,V))$.

5. Dacă X este μ-complet şi $i = 3$, atunci $F^k(X,V) = k_\rho(F(X,V))$.

6. Dacă X este μ-complet şi $i = 3\frac{1}{2}$, atunci $F^k(X,V) = k_R(F(X,V))$.

7. Dacă X este k_ω-spaţiu, atunci $F^k(X,V) = F(X,V)$ este k_ω-spaţiu şi E-algebră topologică.

8. Spaţiile $F(X,V)$ şi $F^k(X,V)$ sunt FH-spaţii.

9. Dacă algebra liberă $F(X,V)$ este μ-completă, atunci şi spaţiul X este μ-complet.

Fixăm k_ω-signatura E, $i \in \{2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ şi T_i-quasivarietate V completă netrivială de k-E-algebre. Fie $tV = \{G \in V : G$ este E-algebră topologică$\} = V \cap V_i(E)$.

Definiţia 4.4.1. *Spaţiile X şi Y se numesc: 1. M_V-echivalente dacă algebrele $F(X,V)$ şi $F(Y,V)$ sunt topologic izomorfe. 2. wM_V-echivalente dacă algebrele $F^k(X,V)$ şi $F^k(Y,V)$ sunt topologic izomorfe. 3. tM_V-echivalente dacă algebrele $F(X,tV)$ şi $F(Y,tV)$ sunt topologic izomorfe.*

Definiţia 4.4.2. *Spaţiul X se numeşte V-perfect dacă aplicaţia $q_X : X \to F^k(X,V)$ este o scufundare.*

Teorema 4.4.8. *Fie X şi Y spaţii complet regulate, μ-complete şi V-perfecte. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Spaţiile X şi Y sunt M_V-echivalente.

2. Spaţiile X şi Y sunt tM_V-echivalente.

3. Spaţiile X şi Y sunt wM_V-echivalente.

Corolarul 4.4.9. *Fie X şi Y două k-spaţii, complet regulate şi μ-complete. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Spaţiile X şi Y sunt M_V-echivalente.

2. Spaţiile X şi Y sunt tM_V-echivalente.

3. Spaţiile X şi Y sunt wM_V-echivalente.

Corolarul 4.4.10. *Fie $i \geq 3$ şi X, Y două k_ρ-spaţii, complet regulate şi μ-complete. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Spaţiile X şi Y sunt M_V-echivalente.

2. Spaţiile X şi Y sunt tM_V-echivalente.

3. Spaţiile X şi Y sunt wM_V-echivalente.

Corolarul 4.4.11. *Fie $i = 3\frac{1}{2}$ şi X, Y două k_R-spaţii, complet regulate şi μ-complete. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. Spaţiile X şi Y sunt M_V-echivalente.

2. Spaţiile X şi Y sunt tM_V-echivalente.

3. Spaţiile X şi Y sunt wM_V-echivalente.

Orice spaţiu paracompact este μ-complet. Orice spaţiu normal metacompact este μ-complet.

Remarca 4.4.13. Fie X şi Y spaţii complet regulate, wM_V-echivalente, V-perfecte. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. X este μ-complet.
2. $F^k(X, V)$ este μ-complet.
3. $F(X, V)$ este μ-complet.
4. $F(X, tV)$ este μ-complet.
5. Y este μ-complet.

Fixăm signatura E şi E-algebra topologică G. Notăm cu $C(X, G)$ totalitatea aplicaţiilor continue $f : X \longrightarrow G$ a spaţiului X în G. $C(X, G)$ este o E-algebră. Pentru orice $n \in N$, $x \in X$ şi f_1, ..., $f_n \in C(X, G)$ avem că $\omega(f_1, ..., f_n)(x) = \omega(f_1(x), ..., f_n(x))$.

Aplicaţiile $f, g \in C(X, G)$ se numesc homotopice dacă există aşa o aplicaţie continuă $\varphi : X \times I \longrightarrow G$ unde $\varphi(x, 0) = f(x)$ şi $\varphi(x, 1) = g(x)$ pentru orice $x \in X$. Considerăm pe $C(X, G)$ echivalenţa homotopică $f \overset{h}{\sim} g$.

Teorema 4.6.1. *Dacă G este E-algebră topologică, atunci echivalenţa homotopică $\overset{h}{\sim}$ este o relaţie de congruenţă pe $C(X, G)$.*

Notăm cu $\Gamma(X, G)$ algebra-cât a claselor homotopice în $C(X, G)$. Atunci există un omomorfism surjectiv $h_x : C(X, G) \longrightarrow \Gamma(X, G)$ astfel încât $h_x(f) = h_x(g)$ dacă şi numai dacă $f \overset{h}{\sim} g$.

Teorema 4.6.2. *Fie G o k-E-algebră şi X un k-spaţiu. Atunci $C(X, G)$ este E-algebră şi echivalenţa homotopică $\overset{h}{\sim}$ este o relaţie de congruenţă pe $C(X, G)$.*

Fixăm signatura E. Fie A şi B două k-E-algebre. Notăm cu $Hom(A, B)$ familia omomorfismelor continue $f : A \longrightarrow B$. Conform construcţiei aplicaţiilor respective, $Hom(A, B) \subseteq C(A, B)$. Omomorfismele $f, g \in Hom(A, B)$ se numesc a-homotopice dacă există aşa o aplicaţie continuă $\varphi : A \times I \longrightarrow B$ astfel încât:

– $\varphi(x, 0) = f(x)$ şi $\varphi(x, 1) = g(x)$ pentru orice $x \in A$;

– pentru orice $t \in I$ aplicaţia $\varphi_t : A \longrightarrow B$, unde $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$, este omomorfism continuu.

Dacă $f, g \in Hom(A,B)$ şi f, g sunt a-homotopice, atunci notăm $f \overset{a}{\sim} g$.

Definiţia 4.7.1.*E-algebra G se numeşte algebră cu operaţii permutabile dacă se îndeplinesc următoarele condiţii:*

– dacă $E_0 \neq 0$, atunci $e_{0G}(E_0 \times G^0)$ este o subalgebră din G;

– dacă $u \in E_0$, $n \geq 1$ şi $v \in E_n$, atunci $v(u_G, ..., u_G) = u_G$;

– dacă $n, m \geq 1$, $u \in E_n$ şi $v \in E_m$, atunci $u(v(x_{11}, ..., x_{1m}), ..., v(x_{n1}, ..., x_{nm}) = v(u(x_{11}, ..., x_{n1}), ..., u(x_{1m}, ..., x_{nm}))$ pentru orice $\{x_{ij} : i \leq n, j \leq m\} \subseteq G$.

Dacă G este E-algebră, atunci pentru orice E-algebră A mulţimea G^A este E-algebră ale aplicaţiilor $f : A \longrightarrow G$ şi $hom(A,G)$ este mulţimea tuturor omomorfismelor $g : A \longrightarrow G$.

Propoziţia 4.7.2. *Fie G o E-algebră cu operaţii permutabile. Atunci pentru orice E-algebră A mulţimea $hom(A,G)$ este subalgebră a E-algebrei G^A.*

Deoarece $Hom(A,G) = hom(A,G) \bigcap C(A,G)$, atunci din Propoziţia 4.7.2. obţinem:

Corolarul 4.7.3. *Fie G o k-E-algebră cu operaţii permutabile. Atunci:*

1. Dacă G şi A sunt E-algebre topologice, atunci $Hom(A,G)$ este o subalgebră a E-algebrei $C(A,G)$.

2. Dacă k-E-algebra A este k-spaţiu, atunci $Hom(A,G)$ este o subalgebră a E-algebrei $C(A,G)$.

Presupunem că $Hom(A,B)$ este subalgebră a E-algebrei $C(A,B)$. Atunci echivalenţa a-omotopică este o relaţie de congruenţă pe $Hom(X,G)$.

Fie $\Gamma Hom(A,B)$ mulţimea claselor de echivalenţe a-homotopice pe $Hom(A,B)$ şi $[d_X : Hom(A,B) \longrightarrow \Gamma Hom(A,B)]$ este omomorfism natural, unde $d_X(f) = d_X(g)$ dacă şi numai dacă $f \overset{a}{\sim} g$.

Dacă $f \overset{a}{\sim} g$, atunci $f \overset{h}{\sim} g$. Afirmaţia inversă nu este corectă.

