

**A 53-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA**  
**Chișinău, 28 februarie 2009**  
**CLASA A XI-A**

PROBLEMA 11.1 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru scrierea egalității  $(a - b\sqrt{c})^n = a_n - b_n\sqrt{c}$ ;
2. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru alcătuirea sistemului  $(a + b\sqrt{c})^n = a_n + b_n\sqrt{c}$ ,  $(a - b\sqrt{c})^n = a_n - b_n\sqrt{c}$ ;
3. Se acordă 1 **punct**:
  - pentru rezolvarea sistemului;
4. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru aflarea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{c}$ .

PROBLEMA 11.2 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:
  - pentru scrierea ecuației sub forma  $d^x - c^x = b^x - a^x$ ;
2. Se acordă 4 **puncte**:
  - pentru aplicarea teoremei lui Lagrange pentru funcția  $f(t) = t^x$  pe fiecare din segmentele  $[a; b]$  și  $[c; d]$ ;
3. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru aflarea soluțiilor  $x = 0$  și  $x = 1$ .

PROBLEMA 11.3 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 4 **puncte**:
  - pentru calculul sumei  $S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{x}{1+k(k+1)x^2} = \operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg} x$ ;
2. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru calculul limitei  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg} x)$ ;
3. Se acordă 1 **punct**:
  - pentru aflarea punctului de discontinuitate.

PROBLEMA 11.4 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru studiul funcției  $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ;
2. Se acordă 2 **puncte**:
  - pentru stabilirea inegalității  $f''(x) < 0$ ;
3. Se acordă 3 **puncte**:
  - pentru aplicarea inegalității Jensen pentru funcții concave și obținerea inegalității din enunț.

PROBLEMA 11.5 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru stabilirea relațiilor  $\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{a}$ ,  $\sin \frac{B}{2} = \frac{r}{b}$ ,  $\sin \frac{C}{2} = \frac{r}{c}$ ;
2. Se acordă 3 **puncte**:  
– pentru obținerea relației  $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1$ ;
3. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru obținerea relației  $r^2 \cdot \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{2r^2}{abc} = 1$ .
4. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru aflarea razei  $r = \sqrt{2}$ ;
3. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru aflarea ariei triunghiului  $S = 12 \text{ cm}^2$ .

PROBLEMA 11.6 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru scrierea  $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ ;
2. Se acordă 2 **puncte**:  
– pentru aflarea coordonatelor punctelor  $M$  și  $N$ , exprimate prin  $\alpha$  și  $\beta$ ;
3. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru exprimarea lui  $\alpha$  și  $\beta$  prin  $x_0$ .
4. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru alcătuirea ecuației tangentei;
5. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru stabilirea relației  $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}$ ;
6. Se acordă 1 **punct**:  
– pentru aflarea lui  $x_0 = 3$  și scrierea ecuației tangentei.

**REMARCĂ:** O rezolvare corectă a unui subiect, care nu se încadrează în baremul de evaluare propus, se apreciază cu 7 puncte.