A 53-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 28 februarie 2009
CLASA A X-A: SOLUŢII

10.1 Să se determine toate numerele naturale n pentru care numărul

$$a = \left[\sqrt{2009}\right] + \left[\sqrt[3]{2009}\right] + \left[\sqrt[4]{2009}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{2009}\right]$$

este un divizor al numărului 2009.

Rezolvare: Dacă $m = [a]$, atunci $m \leq a < m + 1$. Dacă $\left[\sqrt[n]{2009}\right] = 1$, atunci $1 \leq \sqrt[n]{2009} < 2$ sau $1 \leq 2009 < 2^n$. Pentru $n \geq 11$ ultimele estimaţii sunt juste. Analogic se arată că $\left[\sqrt[n]{2009}\right] = 2$ pentru $7 \leq n \leq 10$. Pentru valorile rămase ale lui n primim:

$$\left[\sqrt[6]{2009}\right] = 3, \quad \left[\sqrt[5]{2009}\right] = 4, \quad \left[\sqrt[4]{2009}\right] = 6, \quad \left[\sqrt[3]{2009}\right] = 12, \quad \left[\sqrt{2009}\right] = 44.$$

Astfel $a = 77 + n - 10 = n + 67$. Numărul 2009 are doar doi divizori mai mari decât $67:$ 287 şi 2009. Deci $n + 67 = 287$ sau $n + 67 = 2009$. Obţinem valorile $n = 220$ sau $n = 1942$.

10.2 Fie numerele reale $a, b, c \in (1; +\infty)$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac} - b + ac\right) + \log_b\left(\frac{c^2}{ab} - c + ab\right) + \log_c\left(\frac{a^2}{bc} - a + bc\right) \geq 3.$$

Rezolvare: Cum $a, b, c \in (1; +\infty)$, din $(b - ac)^2 \geq 0$, $(c - ab)^2 \geq 0$ şi $(a - bc)^2 \geq 0$ rezultă

$$\frac{b^2}{ac} - b + ac \geq b, \quad \frac{c^2}{ab} - c + ab \geq c, \quad \frac{a^2}{bc} - a + bc \geq a \quad \text{şi, respectiv}$$

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac} - b + ac\right) \geq \log_a b, \quad \log_b\left(\frac{c^2}{ab} - c + ab\right) \geq \log_b c, \quad \log_c\left(\frac{a^2}{bc} - a + bc\right) \geq \log_c a.$$

Aplicăm inegalitatea mediilor $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ şi obţinem

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac} - b + ac\right) + \log_b\left(\frac{c^2}{ab} - c + ab\right) + \log_c\left(\frac{a^2}{bc} - a + bc\right) \geq$$

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} \geq 3,$$

deoarece $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a}{\lg c} = 1$. Inegalitatea este demonstrată.

10.3 Fie triunghiul ABC cu $|AB| > |AC|$. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$, iar punctul I este centrul cercului înscis în triunghiul ABC astfel încât are loc relaţia $|AI| = |MI|$. Să se demonstreze că punctele A, B, M, I sunt situate pe un acelaşi cerc.

Rezolvare. Fie $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$, r - raza cercului înscris, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$ - semiperimetrul triunghiului ABC. Au loc relaţiile

$$AI^2 = (p - a)^2 + r^2, \quad BI^2 = (p - b)^2 + r^2, \quad CI^2 = (p - c)^2 + r^2.$$

Conform formulei medianei avem

$$MI^2 = \frac{BI^2 + CI^2}{2} - \frac{a^2}{4} = r^2 + \frac{(p-b)^2 + (p-c)^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Egalitatea $AI^2 = MI^2$ implică relaţia $\frac{a^2}{2} = [(p-b)^2 - (p-a)^2] + [(p-c)^2 - (p-a)^2] = a(b+c) - 2bc$. Astfel, $a^2 - 2(b+c)a + 4bc = 0$ sau $(a-2b)(a-2c) = 0$. Dacă $a = 2c$, atunci din $b + c > a$ rezultă $b > c$, care contrazice enunţul. Deci, $a = 2b$. Rezultă că triunghiul ACM este isoscel cu $m(\angle CAM) = m(\angle CMA) = 90° - \frac{C}{2}$, iar $m(\angle IAM) = m(\angle IMA) = 90° - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$. Obţinem că $m(\angle AIM) = 180° - B$ şi patrulaterul $ABMI$ este inscriptibil. Problema este rezolvată.

10.4 Fie triunghiul isoscel ABC cu $|AB| = |AC|$. Punctul M este mijlocul bazei $[BC]$, punctul N este proiecţia ortogonală a punctului M pe dreapta AC, iar punctul P este situat pe segmentul (MC) astfel încât $|MP| = |PC| \cdot \sin^2 C$. Să se demonstreze că dreptele AP şi BN sunt perpendiculare.