Teorema 4.7.6. *Fie V o T_2-qvasivarietate completă, netrivială de k-E-algebre şi X un k-spaţiu complet regulat. Atunci $X \subseteq F^k(X,V)$ şi pentru orice $G \in V$ există o unică aplicaţie $\pi_X : C(X,G) \longrightarrow Hom(F^k(X,V),G)$ astfel încât $f = \pi_X(f)|X$ pentru orice $f \in C(X,G)$.*

Corolarul 4.7.7. *Fie V o T_2-qvasivarietate completă, netrivială de k-E-algebre şi X un k-spaţiu complet regulat. Dacă $G \in K$ este k-E-algebră cu operaţii permutabile, atunci aplicaţia $\pi_X : C(X,G) \longrightarrow Hom(F^k(X,V),G)$ este izomorfism.*

Teorema 4.7.8. *Fie E o k_ω-signatură, V o T_2-qvasivarietate completă, netrivială de k-E-algebrebe, $G \in V$ şi X un k-spaţiu, complet regulat şi μ-complet. Atunci:*

1. Există o unică aplicaţie bijectivă

$$\varphi_X : \Gamma(X,G) \longrightarrow \Gamma Hom(F^k(X,V),G)$$

astfel încât $d_X \cdot \pi_X = \varphi_X \cdot h_X$.

2. Dacă G este k-E-algebră cu operaţii permutabile, atunci φ_X este un izomorfism.

Corolarul 4.7.9. *Fie E o k_ω-signatură, V o T_2-qvasivarietate completă, netrivială de k-E-algebrebe, $G \in V$ o E-algebră cu operaţii permutabile şi X, Y două k-spaţii, complet regulate şi μ-complete. Atunci:*

1. Dacă spaţiile X, Y sunt M_V-echivalente, atunci E-algebrele $\Gamma(X, G)$, $\Gamma(Y, G)$ sunt izomorfe.

2. Dacă spaţiile X, Y sunt wM_V-echivalente, atunci E-algebrele $\Gamma(X, G)$, $\Gamma(Y, G)$ sunt izomorfe.

3. Dacă spaţiile X, Y sunt tM_V-echivalente, atunci E-algebrele $\Gamma(X, G)$, $\Gamma(Y, G)$ sunt izomorfe.

Fie G un grup comutativ şi pentru orice $n \in N$ notăm cu $K(G, n)$ complexul Eilenberg-MacLane. De exemplu S^1 este un complex Eilenberg-MacLane de tipul $K(Z, 1)$. Grupul coomologic homotopic $H^n(X, G)$ de ordinul n a spaţiului X se defineşte ca un grup de clase homotopice a aplicaţiilor continue a spaţiului X în $K(G, n)$. P. Huber şi J. Milnor au demonstrat că spaţiul $K(G, n)$ poate fi reprezentat ca un grup abelian. Mai mult ca atât, dacă G este grup numerabil, atunci spaţiul $K(G, n)$ poate fi reprezentat ca un grup abelian topologic. Considerăm că $\{K(G, n) : n \in N\}$ sunt k-grupuri comutative. P. Huber şi J. Milnor au stabilit că grupul coomologic homotopic $H^n(X, G)$ de ordinul n a k-spaţiului X poate fi definit ca grupul $\Gamma(X, K(G, n))$ de clase homotopice a aplicaţiilor continue $C(X, K(G, n))$. P. Huber a arătat câ dacâ k-spaţiul X este paracompact, atunci grupul coomologic homotopic $H^n(X, G)$ este izomorfic cu grupul coomologic Čech $\tilde{H}^n(X, G)$. Fixăm T_2-quasivarietatea completă V de k-grupuri şi considerăm că $\{K(G, n) : n \in N\} \subseteq V$. Orice grup abelian este o algebră cu operaţii permutabile. Astfel, din Corolarul 4.7.9 obţinem:

Corolarul 4.8.1. *Fie X, Y două k-spaţii, complet regulate şi μ-complete. Dacă spaţiile X, Y sunt M_V-echivalente, ori wM_V-echivalente, ori tM_V-echivalente, atunci grupurile $H^n(X, G)$, $H^n(Y, G)$ sunt izomorfe.*

Corolarul 4.8.2. *Fie X, Y două k-spaţii paracompacte. Dacă spaţiile X, Y sunt M_V-echivalente, ori wM_V-echivalente, ori tM_V-echivalente, atunci grupurile $\tilde{H}^n(X, G)$, $\tilde{H}^n(Y, G)$ sunt izomorfe.*

Fie V_g o varietate a grupurilor topologice şi V_{ag} varietatea grupurilor topologice comutative. Atunci $F(X) = F(X, V_g)$ este grupul liber al spaţiului X în sens Markov, iar $A(X) = F(X, V_{ag})$ este grupul comutativ liber al spaţiului X în sens Markov. Cazul spaţiilor compacte a fost examinat de B. A. Pasynkov.

Fixăm k_ω-signatura E. Fie T_2-quasivarietatea V completă, nevidă de k-E-algebre şi E-algebra topologică $G \in V$.

Fie X un spaţiu. Pe spaţiul $C(X, G)$ considerăm topologia de convergenţă punctiformă. Dacă $A, B \in V$, atunci considerăm $Hom(A, B)$ ca subspaţiul a spaţiului $C(A, B)$.

Theorem 4.9.1. *Pentru orice spaţiu X există un omeomorfism $\varphi : C(X, G) \to Hom(F(X, V), G)$ astfel încât:*

1. $f = i_X \circ \varphi(f)$ pentru orice $f \in C(X, G)$.

2. Dacă G este E-algebră topologică cu operaţii permutabile, atunci φ este izomorfism topologic a E-algebrei topologice $C(X, G)$ pe $Hom(F(X, V), G)$.

3. Dacă X este k-spaţiu μ-complet şi $f, g \in C(X, G)$, atunci $f \overset{h}{\sim} g$ dacă şi numai dacă $\varphi(f) \overset{a}{\sim} \varphi(g)$.

Corolarul 4.9.2. *Fie X şi Y două k-spaţii μ-complete, iar algebrele $F(X,V)$ şi $F(Y,V)$ sunt topologic izomorfe. Atunci există aşa un omeomorfism $u : C(X,G) \longrightarrow C(Y,G)$ astfel încât:*

1. Dacă $f, g \in C(X,G)$, atunci $f \overset{h}{\sim} g$ dacă şi numai dacă $u(f) \overset{h}{\sim} u(g)$.

2. Dacă G este o algebră cu operaţii permutabile, atunci u este un izomorfism.

Remarca 4.9.3. Afirmaţia 1 din Corolarul 4.9.2 pentru varietăţile V_g, V_{ag} ale grupurilor topologice şi spaţiilor compacte X, Y au fost demonstrate de L. S. Pontrjagin.

5. Rezolubilitatea unor clase speciale de algebre cu topologii

Capitolul respectiv tratează teoria generală de descompunere a grupoizilor topologici cu invertibilitate. Spaţiul X se numeşte rezolubil dacă există două submulţimi dense şi disjuncte. M. Cioban şi L. Chiriac au demonstrat următoarea afirmaţie.

Teoremă. *Fie G un grup infinit de cardinalitatea τ. Atunci există o familie de submulţimi disjuncte $\{B_\mu : \mu \in M\}$ în G astfel încât:*
1. $|M| = |G|$.
2. $G = \cup\{B_\mu : \mu \in M\}$.
3. $(G \setminus B\mu) \cdot K \neq G$ pentru orice $\mu \in M$ şi orice submulţime finită K din G.
4. Submulţimile $\{B_\mu : \mu \in M\}$ sunt dense în orice topologie total mărginită pe G.

Această teoremă este o generalizare ale unor rezultate obţinute de I. Protasov. În capitolul respectiv sunt demonstate teoreme similare pentru o clasă specială de algebre-I_nP_k-n-grupoizi [33].

Notăm cu, $|X|$ cardinalitatea mulţimii $|X|$, $N = 0, 1, 2, ...$, R este spaţiul mumerelor reale. Notăm cu ω_0 primul cardinal infinit. Dacă τ este un cardinal infinit, atunci τ^+ este primul cardinal mai mare ca τ. Fie $\tau \geq 1$ un cardinal. Vom spune că spaţiul X este τ-rezolubil dacă există o familie de submulţimi $\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ disjuncte două câte două, dense în X, astfel încât $|A| = \tau$. Orice spaţiu este 1-rezolubil. Dacă spaţiul X este 2-resolubil, atunci vom spune că X este rezolubil.

