

Universitatea Academiei de Științe a Moldovei

S. Corsac, A. Corlat

TEORIA MULȚIMILOR

Chișinău – 2011

CAPITOLUL 1

MULȚIMI

1. Noțiunea de mulțime

Conform definiției creatorului teoriei mulțimilor, Georg Cantor (1845-1918), mulțimea este "o colecție de obiecte bine determinate, distincte ale intuiției sau gândirii noastre, considerate ca un tot".

Observație 1.1.1.

1) Definiția adusă mai sus nu este strictă, deoarece noțiunea de "mulțime" se definește prin noțiunea de "colecție", sensul exact al căreia nu este determinat. În genere, orice altă "definiție" a mulțimii ar conduce la definiția ei prin ea însăși – printr-un sinonim. Este o situație naturală – noțiunea de mulțime este o noțiune primară, la fel cum punctul, dreapta sau planul în geometrie.

În teoriile axiomatice stricte, noțiunea de "mulțime" se definește indirect, prin proprietățile ce le verifică.

Punctul de vedere pe care îl vom adopta în lucrarea de față constituie "teoria naivă" a mulțimilor, vom evita construcții axiomatice stricte. Așa o abordare va înlesni înțelegerea, iar afirmațiile ce se vor obține în așa mod pot fi demonstrate și din punct de vedere al teoriilor axiomatice formale.

2) O mulțime de obiecte se consideră ca un singur obiect.

3) Nu se impune nici o restricție asupra elementelor mulțimii, adică asupra obiectelor ce alcătuiesc mulțimea. Obiectele au doar calitatea de a aparține sau ba mulțimii.

4) Nu importă ordinea în care elementele intră în mulțime.

5) Pentru a defini o mulțime, este necesar de a defini elementele ce intră în această mulțime.

În continuare, de regulă, vom nota mulțimile cu litere mari: A, B, C, \dots, X, Y, Z (pot fi utilizate alfabet diverse sau simboluri grafice etc), iar elementele mulțimii cu litere mici: a, b, c, \dots, x, y, z .

Dacă obiectul a aparține mulțimii A , adică a este un element al mulțimii A , vom scrie $a \in A$. Dacă obiectul a nu se găsește în mulțimea A , vom scrie $a \notin A$. Simbolurile \in , \notin se numesc apartenență, respectiv neapartenență.

Exemple de mulțimi.

1. Mulțimea cifrelor sistemului zecimal de numerație

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

2. Mulțimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3. Mulțimea numerelor naturale pozitive

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

4. Mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

5. Mulțimea numerelor raționale

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

6. Mulțimea numerelor reale. Aceasta mulțime se notează prin \mathbb{R} și se definește strict în cursul de analiză matematică. Elementele acestei mulțimi sunt toate numerele raționale și iraționale (adică numerele ce nu pot fi reprezentate ca raportul dintre un număr întreg și un număr natural pozitiv). Exemple de numere reale:

$$-3, \frac{5}{7}, 17, 3\frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sin 1, e, \pi, \ln 5.$$

7. Mulțimea numerelor complexe

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}, \quad \text{unde } i^2 = -1.$$

8. Mulțimea

$$S = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}, x^3 + y^3 + z^3 = 30\}.$$

9. Mulțimea tuturor fulgilor de zăpadă din anul trecut.

10. Mulțimea tuturor cuvintelor din aceasta lucrare.

11. Mulțimea triunghiurilor din plan.

2. Moduri de definire a mulțimilor

O mulțime se consideră definită, dacă există un criteriu, după care deosebim elementele mulțimii de celelalte obiecte ce nu fac parte din mulțime. În acest sens, o mulțime poate fi definită

- 1) enumerând elementele mulțimii;
- 2) prin specificarea unei proprietăți caracteristice P ale elementelor sale.

O mulțime determinată prin enumerarea elementelor sale se notează scriind între acolade elementele sale, separate prin virgule (a se vedea exemplul 1 §1). Mulțimile definite prin specificarea proprietății P se vor nota prin

$$A = \{ x \mid P(x) \},$$

adică mulțimea acelor obiecte x , pentru care are loc $P(x)$ (a se vedea exemplul 3 §1).

