

A 53-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 28 februarie 2009
CLASA A X-A: BAREME DE EVALUARE

PROBLEMA 10.1 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru demonstrarea că $\left[\sqrt[n]{2009} \right] = 1$ pentru orice $n \geq 11$, $n \in \mathbb{N}$;
2. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru demonstrarea că $\left[\sqrt[n]{2009} \right] = 2$ pentru orice $7 \leq n \leq 10$; $n \in \mathbb{N}$;
3. Se acordă 2 **puncte**:
 - pentru evaluarea numărului $\left[\sqrt[n]{2009} \right]$ pentru $2 \leq n \leq 6$;
4. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru $a = 77 + n - 10 = n + 67$.
5. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru concluzia că 2009 are doar divizori mai mari ca 67:
6. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru determinarea valorilor $n = 220$ și $n = 1942$.

PROBLEMA 10.2 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 3 **puncte**:
 - pentru demonstrarea relațiilor $\frac{b^2}{ac} - b + ac \geq b$, $\frac{c^2}{ab} - c + ab \geq c$, $\frac{a^2}{bc} - a + bc \geq a$.
2. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru obținerea relațiilor echivalente prin logaritmare;
3. Se acordă 2 **puncte**:
 - pentru aplicarea inegalității mediilor a trei numere;
4. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru deducerea relației $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$;
5. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru obținerea inegalității din enunț.

PROBLEMA 10.3 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru obținerea unor relații pentru AJ^2 , BJ^2 , CJ^2 ;
2. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru obținerea unei relații pentru mediana MJ ;
3. Se acordă 2 **puncte**:
 - pentru deducerea egalității $(a - 2b)(a - 2c) = 0$;
4. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru aplicarea premisei $|AB| > |AC|$ și deducerea $a = 2b$;
5. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru obținerea egalităților $m(\angle IAM) = m(\angle IMA) = \frac{B}{2}$;
6. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru concluziile $m(\angle AIM) = 180^\circ - B$ și patrulaterul $ABMI$ este inscriptibil.

PROBLEMA 10.4 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru demonstrarea egalității $|MP| : |PC| = |AM|^2 : |AC|^2$.
2. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru aplicarea teoremei lui Menelaos pentru $\triangle CMN$;
3. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru deducerea egalității $ME = EN$;
4. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru aplicarea asemănării $\triangle ANM \sim \triangle BDC$;
5. Se acordă 2 **puncte**:
 - pentru demonstrarea faptului că $\triangle BNC \sim \triangle AEM$;
6. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru concluziile patrulaterul $ABME$ este inscriptibil și $AP \perp BN$.

PROBLEMA 10.5 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru determinarea corectă a DVA;
2. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru modalități de obținere a relației $a - 4b = 2x - 3$;
3. Se acordă 2 **puncte**:
 - pentru deducerea egalității $2a^2 - 3b^2 = (a - 4b)^2$;
4. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru obținerea ecuației $t^2 + 8t - 19 = 0$, unde $\frac{a}{b} = t > 0$ și deducerea $t = \sqrt{35} - 4$.
5. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru scrierea ecuației de gradul doi în x și deducerea semnului pozitiv al discriminantului;
6. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru demonstrarea faptului că ambele soluții ale ecuației aparțin DVA.

PROBLEMA 10.6 Punctaj total: 7 puncte

1. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru aplicarea metodei reducerii la absurd;
2. Se acordă 1 **punct**:
 - pentru găsirea numărului total al triunghiurilor (nedeenerate sau deenerate), egal cu C_{42}^3 .
3. Se acordă 3 **puncte**:
 - pentru estimarea numărului maxim de triunghiuri deenerate (triple de puncte coliniare), egal cu $11 \cdot C_{42}^2$;
4. Se acordă 2 **puncte**:
 - pentru estimarea numărului minim de triunghiuri și concluzia finală.

REMARCĂ: O rezolvare corectă a unui subiect, care nu se încadrează în baremul de evaluare propus, se apreciază cu 7 puncte.