Notăm cu a_1^m şirul $a_1, a_2, ..., a_m$. Dacă $a_1 = a_2 = ... = a_m$, atunci notăm şirul respectiv cu a^m. Pentru orice spaţiu X notăm $m(X) = min\{|U| : U \neq \emptyset, U \subseteq X, U \in \tau\}$. Spaţiul X este maximal rezolubil dacă este $m(X)$-rezolubil. Este clar că dacă X este τ-rezolubil atunci $\tau \leq m(X)$. Dacă $m(X) = |X| > 1$ şi X este maximal rezolubil, atunci vom spune că X este super-rezolubil.

Pentru orice $f : X \to X$ notăm $f^{'} = f$ şi $f^{n+1} = f \circ f^n$ pentru orice $n \in N$. Vom considera că $f^0 : X \to X$ este aplicatia identică.

Diverse aspecte ale descompunerilor grupurilor topologice total mărginite au fost cercetate de V.I. Malykhin, W.W. Comfort, S. Van Mill, I.V.Protasov [11] şi M.M. Cioban, L.L. Chiriac [33].

Fixăm signatura discretă $E = \cup\{E_n : n \in N\}$. Perechea (G, ω) se numeşte n-grupoid dacă G este o mulţime nevidă şi $\omega : G^n \to G$ este o aplicaţie.

Definiţia 5.2.1. *Fie $k \leq n$. n-Grupoidul (G, ω) se numeşte:*
1. I_nP_k-n-grupoid dacă există aplicaţiile $r_1, ..., r_{k-1}, r_{k+1}, ..., r_n : G \to G$ astfel încât $\omega(r_1(x_1), ..., r_{k-1}(x_{k-1}), \omega(x_1, ..., x_{k-1}, y, x_{k+1}, ..., x_n), r_{k+1}(x_{k+1}), ..., r_n(x_n)) = y$ ori $\omega(r_1^{k-1}(x_1^{k-1}), \omega(x_1^{k-1}, y, x_{k+1}^n), r_{k+1}^n(x_{k+1}^n)) = y$, pentru orice

$x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n, y \in G$. *Aplicaţia* $r_i(x)$ *se numeşte* k*-involuţie*, $i \in \{1, ..., k-1, k+1, ..., n\}$.
2. I_nP*-n-grupoid în sens larg dacă este* I_nP_k*-n-grupoid pentru orice* $k = \overline{1, n}$. *În acest caz aplicaţia* $r_i(x)$ *se numeşte involuţie,* $i \in \{1, ..., n\}$.
3. I_nP*-n-grupoid, ori* I_nP*-n-grupoid în sens puternic, dacă există aplicaţiile* $\{r_i : G \to G\text{: } i = \overline{1, n}\}$ *astfel încât* $\{r_i : i \leqslant n, i \neq k\}$ *este o familie de* k*-involuţii pentru orice* $k = \overline{1, n}$.
4. I_0P_k*-n-grupoid dacă există aplicaţiile* $r_1, ..., r_{k-1}, r_{k+1}, ..., r_n : G \to G$ *astfel încât*
$\omega(r_1(x), ..., r_{k-1}(x), \omega(x^{k-1}, y, x^{n-k}), r_{k-1}(x), ..., r_n(x)) = y$ *pentru orice* $x, y \in G$.
5. I_0P*-n-grupoid dacă este* I_0P_k*-n-grupoid pentru orice* $k = \overline{1, n}$.

Definiţia 5.2.8. *n-Grupoidul* (G, ω) *se numeşte:*
1. k-cancelativ n-grupoid dacă pentru orice $a, b, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n \in G$ *are loc* $\omega(x_1, ..., x_{k-1}, a, x_{k+1}, ..., x_n) = \omega(x_1, ..., x_{k-1}, b, x_{k+1}, ..., x_n)$ *dacă şi numai dacă* $a = b$.
2. cancelativ n-grupoid dacă este k-cancelativ grupoid pentru orice $k = \overline{1, n}$
3. n-quasigrup dacă ecuaţia $\omega(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^n) = b$ *are o singură soluţie pentru orice* a_i^n, b *şi fiecare* $i = \overline{1, n}$.

Definiţia 5.2.9. *Elementul e din* (G, ω) *se numeşte:*
1. k-identitate a n-grupoidului (G, ω) *dacă* $\omega(e^{k-1}, x, e^{n-k}) = x$ *pentru orice* $x \in G$.
2. identitate a n-grupoidului (G, ω) *dacă* $\omega(e^{i-1}, x, e^{n-i}) = x$ *pentru orice* $x \in G$ *şi fiecare* $i = \overline{1, n}$.
Dacă n-quasigrupul (G, ω) *conţine cel puţin o identitate, atunci* (G, ω) *se numeşte n-buclă.* Proprietăţiile involuţiei sunt descrise în următoarele Propoziţii.

Propoziţia 5.2.10. *Fie* (G, ω) *un* I_nP_1*-n-grupoid şi* $r_2, r_3, ..., r_n : G \to G$ *o 1-involuţie. Atunci:*
1.$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \omega(x_1, r_2^2(x_2), ..., r_n^2(x_n))$ *pentru orice* $x_1^n \in G$.
2.$\omega(\omega(y, r_2(x_2), ..., r_n(x_n)), x_2, ..., x_n) = y$ *pentru orice* $x_2^n, y \in G$.
3. (G, ω) *este 1-cancelativ.*
4. Pentru orice $b, a_2^n \in G$, *ecuaţia* $\omega(y, a_2, ..., a_n) = b$ *are o singurua soluţie.*

Academicianul M.M. Cioban a sesizat justeţea următoarei afirmaţii.

Propoziţia 5.2.12. *Fie* (G, ω) *un* I_nP*-n-grupoid în sens larg şi* $r_i : G \to G, i = \overline{1, n}$, *sunt involuţii pe G. Atunci* $x_i = r_i^{2(n-1)}(x_i)$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$ *şi* $n \geq 2$.

Considerăm topologii arbitrare pe algebre universale. Există o mulţime de tipuri de topologii mărginite. Fixăm $n \geq 2$ şi $k \leq n$. Considerăm aplicaţia $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$. Vom defini şi utiliza topologia mărginită Cioban.

Definiţia 5.3.1. *Fie* (G, ω) *un n-grupoid şi* $L_1, L_2, ..., L_n$ *o familie de submulţimi din G. Atunci:*
1. Mulţimile $L_1, L_2, ..., L_n$ *se numesc* k*-*α*-asociate cu aplicaţia* φ *şi notăm cu* $(L_1, L_2, ..., L_n)\alpha(k)\varphi$ *dacă* $L_i = L_j$ *implică* $\varphi(i) = \varphi(j)$ *şi* $i \neq k$, $j \neq k$.
2. Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ *şi* $(\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_n\})\alpha(k)\varphi$, *atunci notăm* $(x_1, x_2, ..., x_n)\alpha(k)\varphi$.
3. Notăm $\Delta_{\varphi(k)}\omega(L_1, L_2, ..., L_n) = \{\omega(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, ..., x_n \in L_n$ *şi* $(x_1, x_2, ..., x_n)\alpha(k)\varphi\}$.

Definiţia 5.3.3. *Fie $k \leq n$. n-Grupoidul (G, ω) se numeşte $I_\varphi P_k$-n-grupoid dacă există aplicaţiile $r_i : G \to G$, $i \in \{1, ..., k-1, k+1, ..., n\}$ astfel încât $\omega(r_1(x_1), ..., r_{k-1}(x_{k-1}), \omega(x_1, ..., x_{k-1}, y, x_{k+1}, ..., x_n), r_{k+1}(x_{k+1}), ..., r_n(x_n)) = y$ cum numai $(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)\alpha(k)\varphi$ pentru orice $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ...,$ $x_n, y \in G$.*

Vom spune că aplicaţiile $r_i : G \to G$, $i \in \{1, ..., k-1, k+1, ..., n\}$ se numesc k-φ-involuţii.

Dacă $\varphi(i) = \varphi(j)$ pentru orice $i, j \leq n$, atunci $I_\varphi P_k$-n-groupoid este un $I_0 P_k$-n-grupoid.

Definiţia 5.3.4. *Fie (G, ω) un n-grupoid şi λ este un cardinal infinit. Topologia $\mathcal{T}$ pe G se numeşte:*
- λ-k-φ-topologie mărginită dacă pentru orice mulţime nevidă deschisă $U \in \mathcal{T}$ există o submulţime $K \subseteq G$ astfel încât $|K| < \lambda$ şi $\Delta_{\varphi(k)}\omega(K^{k-1}, U, K^{n-k}) = G$.
- a λ-φ-topologie mărginită dacă este λ-k-φ-topologie mărginită pentru orice $k = \overline{1, n}$. Menţionăm că ω_0-k-φ-topologie mărginită se numeşte k-φ-topologie total mărginită. Topologia se numeşte φ-total mărginită dacă este k-φ-topologie total mărginită pentru orice $k = \overline{1, n}$.

