A 53-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chişinău, 28 februarie 2009
CLASA A VII-A: SOLUŢII

7.1 Fie date 10 numere naturale consecutive. Dacă eliminăm unul dintre aceste numere, atunci suma numerelor rămase este egală cu 2009. Să se afle aceste 10 numere.

Rezolvare: Fie x numărul cel mai mic, iar $x+y$ $(0 \leq y \leq 9)$ numărul care a fost şters. Atunci

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+(x+8)+(x+9)-(x+y)=2009.$$

Obţinem $9x = 1964 + y$. Cum $1964 = 9 \cdot 218 + 2$, rezultă că $y = 7$ şi $x = 1971 : 9 = 219$. Deci, numerele $219, 220, \ldots, 227, 228$ satisfac enunţul problemei.

7.2 Să se demonstreze că suma cifrelor pătratului oricărui număr natural nu poate fi egală cu 2009.

Rezolvare: Orice număr natural poate fi reprezentat în una din următoarele trei forme: $3k$, $3k+1$ sau $3k+2$, unde $k \in \mathbb{N}$. Atunci

$$(3k)^2 = 9k^2,\ (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1,\ (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1.$$

Prin urmare, pătratul oricărui număr natural, ca şi suma cifrelor lui, se divide la 3 sau restul împărţirii lui la 3 este egal cu 1.

Restul împărţirii numărului 2009 la 3 este egal cu 2. Deci, nu există număr natural cu suma cifrelor pătratului său egală cu 2009.

7.3 Pe dreapta AB sunt situate 2009 puncte diferite care nu aparţin segmentului $[AB]$. Să se demonstreze că suma distanţelor de la punctul A la aceste puncte nu este egală cu suma distanţelor de la punctul B la aceste puncte.

Rezolvare. Fie punctele $X_1, X_2, \ldots, X_{2009}$ nu aparţin segmentului $[AB]$. Notăm

$$S_1 = AX_1 + AX_2 + \ldots + AX_{2009}, \quad S_2 = BX_1 + BX_2 + \ldots + BX_{2009}.$$

Atunci

$$S_1 - S_2 = (AX_1 - BX_1) + (AX_2 - BX_2) + \ldots + (AX_{2009} - BX_{2009}).$$

Dacă $B \in (AX_i$, atunci $AX_i - BX_i = AB$. Dacă $A \in (X_iB$, atunci $BX_i - AX_i = AB$ sau $AX_i - BX_i = -AB$, unde $i = 1, 2, \ldots, 2009$. Astfel suma $S_1 - S_2 = \pm AB \pm AB \pm \ldots \pm AB \neq 0$, deoarece numărul termenilor este egal cu 2009. Prin urmare, $S_1 \neq S_2$.

7.4 Triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm şi $m(\angle C) = 15°$ este dreptunghic în B. Punctul $D \in (AC)$ este piciorul înălţimii duse din B. Să se afle distanţa de la punctul D până la dreapta AB.

Rezolvare. Fie D_1 proiecţia ortogonală a punctului D pe dreapta AB. Distanţa punctului D până la dreapta AB este egală cu lungimea segmentului DD_1. Dacă $[BM]$, $M \in (AC)$, este mediana dusă din vârful ungiului drept al triunghiului, atunci $AM = BM = CM = AC/2$. Triunghiul BMC este isoscel cu $m(\angle MBC) = m(\angle BCM) = 15°$. Rezultă că $m(\angle BMD) = 30°$. În triunghiul dreptunghic BMD cateta $[BD]$ este opusă unghiului de $30°$. Prin urmare, $BD = BM/2 = AC/4$. Deci, lungimea înălţimii duse la ipotenuză unui triunghi dreptunghic cu un unghi de $15°$ este egală cu un sfert din lungimea ipotenuzei. Cum $m(\angle BAD) = 75°$, rezultă că $m(\angle ABD) = 15°$ şi $DD_1 = AB/4$. Obţinem că $DD_1 = 2,5$ cm.

7.5 Să se determine toate perechile (x, y) de numere naturale care satisfac egalitatea $7^{x+y} = 8 \cdot 7^x + 2009$.

Rezolvare. Egalitatea din enunţ se scie $7^x(7^y - 8) = 7^2 \cdot 41$ sau $7^{x-2}(7^y - 8) = 41$. Cum 7 şi 41 sunt numere relativ prime, atunci $x \leq 2$. Dacă $x < 2$, atunci $7^y - 8$ ar fi divizibil cu 7, ceea ce este fals. Prin urmare, univoc $x = 2$ şi $7^y - 8 = 41$, de unde $y = 2$. Astfel, $(2, 2)$ este unica pereche de numere naturale care satisface egalitatea din enunţ.

7.6 Fie $p > 2$, $p \neq 5$ un număr prim. Să se arate că numărul $p^{4n} - 1$ este divizibil cu 10 pentru orice număr natural n.

Rezolvare. Orice număr prim mai mare decât 2 şi diferit de 5 este număr impar şi are cifra unităţilor element al mulţimii $\{1, 3, 7, 9\}$. Pătratul lui are cifra unităţilor element al mulţimii $\{1, 9\}$, iar puterea a patra a numărului prim p are cifra unităţilor egală cu 1. Astfel

$$p^{4n} - 1 = \left(p^4\right)^n - 1 = \left(\overline{\ldots 1}\right)^n - 1 = \overline{\ldots 1} - 1 = \overline{\ldots 0}.$$

Prin urmare, $p^{4n} - 1$ este divizibil cu 10 pentru orice număr natural n.