Rezolvare. Din $|MP| = |PC| \cdot \sin^2 C$ rezultă că $|MP| : |PC| = |AM|^2 : |AC|^2$. Fie $MN \cap AP = \{E\}$. Aplicăm teorema lui Menelaos triunghiului CMN cu transversala $t = (P - E - A)$. Avem $\frac{|MP|}{|PC|} \cdot \frac{|CA|}{|AN|} \cdot \frac{|NE|}{|ME|} = 1$. Conform teoremei catetei $|AM|^2 = |AN| \cdot |AC|$, fapt care implică egalitatea $|NE| = |ME|$, adică punctul E este mijlocul segmentului $[MN]$. Ducem $BD \perp AC$, $D \in AC$. Segmentul $[MN]$ este linia mijlocie a triunghiului BDC şi are loc asemănarea $\triangle ANM \sim \triangle BDC$. Avem $\frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|MN|}{|DC|} = \frac{2 \cdot |EM|}{2 \cdot |NC|} = \frac{|EM|}{|NC|}$. Din $m(\angle AME) = m(\angle BCN)$ rezultă asemănarea triunghiurilor BNC şi AEM. Astfel $m(\angle NBC) = m(\angle MAE) = m(\angle MBE)$. Deci, patrulaterul $ABME$ este inscriptibil şi $AM \perp BM$. Rezultă $BE \perp AE$, adică dreptele AP şi BN sunt perpendiculare.

10.5 Să se determine cardinalul mulţimii soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{5x^2 - 3x + 3} - 4 \cdot \sqrt{2x^2 + 2x - 1} = 2x - 3.$$

Rezolvare. Cum $5x^2 - 3x + 3 > 0$ pentru orice x real, atunci domeniul valorilor admisibile este definit de inecuaţia $2x^2 + 2x - 1 \geq 0$, adică DVA $= (-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}-1}{2}; +\infty)$.

Fie $x_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Notăm $\sqrt{5x^2 - 3x + 3} = a > 0$, $\sqrt{2x^2 + 2x - 1} = b \geq 0$. Ecuaţia se scrie $a - 4b = 2x - 3$. Avem $5x^2 - 3x + 3 = a^2$, iar $2x^2 + 2x - 1 = b^2$. Atunci $2a^2 - 3b^2 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 = (a-4b)^2$. Obţinem ecuaţia $a^2 + 8ab - 19b^2 = 0$. Cum $a > 0$, rezultă că $b > 0$. Notăm $\frac{a}{b} = t > 0$. Ecuaţia $t^2 + 8t - 19 = 0$ are soluţia pozitivă $t = \sqrt{35} - 4 < 4$. Rezultă $a - 4b < 0$, care implică $x < \frac{3}{2}$. Obţinem ecuaţia

$$5x^2 - 3x + 3 = (51 - 8\sqrt{35})(2x^2 + 2x - 1) \text{ sau } (97 - 16\sqrt{35})x^2 + (105 - 16\sqrt{35})x + 8\sqrt{35} - 54 = 0.$$

Cum $97 - 16\sqrt{35} > 0$, iar $8\sqrt{35} - 54 < 0$, rezultă că ultima ecuaţie are 2 soluţii reale: $x_3 < 0$ şi $x_4 > 0$. Vom demonstra că $x_3 \in (-\infty, x_1]$ şi $x_4 \in [x_2; \frac{3}{2})$.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (51 - 8\sqrt{35})(2x^2 + 2x - 1) - (5x^2 - 3x + 3)$. Cum $5x^2 - 3x + 3 > 0$ pentru orice număr real x, avem

$$f(x_1) = -(5x_1^2 - 3x_1 + 3) < 0, \quad f(x_2) = -(5x_2^2 - 3x_2 + 3) < 0,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{2} \cdot (51 - 8\sqrt{35}) - \frac{39}{4} > \frac{13}{2} \cdot (51 - 8\sqrt{36}) - \frac{39}{4} = \frac{39}{4} > 0.$$

Rezultă că $x_3 < x_1$, iar $x_2 < x_4 < \frac{3}{2}$, adică, ambele numere x_3 şi x_4 sunt soluţii ale ecuaţiei iniţiale. Cardinalul mulţimii soluţiilor reale ale ecuaţiei iniţiale este egal cu 2.

10.6 O mulţime A include 42 de puncte diferite din plan. Se ştie că numărul tuturor triunghiurilor cu vârfuri din mulţimea A este mai mic decât 2009. Să se demonstreze că în mulţimea A există cel puţin 14 puncte coliniare.

Rezolvare. Presupunem contrariul, adică în mulţimea A există cel mult 13 puncte coliniare.

Numărul tuturor tripletelor de puncte din mulţimea A este egal cu C_{42}^3. Considerăm o pereche arbitrară de puncte din A. Din presupunerea făcută rezultă că există cel mult 11 puncte coliniare cu perechea considerată. Deci, numărul tripletelor de puncte coliniare din mulţimea A nu depăşeşte numărul $11 \cdot C_{42}^2$. Atunci numărul tripletelor de puncte necolineare din mulţimea A nu va fi mai mic decât

$$C_{42}^3 - 11 \cdot C_{42} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{6} - 11 \cdot \frac{42 \cdot 41}{2} = 7^2 \cdot 41 = 2009.$$

Am obţinut contradicţie cu enunţul problemei. Deci, în mulţimea A exisă cel puţin 14 puncte coliniare.