Fixăm $n \geq 2$ şi $k \leq n$. Considerăm aplicaţia $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ...n\}$.

Teorema 5.4.2. *Fie G un $I_n P_k$-n-grupoid infinit, $\mathcal{L}$ o familie nevidă de submulţimi nevide din G, $|\mathcal{L}| \leq |G|$ şi pentru orice mulţime A şi aplicaţie $\Psi : A \to \mathcal{L}$ are loc $| \cup\{\Psi(\alpha) : \alpha \in A\} |<| G |$ cum numai $| A |<| G |$. Atunci există o familie $\{B_\mu : \mu \in M\}$ de submulţimi nevide din G astfel încât:*
1. $| M |=| G |$.
2. $B_\mu \cap B_\eta = \varnothing$ pentru orice $\alpha, \beta \in M$ şi $\alpha \neq \beta$.
3. $G = \cup\{B_\mu : \mu \in M\}$.
4. $\omega(K^{k-1}, G \setminus B_\mu, K^{n-k}) \neq G$ pentru orice $\mu \in M$ şi $K \in \mathcal{L}$.
5. $\Delta_{\varphi(k)}\omega(K^{k-1}, G \setminus B_\mu, K^{n-k}) \neq G$ pentru orice $\mu \in M$ şi $K \in \mathcal{L}$.

Corolarul 5.4.4. *Fie G un $I_n P_k$-n-groupoid infinit. Atunci există o familie $\{B_\mu : \mu \in M\}$ de submulţimi nevide din G astfel încât:*
1. $|M| = |G|$.
2. $B_\mu \cap B_\eta = \varnothing$ pentru orice $\mu, \eta \in M$ şi $\mu \neq \eta$.
3. $G = \cup\{B_\mu : \mu \in M\}$.
4. $\omega(K^{k-1}, G \setminus B_\mu, K^{n-k}) \neq G$ pentru orice $\mu \in M$ şi orice submulţime fintă K din G.
5. $\Delta_{\varphi(k)}\omega(K^{k-1}, G \setminus B_\mu, K^{n-k}) \neq G$ pentru orice $\mu \in M$ şi orice submulţime fintă K din G.
6. Submulţimile $\{B_\mu : \mu \in M\}$ sunt dense în orice k-φ-topologie total mărginită pe G.
7. În raport cu orice k-φ-topologie total mărginită G este super-rezolubil.
8. Submulţimile $\{B_\mu : \mu \in M\}$ sunt dense în orice k-topologie total mărginită pe G.
9. În raport cu orice k-topologie total mărginită G este super-rezolubil.

Fixăm $n \geq 2$ şi $k \leq n$. Considerăm aplicaţia $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ...n\}$.

Teorema 5.5.2. *Fie G un $I_n P$-n-groupoid infinit, $\mathcal{L}$ este o familie nevidă de submulţimi nevide din G, $|\mathcal{L}| \leq |G|$ şi pentru orice mulţime A şi aplicaţie $\Psi : A \to \mathcal{L}$ are loc $| \cup\{\Psi(\alpha) : \alpha \in A\} |<| G |$ cum numai $| A |<| G |$. Atunci există o familie $\{B_\mu : \mu \in M\}$ de submulţimi nevide din G astfel încât:*

1. $\mid M \mid = \mid G \mid$.
2. $B_\mu \cap B_\eta = \varnothing$ *pentru orice* $\alpha, \beta \in M$ *şi* $\alpha \neq \beta$.
3. $G = \cup\{B_\mu : \mu \in M\}$.
4. $\bigcup_{k=1}^{n} \omega(K^{k-1}, G \setminus B_\mu, K^{n-k}) \neq G$ *pentru orice* $\mu \in M$ *şi* $K \in \mathcal{L}$
5. $\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_{\varphi(k)}\omega(K^{k-1}, G \setminus B_\mu, K^{n-k}) \neq G$ *pentru orice* $\mu \in M$ *şi* $K \in \mathcal{L}$.

6. Algebre fuzzy

În acest capitol s-a determinat soluţia generală a problemei omomorfismelor pentru algebrele universale fuzzy. S-a studiat categoria grupoizilor fuzzy cu diviziune.

Fixăm laticea completă L. Dacă $B \subseteq L$, atunci cu $\wedge B$ (respectiv, $\vee B$) notăm infimum (respectiv, supremum) din B. Fie $0 = \wedge L$, $1 = \vee L$ şi $0 \neq 1$. Fie A este o mulţime nevidă. Aplicaţia $\mu : A \to L$ se numeşte submulţime L-fuzzy din A. Laticea L^A se numeşte latice a tuturor submulţimilor L-fuzzy din A. Fie $f : A \to B$ aplicaţie a mulţimei A în mulţimea B şi aplicaţia μ este submulţime L-fuzzy din A. Notăm cu $f(\mu)$ imaginea submulţimei μ la aplicaţia f, care este o submulţime L-fuzzy din B, definită astfel $f(\mu)(y) = \vee f^{-1}(y)$, dacă $y \in f(A)$, şi $f(\mu)(y) = 0$, dacă $y \notin f(A)$.

Fie G o E-algebră ori algebră universală de signatura E. Dacă $\omega \in E_0$, atunci elementul $\omega_G = e_{0G}(\{\omega\} \times G^0)$ este o constantă în G. Dacă $n \geq 1$, $\omega \in E_n$ şi $x_1, \ldots, x_n \in G$, atunci notăm $\omega(x_1, \ldots, x_n) = e_{nG}(\omega, x_1, \ldots, x_n)$.

Tripletul (G, e_G, μ) se numeşte *L-fuzzy E-algebră* dacă următoarele condiţii sunt adevărate:

(A) (G, e_G) este E-algebră;

(F) $\mu : G \to L$ este submulţime L-fuzzy din G;

(AF) mulţimea $\{x \in G : \mu(x) \geq l\}$ este vidă ori este E-subalgebră din G pentru orice $l \in L$.

Omomorfismul $f : A \to B$ al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) în L-fuzzy E-algebra (B, e_B, η) se numeşte *fuzzy omomorfism* dacă $\eta(f(x)) \geq \mu(x)$ pentru orice $x \in A$.

Teorema 6.2.1. *Fie $f : A \to B$ un omomorfism al L-fuzzy E-algebrei A pe E-algebra B. Atunci există o unică aplicaţie $\lambda(f, \mu) : B \to L$ astfel încât:*

1. *$(B, e_B, \lambda(f, \mu))$ este L-fuzzy E-algebră.*

2. *Dacă $g : B \to C$ este omomorfism al E-algebrei în L-fuzzy E-algebra (C, e_C, η) şi compoziţia $g \circ f : A \to C$ este fuzzy omomorfism al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) în L-fuzzy E-algebra (C, e_C, η), atunci g este fuzzy omomorfism al $(B, e_B, \lambda(f, \mu))$ în (C, e_C, η).*

3. *$\lambda(f, \mu)(y) \geq f(\mu)(y)$ pentru orice $y \in B$ şi f este fuzzy omomorfism al (A, e_A, μ) pe $(B, e_B, \lambda(f, \mu))$.*

Definiţia 6.2.2. *Fie $f : A \to B$ un fuzzy omomorfism al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) pe L-fuzzy E-algebra (B, e_B, η). Atunci:*

1. *Dacă $\eta = f(\mu)$, atunci f se numeşte factor omomorfism şi (B, e_B, η) se numeşte fuzzy factor-algebră al algebrei (A, e_A, μ).*

2. *Dacă $\eta = \lambda(f, \mu)$, atunci f se numeşte s-factor omomorfism şi (B, e_B, η) se numeşte fuzzy s-factor-algebră al algebrei (A, e_A, μ).*

Orice factor omomorfism este s-factor omomorpfism.

Problema 6.2.3. (problema despre fuzzy omomorfisme). *Fie $f : A \to B$ un omomorfism al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) pe E-algebra B. În ce condiţii $\lambda(f, \mu) = f(\mu)$, adica $(B, e_B, f(\mu))$ este L-fuzzy E-algebră?*

Obiectivul nostru este de-a rezolva Problema 6.2.3. Răspunsul general la problema respectivă este negativ. Problema respectivă a fost soluţionată în cazul omomorfismelor proprii, laticelor distributive şi omomorfismelor dense.

