A 53-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 28 februarie 2009
CLASA A IX-A: SOLUŢII

9.1 Numerele reale a şi b satisfac relaţia $a+b>2$. Să se demonstreze inegalitatea $(a+1)^2+(b+1)^2>8$.

Rezolvare: Din $a+b>2$ rezultă că $a^2+2ab+b^2>4$. Cum $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geq 0$, prin adunare obţinem că $a^2+b^2>2$. Deoarece $2a+2b>4$, prin adunare parte cu parte obţinem

$$a^2+2a+b^2+2b>6 \quad\Leftrightarrow\quad (a^2+2a+1)+(b^2+2b+1)>8 \Leftrightarrow \quad (a+1)^2+(b+1)^2>8.$$

Inegalitatea este demonstrată.

9.2 Fie $[a]$ partea întreagă a numărului real a. Să se calculeze numărul

$$A=\left[\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt[2010]{\frac{2010}{2009}}\right].$$

Rezolvare: Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}>1$. Prin urmare,

$$B=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt[2010]{\frac{2010}{2009}}>\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2009\text{ ori}}=2009.$$

Vom demonstra că $B<2010$. Prin aplicarea mediilor pentru $n+1$ numere pozitive care nu sunt egale, obţinem

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}=\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1^n}<\frac{1+\frac{1}{n}+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ ori}}}{n+1}=\frac{1+\frac{1}{n}+n}{n+1}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Aplicând ultima estimaţie succesiv pentru $n=1,2,\ldots,2009$ obţinem

$$B<2009+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}\right)=2010-\frac{1}{2010}<2010.$$

Prin urmare, $2009<B<2010$ şi $A=2009$.

9.3 Fie triunghiul echilateral ABC. Punctele M şi K sunt situate în semiplane diferite în raport cu dreapta BC, astfel încât punctul $M\in(AB)$ şi triunghiul MKC este echilateral. Să se demonstreze că dreptele AC şi BK sunt paralele.

Rezolvare. Fie ω cercul circumscris triunghiului MKC. Cum $m(\angle MKC)=m(\angle MBC)=60°$, rezultă că $B\in\omega$. Prin urmare, $m(\angle KBC)=m(\angle KMC)=m(\angle ACB)=60°$. Deoarece unghiurile KBC şi ACB sunt unghiuri alterne interne formate la intersecţia dreptelor BK şi AC cu secanta BC, rezultă că dreptele BK şi AC sunt paralele.

9.4 O latură a unui triunghi arbitrar are lungimea mai mare ca 1. Să se demonstreze că triunghiul dat poate fi tăiat în cel puţin 2 triunghiuri, astfel încât fiecare din ele are o latură de lungime egală cu 1.

Rezolvare. Dacă triunghiul are o latură lungimea căreia este un număr întreg pozitiv, atunci împărţim această latură în segmente de lungime 1 şi unim punctele de diviziune cu vârful opus. Obţinem cel puţin 2 triunghiuri, fiecare având o latură de lungime 1.

Fie triunghiul ABC are $AB > 1$ şi lungimile laturilor lui nu sunt numere întregi pozitive. Dacă $BC > 1$, atnci notăm pe (BC) punctul D, astfel încât lungimea segmentului DC este un număr întreg pozitiv, iar $BD < 1$. Cercul de rază 1 cu centrulîn B taie segmentul AD într-un punct interior E şi triunghiurile BEA şi BDE au latura comună $[BE]$ cu $BE = 1$. Dacă lungimea segmentului DC este un număr întreg pozitiv mai mare ca 1, atunci putem obţine mai multe triunghiuri.

Dacă $BC = 1$, atunci cercul de rază 1 cu centrul în A taie latura AB în punctul F. Obţinem triunghiurile BCF cu $BC = 1$ şi ACF cu $AF = 1$.

Dacă $BC < 1$, atunci cercul de rază 1 cu centrul în B taie latura (AC) într-un punct G astfel încât triunghiurile ABG şi BCG au latura comună $[BG]$ cu $BG = 1$. Problema este rezolvată.

9.5 Fie S mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^{2008} - a \cdot |x| + a^{2009} - a = 0$. Pentru care valori reale ale parametrului a mulţimea S are un singur element?

Rezolvare. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{2008} - a \cdot |x| + a^{2009} - a$. Cum această funcţie este pară, rezultă că, dacă numărul real $a_0 \neq 0$ este un zerou al funcţiei f, atunci şi $-a_0$ este deasemenea un zerou al acestei funcţii, adică $f(a_o) = 0$ şi $f(-a_0) = 0$. Astfel soluţie unică poate fi doar $x = 0$. Punem $x = 0$ în ecuaţie. Obţinem $a^{2009} - a = 0$ sau $a(a^{2008} - 1) = 0$. Prin urmare, $a \in \{-1, 0, 1\}$. Verificăm aceste valori. Dacă $a = -1$, atunci $x^{2008} + |x| = 0$ şi $x = 0$ este soluţie unică. Dacă $a = 0$, atunci $x = 0$ este iarăşi soluţie unică. Pentru $a = 1$ avem $x^{2008} - |x| = 0$ şi $x \in \{-1, 0, 1\}$. Deci $a \in \{-1, 0\}$.

9.6 Numerele reale x_1, x_2, x_3 şi numărul real pozitiv a satisfac simultan egalităţile

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2}), \quad x_1 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{a}{x_3}).$$

Să se afle toate tripletele (x_1, x_2, x_3) care satisfac enunţul.

Rezolvare. Din egalităţile din enunţ obţinem

$$x_2^2 - a = (x_1 - x_2)^2 \geq 0, \quad x_3^2 - a = (x_2 - x_3)^2 \geq 0, \quad x_1^2 - a = (x_3 - x_1)^2 \geq 0.$$

Prin urmare, $|x_i| \geq \sqrt{a}$ pentru orice $i = 1, 2, 3$. Prin adunarea parte cu parte a egalităţilor din enunţ obţinem

$$x_1 + x_2 + x_3 = a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right). \qquad (1)$$

Dacă $x_i > \sqrt{a}$, atunci $x_1 + x_2 + x_3 > 3\sqrt{a}$. Din inegalităţile $0 < \frac{1}{x_1} < \frac{1}{\sqrt{a}}$, $0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{\sqrt{a}}$, $0 < \frac{1}{x_3} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ obţinem $a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) < 3\sqrt{a}$. Avem

$$a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) < 3\sqrt{a} < x_1 + x_2 + x_3.$$

Ultimele relaţii contrazic egalitatea (1).

Dacă $x_i < -\sqrt{a}$, atunci notăm $-x_i = y_i \geq \sqrt{a}$. Cum egalitatea (1) se păstrează, prin aceleaşi raţionamente obţinem iarăşi contradicţie.

Dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x$, atunci $x = \pm\sqrt{a}$. Tripletele $(\sqrt{a}, \sqrt{a}, \sqrt{a})$ şi $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}, -\sqrt{a})$ satisfac enunţul problemei.