A 53-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 28 februarie 2009
CLASA A VIII-A: SOLUŢII

8.1 Să se arate că nu există perechi (m, n) de numere naturale care satisfac ecuaţia $2^m - n^2 = 2009$.

Rezolvare: Ecuaţia se scrie $2^m = n^2 + 2009 \geq 2009$. Rezultă că $m \geq 11$. Cum n este impar, notăm $n = 2k + 1$. Punem în ecuaţie şi obţinem $2^m = 4k^2 + 4k + 2010$. Cum 2^m pentru $m \geq 11$ este divizibil prin 4, iar 2010 nu este divizibil prin 4, obţinem contradicţie. Deci, nu există perechi (m, n) de numere naturale care ar satisface ecuaţa din enunţ.

8.2 Numerele reale a şi b satisfac relaţiile $0 < a + b < a \cdot b$. Să se demonstreze că $a + b > 4$.

Rezolvare: Notăm $s = a + b$ şi $p = ab$. Din enunţ rezultă că $p > s > 0$. Conform relaţiilor lui Viete, numerele a şi b sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 - sx + p = 0$. Prin urmare, discriminantul ecuaţiei date este nenegativ, adică $s^2 - 4p \geq 0$. Cum $ps > s^2$ obţinem $0 \leq s^2 - 4p < sp - 4p = p(s - 4)$. Cum $p > 0$, rezultă că $s > 4$. Deci $a + b > 4$.

8.3 Cercul C_1 de centru O şi cercul C_2 sunt secante în punctele A şi B, astfel încât punctul O aparţine cercului C_2. Dreptele d şi e sunt tangente în A la cercurile C_1 şi,respectiv C_2. Dacă dreapta e taie cercul C_1 în punctul D, să se demonstreze că dreptele BD şi d sunt paralele.

Rezolvare. Unim punctele A, B şi D cu centrul O. Avem $OA = OB = OD$ şi $m(\angle ABO) = m(\angle BAO) = m(\angle DAO) = m(\angle ADO)$, ele având măsura egală cu jumătate din măsura arcului mic OA al cercului C_2. Astfel, $[A0$ este bisectoarea unghiului BAD. Prin urmare, $m(\angle AOD) = m(\angle AOB)$ şi triunghiurile AOD şi AOB sunt congruente conform cazului LUL. Obţinem $AB = AD$, adică triunghiul BAD este isoscel. Atunci dreapta AO este mediatoarea segmentului $[BD]$. Astfel, $AO \perp d$ şi $AO \perp BD$, de unde rezultă că dreptele BD şi d sunt paralele.

8.4 Să se demonstreze că un triunghi dreptunghic are un unghi cu măsura egală cu 30° dacă şi numai dacă centrul cercului înscris în acest triunghi este situat pe mediatoarea medianei duse din vârful unghiului drept al triunghiului.

Rezolvare. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90°$, punctul M - mijlocul ipotenuzei $[BC]$, iar I - centrul cercului înscris în triunghi, iar E şi F proiecţiile ortogonale ale centrului I pe cateta $[AB]$ şi ipotenuza $[BC]$.

Fie I aparţine mediatoarei segmentului $[AM]$. Atunci $AI = MI$. Punctele A, I, M nu sunt coliniare, deoarece I nu poate înjumătăţi o bisectoare. Atunci triunghiurile AEI şi MFI sunt congruente şi $MF = AE$. Dacă $AC > AB$, atunci $AB = AE + EB = BF + MF = BM = BC/2$. Deci, triunghiul BAM este echilateral į $m(\angle C) = 30°$. Dacă $AB > AC$, atunci analogic se demonstrează că triunghiul CAM este echilateral şi $m(\angle B) = 30°$.

Fie triunghiul ABC are un unghi cu măsura de 30°, fie $m(\angle C) = 30°$. Atunci triunghiul MAB este echilateral, iar $BE = BF$. Rezultă că $AE = FM$ şi triunghiurile AEI şi MFI sunt congruente. Prin urmare, $AI = MI$ şi punctul I aparţine mediatoarei medianei $[AM]$. Problema este rezolvată.

8.5 Din şirul tuturor numerelor naturale de la 1 până la la 2009 inclusiv se exclud toţi multiplii lui 5. Să se afle ultima cifră a produsului numerelor rămase.

Rezolvare. Multiplii lui 5 au ultima cifră egală cu 0 sau 5. După excluderea lor aranjăm numerele rămase în ordine crescătoare. Cele 1608 numere rămase pot fi împărţite în 201 grupe şi numerele din fiecare grupă au următoarele cifre ale unităţilor: $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$. Uşor se verifică că produsul numerelor din fiecare grupă are cifra unităţilor egală cu 6. Prin urmare, cifra unităţilor a produsului din enunţ este, la fel, egală cu 6.

8.6 Să se demonstreze că există un număr natural, scris în baza 10, cu cifre nenule identice şi divizibil cu 2009.

Rezolvare. Fie $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi cercetăm 2010 numere de forma

$$a_1 = b,\ a_2 = \overline{bb},\ a_3 = \overline{bbb},\ \ldots, a_{2009} = \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{2009 \text{ ori}},\ a_{2010} = \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{2010 \text{ ori}},$$

adică fiecare număr a_n conţine exact n cifre egale cu b pentru orice număr natural n , $1 \leq n \leq 2010$. La împărţirea prin 2009 există doar 2009 resturi diferite. Conform principiului lui Dirichlet printre cele 2010 numere există cel puţin 2 numere care dau acelaşi rest la împărţirea prin 2009. Fie ele numerele a_m şi a_k, unde numerele naturale k şi m satisfac relaţiile $1 \leq m < k \leq 2010$. Avem $a_k = 2009 \cdot p + r$ şi $a_k = 2009 \cdot q + r$, unde numerele naturale p şi q satisfac relaţia $p > q$. Pentru diferenţa $a_k - a_m$ obţinem

$$a_k - a_m = 2009 \cdot (p - q) = \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{k \text{ ori}} - \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{m \text{ ori}} = \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{k-m \text{ ori}} \cdot 10^m,$$

adică $a_k - a_m = 10^m \cdot a_{k-m}$, unde a_{k-m} este un număr din cele cercetate. Deoarece 2009 şi 10^m sunt numere naturale relativ prime, rezultă că numărul a_{k-m}, care are $k - m$ cifre de b, este divizibil la 2009. Problema este rezolvată.