Definiţia 6.3.1. *Omomorfismul $f : A \to B$ al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) în E-algebra B se numeşte omomorfism propriu dacă pentru orice $y \in B$ există un element $x(y) \in f^{-1}(y)$ astfel încât $\mu(x(y)) = f(\mu)(y)$.*

Teorema 6.3.2. *Fie $f : A \to B$ un omomorfism propriu al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) pe E-algebra B. Atunci $f(\mu) = \lambda(f, \mu)$ şi $(B, e_B, f(\mu))$ este L-fuzzy E-algebră.*

Fie τ este cardinal infinit. Laticea completă L se numeşte τ-distributivă dacă $a \wedge (\vee H) = \vee\{a \wedge x : x \in H\}$ pentru orice submulţime nevidă H din L cum numai $|H| < \tau$.

Laticea L se numeşte infinit distributivă dacă este τ-distributivă dacă pentru orice cardinal τ. Dacă ω_0 este primul cardinal infinit, atunci laticea L este distributivă dacă şi numai dacă este ω_0-distributivă.

Teorema 6.4.2. *Fie τ un cardinal infinit, L o latice completă τ-distributivă, $f : A \to B$ un omomorfism al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) pe E-algebra B şi $|f^{-1}(y)| < \tau$ pentru orice $y \in B$. Atunci $f(\mu) = \lambda(f, \mu)$ şi $(B, e_B, f(\mu))$ este L-fuzzy E-algebră.*

În [14, p. 26] C.V. Negoiţă şi D.A. Ralescu au examinat laticea completă cu următoarea proprietate:
(NR) **pentru orice** $H \subseteq L$ **şi orice** $b < \vee H$ **există** $c \in H$ **astfel încât** $b \leq c$.
Orice latice cu proprietatea (NR) este infinit distributivă.

Definiţia 6.5.1. *Omomorfismul $f : A \to B$ al L-fuzzy E-algebrei A pe E-algebra B se numeşte omorfism dens dacă pentru orice $y \in B$ şi orice $t < \vee\mu_A(f^{-1}(y)$ există un element $t(y) \in f^{-1}(y)$ pentru care $t < \mu(t(y))$.*

Teorema 6.5.2. *Fie L o latice completă şi $f : A \to B$ este omomorfism dens al L-fuzzy E-algebrei (A, e_A, μ) pe E-algebra B. Atunci $f(\mu) = \lambda(f, \mu)$.*

Exemplul 6.5.3. Orice omomorfism propriu este şi omomorfism dens.

Fixăm signatura nevidă $E = \cup\{E_n : n \in N\}$. Fie $D \subseteq E$ şi $D_n = D \cap E_n$ pentru orice $n \in N$.

Dacă A este E-algebră, atunci orice E-subalgebră B din A este D-subalgebră.

Fixăm submulţimea L-fuzzy $\theta : E \to L$ din E. Pentru orice $t \in L$ considerăm nivelul submulţimei $E(\theta, t) = \{x \in E : \theta(x) \geq t\}$ din E. Este clar că $E(\theta, 0) = E$ şi $E(\theta, t) \subseteq E(\theta, t')$ dacă $t' \leq t$.

Tripletul (G, e_G, μ) se numeşte (L, θ)-fuzzy E-algebră dacă se îndeplinesc următoarele condiţii:

(A) (G, e_G) este E-algebră;

(F) $\mu : G \to L$ este submulţime L-fuzzy din G;

(AFF) Pentru orice $t \in L$ submulţimea $\{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ este vidă ori este $E(\theta, t)$-subalgebră din G.

Teorema 6.6.1. *Fie (A, e_A) o E-algebră şi $\mu : A \to L$ este aplicaţie. Tripletul (A, e_A, μ) este (L, θ)-fuzzy E-algebră dacă şi numai dacă următoarele afirmaţii* *sunt adevărate:*

(AFF1) *Dacă* $\omega \in E_0$, *atunci* $\mu(\omega_A) \geq \vee\{\theta(\omega) \wedge \mu(x) : x \in A\}$;

(AFF2) *Dacă* $n \geq 1$, $\omega \in E_n$ *şi* $x_1, \ldots, x_n \in A$, *atunci* $\mu(\omega(x_1, \ldots, x_n)) \geq$ $\geq \theta(\omega) \wedge \mu(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu(x_n)$.

Fie L este o latice completă, $0 = inf(L) < sup(L) = 1$ şi pentru orice două elemente diferite $x, y \in L$ are loc $x < y$ ori $x > y$.

Aplicaţia $f : X \to Y$ a mulţimei L-fuzzy (X, μ) în mulţimea L-fuzzy (Y, η) se numeşte aplicaţie fuzzy dacă $\eta(f(x)) \geq \mu(x)$ pentru orice $x \in X$.

Definiţia 6.7.3. *a)E-algebra G este E-grupoid cu diviziune de stânga dacă există operaţiile $A, C, W \in E_2$ pentru care $A(C(y, x), x) = W(C(x, y), x) = y$ pentru orice puncte $x, y \in G$.*

b)E-algebra G este E-grupoid cu diviziune de dreapta dacă există operaţiile $A, B, V \in E_2$ pentru care $A(x, B(x, y)) = V(x, B(y, x)) = y$ pentru orice $x, y \in G$.

c)E-algebra este E-grupoid cu diviziune dacă există operaţiile $A, B, C, V, W \in E_2$ astfel încât $A(x, B(x, y)) = A(C(y, x), x) = V(x, B(y, x)) = W(C(x, y), x) = y$ pentru orice $x, y \in G$.

d)E-algebra G este E-quasigrup dacă există operaţiile $A, B, C \in E_2$ pentru care $A(x, B(x, y)) = B(x, A(x, y)) = A(G(y, x), x) = G(A(y, x), x) = y$.

Orice E-grupoid cu divizine este E-grupoid cu diviziune de stânga şi de dreapta. Dacă G este E-grupoid, atunci G este de asemenea şi E-grupoid cu diviziune şi $V = G, W = B$.

Fie X o submulţime nevidă din E-algebra G. Notăm cu $s_0(X, G) = X$, $s_{n+1}(X, G) = s_n(V, G) \cup \cup\{e_{mG}(E_m \times s_n(X, G)^m) : m \in N\}$ şi $s(X, G) = \cup\{s_n(X, G) : n \in N\}$.

Atunci $s(X, G)$ se numeşte subalgebră din G generată de X.

E-algebra G este finit generată dacă $G = s(Y, G)$ pentru o submulţime finită Y din G.

Fie (G, e_G, μ_G) o L-fuzzy E-algebră. Dacă $G = s(X, G)$, atunci X este baza algebrei G. Notăm cu $l(G, e_G, \mu_G) = inf(\mu_G(x) : x \in X)$.

Definiţia 6.8.1. *Baza a algebrei X din (G, e_G, μ_G) este omogenă, dacă $\mu(x) = l(G, e_G, \mu_G)$ pentru orice $x \in X$.*

Teorema 6.8.5. *Fie (G, e_G, μ_G) un L-fuzzy E-grupoid cu diviziune de stânga ori de dreapta. Atunci:*

1. Dacă $a \in G$ şi $\mu_G(a) = l(G, e_G, \mu_G)$, atunci există o bază omogenă pentru G.

2. Dacă $d \in G$ şi $\mu_G(d) \geq l(G, e_G, \mu_G)$, atunci există o bază X pentru G astfel încât $\mu_G(x) \leq d$ pentru orice $x \in X$.

3. Dacă G este finit generată, atunci există o bază omogenă pentru G.

Corolarul 6.8.8. *Pentru un L-fuzzy guasigrup arbitrar finit generat există o bază omogenă.*

Concluzii şi recomandări

Problema principală rezolvată conform obiectivelor tezei, constă în determinarea influenţei structurilor algebrice asupra proprietăţilor topologice ale algebrelor universale topologice şi aplicarea acestora la studierea proprietăţilor spaţiilor topologice. De această direcţie ţine şi vestita Problmă V a lui Hilbert.

Rezultatele obţinute în lucrare respectivă sunt nemijlocit legate de soluţionarea Problemelor 1-12 formulate mai sus. Rezultatele principale ale lucrării sunt noi. Au fost rezolvate probleme concrete, ori unele aspecte ale problemelor formulate de A.I. Malţev, L.S. Pontrjagin, A.V. Arhangelsk'ii, M.M.Cioban, I.V. Protasov.

Cercetările realizate în această lucrare se referă la obiectivele propuse pentru investigaţie şi permit să formulăm următoarele concluzii:

1. În lucrare au fost elaborate teorii generale, concepte şi metode eficiente de cercetare a diverselor clase de algebre topologice:

- metoda structurilor uniforme;
- metoda algebrelor libere;
- metoda k-algebrelor;
- teoria generală de descompunere a algebrelor;
- conceptul unităţilor multiple;
- metode de cercetare a quasigrupurilor topologice cu unităţi multiple;
- metoda algebrelor universale fuzzy şi omomorfismelor fuzzy.

2. Aplicând metoda structurilor uniforme, s-a reuşit de elaborat o construcţie generală care permite descrierea structurilor topologice a algebrelor libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte. Această construcţie este mai generală şi mai eficientă comparativ cu cele elaborate de A. Arhangelschi, E. Nummela, V. Pestov şi A. Tkacenko folosite pentru examinarea grupurilor topologice libere generate de spaţii compacte şi numărabil compacte. Construcţia propusă permite să studiem şi cazul spaţiilor pseudocompacte şi implementarea acestei metode privind studierea topologiilor pe algebre topologice libere cu signatura continuă.

3. A fost elaborată metoda k-algebrelor topologice care permite să determinăm proprietăţile topologice ce se păstrează la relaţia de M_k-echivalenţă cum ar fi, de exemplu, grupurile omologice, care formează o proprietate fundamentală care ţine de topologia algebrică. Afirmaţiile obţinute generalizează unele din rezultatele demonstrate pentru varietăţi de grupuri topologice şi spaţii compacte de L. S. Pontrjagin, B. A. Pasynkov, V. Valov.

4. A fost elaborată o metodă generală de descompunere a algebrei abstracte într-un număr maximal de submulţimi, care rămân dense în orice topologie mărginită în sensul Cioban. Rezultatele obţinute generalizează unele construcţii propuse de V.I. Malykhin, W.W. Comfort, S. Van Mill, I.V.Protasov şi M.M. Cioban care au examinat diverse aspecte ale descompunerilor grupurilor topologice total mărginite. Afirmaţiile demonstrate sunt juste şi pentru anumite clase de n-quasigrupuri şi n-bucle cu propietăţi de invertibilitate. Aparatul matematic elaborat permite efectuarea cercetărilor pentru diverse clase de grupoizi şi n-grupoizi cu invertibilitate.

5. A fost introdus conceptul de (n, m)-unitate. În cercetările realizate sunt descrise quasigrupurile topologice cu (n, m)-identităţi, care se obţin utilizând izotopiile grupurilor topologice. Astfel de quasigrupuri au fost numite quasigrupuri (n, m)-omogene. În lucrare s-a reuşit extinderea unor afirmaţii fundamentale din clasa grupurilor topologice în clasa quasigrupurilor topologice (n, m)-omogene. Astfel, utilizând noţiunile noi introduse: (n, m)-identitate, (n, m)-izotop omogen, quasigrup (n, m)-omogen, s-a reuşit, de exemplu, să se construiască şi să se demonstreze unicitatea măsurii Haar pe quasigrupuri mediale. Metodologia propusă pentru cercetare poate fi utilizată la investigarea n-quasigrupurilor cu unităţi multiple.

6. A fost introdus conceptul de algebră universală fuzzy şi omomorfisme fuzzy. Cercetările efectuate au condus la determinarea soluţiei generale a problemei omomorfismelor pentru algebrele universale fuzzy şi au fost găste condiţiile pentru care există o bază omogenă pentru L-fuzzy E-grupoizi cu diviziune de stânga ori de dreapta. Menţionăm că rezultatele obţinute generalizează unele din teoremele demonstrate de S. Nanda, Wang-Jin Liu pentru groupoizi, grupuri, module şi inele. Pentru realizarea obiectivului propus s-a introdus noţiunile: L-fuzzy E-algebră, fuzzy omomorfism al L-fuzzy E-algebrelor, fuzzy s-factor omomorfism. Metodele elaborate şi rezultatele obţinute permit studierea ulterioară a diverselor aspecte ale L-fuzzy E-algebrelor.

Rezultatele obţinute, construcţiile şi metodele elaborate pot fi cu succes aplicate:
- la cercetarea obiectelor libere generate de diverse spaţii topologice;
- la examinarea proprietăţilor topologice ale diverselor clase de grupoizi cu unităţi multiple;
- la investigarea structurilor algebrice şi topologice ale diferitor clase de algebre topologice;
- la studierea anumitor clase de automate şi semi-automate;
- la construirea algebrelor topologice libere, cu anumite proprietăţi topologice, în varietăţi complete;
- la studierea proprietăţilor algebrice ale algebrelor universale fuzzy;
- la elaborarea cursurilor opţionale pentru masteranzi şi doctoranzi.

Luând în consideraţie rolul algebrelor topologice universale în algebra abstractă, topologie, algebra topologică, topologie algebrică, analiza armonică, teoria automatelor şi semi-automatelor, algebre fuzzy putem considera că teoria şi conceptele elaborate pot fi aplicate eficient în cercetările din domeniile menţionate mai sus cât şi în alte direcţii de cercetare.

Obiective de perspectivă. În perspectivă:
- se vor studia proprietăţile topologice ale spaţiilor care admit anumite structuri algebrice;
- se vor studia tipurile de topologii care pot fi introduse pe algebre universale şi o transformă în algebră topologică;
- va fi studiat mai profund conceptul de unitate multiplă pentru diverse clase de algebre;
- va fi studiat rolul algebrelor topologice universale în teoria automatelor şi semi-automatelor şi diverse sisteme informaţionale;
- se va elabora un curs opţional pentru masteranzi, doctoranzi în domeniul algebrelor topologice universale.

Bibliografie

1. Birkoff G. *On the structure of abstract algebras.* Proc. Cambr. Phil. Soc. 31, 1935, p.433-454.
2. Marcov A.A. *On free topological groups.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. matem. 9 (1945), p. 3 - 64 (English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962), p. 195 - 272).
3. Milnor J. *On spaces having the homotopy type of a CW-complex.* Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), p. 272 - 280.
4. Boardman J.M., Vogt R.M.*Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Berlin-New York, Springer-Verlag, 1973, 270 p.
5. May J. *Homology operations on ifinite loop spaces*, Proceed. Symp. in Pure Math., 22, AMS, 1971, pp.171-185.
6. Choban M.M. *Universal Topological Algebras.* Editing House of the University of Oradea, 1999, 192 pp.
7. Chiriac L.L. *Topological Algebraic Systems.* Editura Ştiinta, Chisinau, 2009, 204 p.
8. Nummela E.S. *Uniform free topological and Samuel compactifications.* Topology and Appl., 1982, V.13, p.77-83.
9. Pestov V.G. *Some properties of free topological groups.* Vestnik Moskov. Univ.Ser.Mat.Mekh., 1, 1982, p.35-37.
10. Choban M.M., Kiriyak L.L. *The topological quasigroups with multiple identies.* Quasigroups and Related Systems, 9, 2002, p. 19-31.
11. Pontrjagin L.S. *Neprerivnie gruppi.* Moskow, Nauka, 1973
12. Mal'cev A.I. *Algebraic systems.* Akademie-Verlag, Berlin, 1973.
13. Protasov I.V. *Resolvability of τ-bounded groups.* Matematychni Studii, 5, 1995, p. 17-20.
14. Negoita C. V. and Ralescu D. A. *Applications of Fuzzy Sets to System Analisis.* Basel, 1975

Publicaţiile autorului la tema tezei:

15. Kiriyak L.L. *On the topology of free topological algebras with Mal'tev condition and k-spaces.* Izv. Akad. Nauk SSR Moldova, ser.mat. N3, 1990, p.7-13.
16. Kiriyak L.L. *Countably compact sets and the topology of free topological modules.* Abstracts: Proc. Sixth Simposium on the Theory of Rings, Algebras and Modules, [in Russian], L'vov, (1990), p. 69.
17. Kiriyak L.L. *On space of the quasicomponents of the free topological universal algebras.* Algebraiceskie structuri i ih vzaimozveazi. Work Collect. Chisinau, Stiinta, 1990, p.74-77.
18. Kiriyak L.L. *On methods to construct some free universal algebras and to solve equations over them.* Izv. Akad. Nauk SSR Moldova, ser. mat. N3, 1991, p.45-53.

19. Kiriyak L.L. *On one-ary free topological algebras.*. II-th International Conference on Algebra dedicated to the memory of Prof. A. Shirshov, August 20-25, 1991, Barnaul, Program and abstracts, p.57.

20. Kiriyak L.L. *On the topologically free E-algebras.* VI^{th} Tiraspol Syposium on General Topology and its Applications. Chisinau, September 9-14, 1991, p.77.

21. Kiriyak L.L. *On the methods of construction of free primitive bigroupoid with division.* International conference on Group Theory. Timisoara, 1992, p.12-13.

22. Kiriyak L.L. *Homomorphisms of topological groupoids with continuous division.* International Conference on Group Theory, Timisoara, 17-20 September, 1992, p.11-12.

23. Choban M.M., Kiriyak L.L. *Equations on Universal Algebras and their applications in the Groupoids Theory.* Binary and n-ary Quasigroups, Matem. Issled. Shtiinta, (Kishinev), 120, 1991, p.96 - 103. (In Russian).

24. Choban M.M., Kiriyak L.L. *On Fuzzy finitely generated quasigroups.* Fuzzy Sets and Systems, Tiraspol, 1991, p.78-81.

25. Choban M.M., Kiriyak L.L. *Applications of uniform structures to the investigation of free topological algebras.* Sibirskii Matem. J., 33, 5, 1992, p.159-172.

26. Choban M.M., Kiriyak L.L. *Homomorpfisms of Fuzzy Algebras.* The XVI-Ith Congress of Romanian-American Academy of Science and Arts, Chişinău, V2, 1993, p.11.

27. Choban M.M., Kiriyak L.L. *On fuzzy finitely generated groupoids.* II International Conferences of the Balcanic Union For Fuzzy Systems and Artificial Intelegence. Trabzon, Turkey, 1994, p.158-161.

28. Choban M.M., Kiriyak L.L. *The Medial Topological Quasigroups with Multiple Identities.* The 4th Conference on Applied and Indus. Mathematics, Oradea-CAIM, 1995, p.11.

29. Kiriyak L.L. *About topological groupoids with division.* Scripta Scientiarum Mathematicarum, Tomus I- Fasciculus I-Anno MCMXCVII, Chisinau 1997, p.75-81.

30. Kiriyak L.L.,Choban M.M. *About homogeneous isotopies and congruences.* Învaţamîntul universitar din Moldova la 70 ani, Chişinău, vl.3, 2000, p.33.

31. Kiriyak L.L. *On the (n,m)-Homogeneous Quasigroups.* First Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chisinau, August 16-18, 2001, p.86.

32. Choban M.M., Kiriyak L.L. *The homomorphisms of fuzzy algebras.* Analele Universitatii Oradea Fasc . Mat. 8, 2001, p. 131-138.

33. Choban M.M., Kiriyak L.L. *Decomposition of some algebras with topologies and their resokvability.* Buletinul AS a Republicii Moldova, Matematica, 3(37), 2001, p. 27-37.

34. Choban M.M., Kiriyak L.L. *Compact subsets of free algebras with topologies and equivalence of space.* Hadronic Journal, Volume 25, Number 5, USA, October 2002, p. 609-631.

35. Kiriyak L.L. *Resolvability of totally bounded topological n-groupoids.* Seminar on Discrete Geometry (dedicated to the 75^{th} birthday of Professor A.M.Zamorzaev). Communications, Chisinau, August 28-29, 2002, p.44-45.

36. Choban M.M., Kiriyak L.L. *The topological quasigroups with multiple identies.* Quasigroups and Related Systems, 9, 2002, p. 19-31.

37. Kiriyak L.L. *On Topological Quasigroups and Homogeneous Isotopes.* Analele Universitatii din Pitesti, Buletin Stiintific, seria Matematica si Informatica, Nr. 9 , 2003, p.191-196.

38. Kiriyak L.L. *On Topological Primitive Groupoid with Divisions.* Acta Et Commentationes, Analele Universitatii de Stat Tiraspol, Volumul III, Chisinau, 2003, p. 175-179.

39. Kiriyak L.L. *The Homogeneous Isotopes of Topological Quasigroups with Multiple Identies.* International Conferences on Radicals (ICOR-2003), dedicated to the memory of Prof. V. Adrunakievich, August 11-16, 2003, Chisinau, Moldova, Program and abstracts, p.43-45.

40. Choban M.M., Chiriac L.L. *Universal algebras and automata.* Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Chisinau, August 17-19, 2004, p.102-105.

41. Choban M.M., Kiriyak L.L. *Universal Covering Algebras.* Algebraical structure and its conections, Matem. Issled. Shtiinta, (Kishinev), 118, 1990, p.107 - 114. (In Russian).

42. Chiriac L.L. *Algebras, automata and machines.* Abstracts of 12^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, Romania, Pitesti, October 15-17, 2004, p.1.

43. Chiriac L.L. *On the homogeneous quasigroups.* Abstracts of 13^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics, Romania, Pitesti, Abstracts, October 14-16, 2005, p.13.

44. CHIRIAC L.L. *Some properties of homogeneous isotopies of medial topological groupoids.* The 14^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics. Chisinau, August 17-19, 2006, p.117-118.

45. Chiriac L.L. *Some properties of quasigroups with multiple identities.* The 5^{th} Edition of the anual Symposion "Mathematics Applied in Biology an Biophysics". Iasi, June 16-17, 2006, Abstracts, 18-19, p.41-42.

46. Chiriac L.L. *About properties of the topological primitive groupoids.* Materialele seminarului "Profesorul Petre Osmatescu-80", 19 noiembrie 2005, Chisinau: UST 2006, p.51-53.

47. Chiriac L.L., Bobeica N. *Some properties of the homogeneous isotopies.* Acta et Commentationes, Universitatea de Stat Tiraspol, Chişinău, 2006, vol. III, p.107-112.

48. Chiriac L.L. *On some generalization of commutativity in topological groupoids.* 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians June 28 - July 4, Bucharest, Romania, 2007, p.45.

49. Chiriac L.L., Bobeica N. *Paramedial topological groupoids.* 6^{th} Congress of Romanian Mathematicians June 28 - July 4, Bucharest, Romania, 2007, p.25-26.

50. Chiriac L.L. *Bicommutative topological groupoids.* Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics, Chisinau, August 21-23, 2007, p.17.

51. Chiriac L.L., Bobeica N. *On topological groupoids and (n,m)- homogeneous isotopies.* The 16^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics.CAIM 2008 Oradea, October 9-11, 2008, p.28.

52. Chiriac L.L., Bobeica N. *Some properties of the bicommutative topological groupoids.* Math and Informatics. Chisianu, MITRE 1-4 October, 2008, p. 15.

53. Chiriac L.L. *Resolvability of some special algebras with topologies.* Buletinul AS a Republicii Moldova, Matematica, 2(37), 2008, p. 27-37.

54. Chiriac L.L., Bobeica N. *Topological Paramedial Groupoids with Multiple Identies.* The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2008 Constantza, September 17-20, 2008, p.28.

55. Chiriac L.L. *Topological groupoids.*Math and Informatics. Chisianu, MITRE 8-9 October, 2009, p. 8-9.

56. Chiriac L.L., Chiriac L.L. Jr, Bobeica N. *On Topological Groupoids and Multiple Identies.* Buletinul AS a Republicii Moldova, Matematica, 1(39), 2009, p.67-79.

57. Bobeica N., Chiriac L.L. *On Topological AG-groupoids and Paramedial Quasigroups with Multiple Identities.* ROMAI Journal 6, 1 (2010), pag. 5-14.

58. Choban M.M., Chiriac L.L. *General Problems of Topological Algebra.* The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM, Iasi, October 14-18, 2010, p.12.

59. Chiriac L.L. *Topological Algebraic Systems.* Editura Ştiinta, Chisinau, 2009, 204 p.

ADNOTARE

la teza de doctor habilitat **"Sisteme topologico-algebrice şi aplicaţiile lor"**, prezentată de către Liubomir Chiriac pentru obţinerea titlului de doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice la specialitatea 01.01.04 - geometrie şi topologie.

Teza a fost perfectată la Chişinău, Universitatea de Stat Tiraspol, în anul 2011, este scrisă în limba engleză şi constă din întroducere, 6 capitole, concluzii, 210 titluri bibliografice, 200 paginini de text de bază. Rezultatele obţinute sunt publicate în 45 lucrări ştiinţifice.

Cuvinte cheie: algebră topologică universală, varietate, quasigrup topologic, unităţi multiple, izotopi omogeni, spaţiu rezolubil, grupoid medial şi paramedial, algebre fuzzy.

Teza este dedicată cercetării următoarei direcţii: *Influenţa structurilor algebrice asupra proprietăţilor topologice ale algebrelor topologice universale.* În particular, teza este consacrată studierii sistemelor topologico-algebrice şi aplicaţiile lor în diverse domenii.

Scopul şi obiectivele lucrării rezidă în: desăvârşirea metodelor de studiere a topologiilor pe algebre libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte; descrierea submulţimilor compacte ale algebrelor topologice libere şi ale k-algebrelor; elaborarea metodelor de cercetare a quasigrupurilor topologice cu unităţi multiple; construirea teoriei generale a descompunerilor grupoizilor topologici cu proprietăţi de invertibilitate; soluţionarea problemei omomorfismelor pentru algebre fuzzy.

Metodologia cercetărilor ştiinţifice: construcţiile şi metodele de demostraţie se bazează pe aplicarea noţiunilor de algebră topologică, algebră liberă, varietate, quasigrup cu unităţi multiple, spaţiu rezolubil, algebră fuzzy.

Noutatea şi originalitatea: Rezultatele principale sunt noi. Evidenţiem următoarele: au fost elaborate metode de studiere a topologiilor pe algebre libere generate de spaţii pseudocompacte şi numărabil compacte; au fost determinate condiţiile pentru ca omomorfismele continue a grupoizilor topologici cu diviziune continuă să fie deschise; au fost descrise submulţimile compacte ale k-algebrelor libere; au fost stabilite unele proprietăţi topologice care se păstrează la relaţia de M_K-echivalenţă; au fost introduse şi cercetate quasigrupurile cu unităţi multiple; a fost elaborată metoda de construcţie a măsurii Haar pe quasigrupuri mediale; a fost elaborată metoda de descompunere a grupoizilor topologici cu proprietăţi de invertibilitate; a fost construită o acoperire universală pe E-algebre topologice cu signatura continuă; a fost dată soluţia generală a problemei omomorfismelor pentru algebre fuzzy.

Semnificaţia teoretică: Au fost dezvoltate teorii generale, elaborate concepţii, metode şi construcţii noi care au contribuit la realizarea obiectivelor propuse.

Valoarea aplicativă a lucrării: Metodologia aplicată, concepţiile şi metodele elaborate în lucrare au permis soluţionarea unor probleme concrete ori a unor aspecte ale lor formulate de A.I. Malţev, L.S. Pontrjagin, M.M.Cioban.

Aparatul matematic aplicat a condus la rezolvarea unor probleme din diverse domenii ale matematicii moderne care au conexiune cu algebra topologică.

Implementarea: Rezultatele lucrării pot fi implementate în teoria algebrelor topologice, teoria quasigrupurilor topologice, teoria automatelor, teoria algebrelor fuzzy, la elaborarea cursurilor speciale pentru masteranzi şi doctoranzi.

SUMMARY

of the thesis **"Topological algebraic systems and its applications"** presented by Liubomir Chiriac for the competition of Ph. Habilitat Doctor degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.04 - geometry and topology. The thesis was elaborated in Chişinău, Tiraspol State University, in 2011. The thesis is written in English, contains introduction, 6 chapters, conclusions, 210 references, 200 pages of the basic text. The main results of the thesis was published in 45 scientific works.

Keywords: topological universal algebra, variety, topological quasigroup, multiple identities, omogen isotope, resoluble space, medial and paramedial grupoid, fuzzy algebra.

The thesis is dedicated to the study: *The influence of the algebraic structures on the topological properties of the topological universal algebras.* In particular, the topological algebraic systems and its applications in diverse fields is investigated.

The purpose of the work resides in: mastering the studying methods of the topologies on free algebras generated by pseudocompact and countable compact spaces; describing the compact subsets of the free topological algebras and that of k-algebras;elaborating research methods regarding the topological quasigroups with multiple identities; establishing a general theory on the decomposition of the topological groupoids with invertibility properties; solving the homomorphism problem for fuzzy algebras.

Methodology of the research: the constructions and the methods of proofs are based on the notions of topological algebra, free algebra, variety, quasigroup with multiple identities, solvable space, fuzzy algebra.

The scientific innovation is determined by the solving of the following problems: there have been elaborated studying methods of topologies on free algebras generated by pseudocompact and countable compact spaces; there have been determined the conditions for the continuous homomorphisms of the topological groupoids with continuous division to be open; there have been described the compact subsets of the free k-algebras; there have been established some topological properties, which are preserved under the M_K-equivalence relation; there have been introduced and analyzed the quasigroups with multiple identities; there has been elaborated a method of construction of the Haar measure on medial quasigroups; there has been elaborated a method of decomposition of special topological groupoids; there has been constructed a universal covering on topological E-algebras with continuous signature; are given a general solution of the homomorphism problem for fuzzy algebras.

The theoretical value of the work: there have been development of the general theories, elaborated the new concepts, methods and constructions which contributed to achieving goals and objectives of the research. The basic results of the work are new.

The practical value: the methodology applied, the concepts and methods developed in work allowed to find the solution of concrete problems or some aspects of the problems formulated by A.I Mal'cev, L.S. Pontrjagin, M.M Choban. Mathematical tools developed and applied led to solving problems in various areas of modern mathematics.

Implementation: The results from this work can be used in the theory of topological universal algebras, of topological quasigroups, of automata, of fuzzy algebras, and in elaborating optional courses.

АННОТАЦИЯ

диссертации "**Топологических алгебраических систем и их приложение**" представлено Любомиром Кирияком на соискание степени доктора хабилитат физико-математических наук, специальность 01.01.04 - Геометрия и топология. Диссертация была разработано в Кишиневе, в Тираспольском Государственном Университете, в 2011 году. Диссертация написана на английском языке, содержит введение, 6 глав, заключение, 210 упоминаний, 200 страниц основного текста. Полученные результаты опубликованы в 45 научных работ.

Ключевые слова: топологические универсальная алгебра, многообразие, топологические квазигруппы, многократные единицы, однородный изотоп, разложение пространства, медиальный и парамедиальный группоид, нечеткая алгебра.

Диссертация посвящена исследованию: Влияния алгебраических структур на топологических свойствах топологических универсальных алгебр и применение топологических алгебраических структур в исследование свойств топологических пространств. В частности, исследовано топологические и алгебраические системы и их применение в различных областях.

Цель работы: совершенствование методами изучения топологии на свободные алгебры, порожденные псевдокомпактных и счетно-компактных пространств; описание компактных подмножеств свободных топологических алгебр и к-алгебр; разработка методов исследования топологические квазигрупп с многократными единицами; создание общей теории разложении топологических группоидов со свойством обратимости; решении проблемы гомоморфизма нечетких алгебр.

Методология исследования: конструкции и методы доказательства основаны на понятиях топологической алгебры, свободной алгебры, многообразие, квазигруппы с многократными единицами, разложение пространств, нечеткой алгебры.

Научные инноваций определяются по решению следующих проблем: разработаны методы изучения топологии на свободных алгебр, порожденными псевдокомпактных и счетно-компактных пространств; определены условия открытости для непрерывного гомоморфизмах топологических группоидов с непрерывным делением; описаны компактные подмножества свободных к-алгебр; были найдены некоторые топологические свойства, которые сохраняются при М-эквивалентности; введены и изучены квазигрупп с многократными единицами; разработан метод построения меру Хаара на медиальных квазигруппах; разработан метод разложения специальных топологических группоидов; построено универсальные покрытия на топологических Е-алгебр с непрерывными сигнатурой; приведены общие решения проблемы гомоморфизма для нечеткой алгебры.

Теоретическая ценность работы: развиты новые общие теорий, разработаны новые концепций, и методы которые способствуют достижению целей и задач исследования. Основные результаты работы являются новыми.

Практическое значение: применяемой методологии, концепций и методов, разработанных в работе позволили найти решение конкретных проблем или некоторые аспекты проблем, сформулированных А. И. Мальцевым, Л. С. Понтрягиным, М.М Чобаном. Математические средства, разработанные и применяемые привели к решению проблем из различных областях современной математики, связанных с топологической алгеброй.

Применение: результаты этой работы могут быть использованы в теории топологических универсальных алгебр, топологических квазигрупп, теории автоматов, теории нечеткой алгебры, и в разработке факультативных курсов.

Liubomir Chiriac

SISTEME TOPOLOGICO-ALGEBRICE ŞI APLICAŢIILE LOR

01.01.04 – Geometrie şi Topologie

Autoreferat
al tezei de doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice

Aprobat spre tipar: 16.03.2011 Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar ofset. Tirajul 70 ex.
Coli de tipar.: 2.3 Comanda Nr.47

Tipografia U.P.S. "Ion Creangă" Imprimare RISO