Definiție 1.2.1. (*Relația de egalitate*)

Două mulțimi se numesc egale dacă și numai dacă ele sunt formate din aceleași elemente.

Când două mulțimi A și B sunt egale, vom scrie $A = B$, în caz contrar $A \neq B$.

Exemple.

1. $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 3, 2, 1 \}$, $C = \{ 3, 3, 1, 2, 1 \}$, $D = \{ 1, 2 \}$,

$A = B$, $A = C$, $B = C$, $A \neq D$.

2. $A = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 = 4 \}$, $B = \{ -2, 2 \}$, $A = B$.

3. $A = \{ \sin x \mid x \in \mathbb{R} \}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1 \}$, $A = B$.

4. $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2 \}$, $A \neq B$.

3. Relația de incluziune a mulțimilor

Definiție 1.3.1. *Fie A și B două mulțimi. Se spune că A este o submulțime a lui B , sau este inclusă în B și se notează $A \subset B$, dacă fiecare element al mulțimii A aparține mulțimii B , adică*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Exemplu. $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Observație 1.3.1. Dacă $A \subset B$, mai spunem că A se conține în B sau B conține (sau include) pe A , sau A este o parte a lui B . În loc de $A \subset B$ se scrie de asemenea $B \supset A$, iar dacă A nu se include în B , se scrie $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$ (fig. 1).

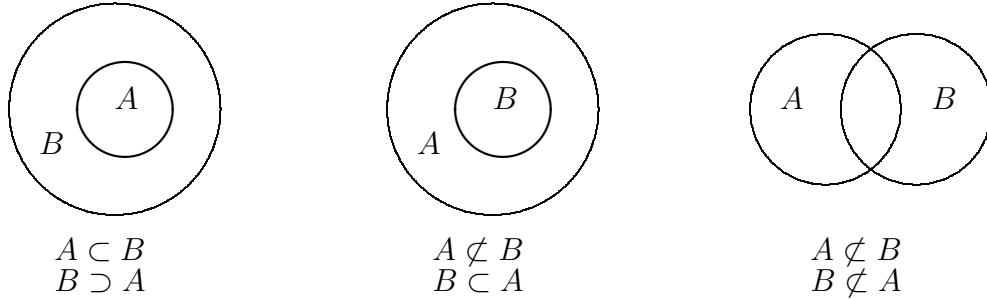


Fig. 1

Relația de incluziune are următoarele proprietăți.

Proprietăți 1.3.1.

- 1) $A \subset A$ (reflexivitate);
- 2) $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (tranzitivitate);
- 3) $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$ (antisimetrie).

Definiție 1.3.2. Mulțimea, care nu conține nici un element se numește mulțime vidă. Mulțimea vidă se notează cu simbolul \emptyset .

Exemple.

1. $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$.
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

Afirmație 1.3.1. Mulțimea vidă este submulțimea a oricărei mulțimi.

Demonstrație. Fie A o mulțime arbitrară. Vom presupune că $\emptyset \not\subset A$. Rezultă, că există așa un element $x \in \emptyset$ astfel încât $x \notin A$. Dar așa ceva este imposibil, deoarece \emptyset nu conține elemente. Contradicția obținută demonstrează afirmația inițială.

Fie A – o mulțime arbitrară. Mulțimea părților mulțimii A (mulțimea tuturor submulțimilor ei) se notează $\mathcal{P}(A)$ sau 2^A , astfel

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Este evident, că $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ și $A \in \mathcal{P}(A)$.

Exemple.

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
2. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

$$3. \mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

4. Mulțimea universală

Paradoxul lui Russel

Există două feluri de mulțimi. Unele mulțimi nu se conțin pe sine în calitate de element (de exemplu, $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \notin \mathbb{Q}$), altele însă posedă așa o proprietate. De exemplu, $A = \{X \mid X \text{ este mulțime}\}$ este un element al său.

Considerăm mulțimea M , ce constă din toate mulțimile care nu se conțin pe sine în calitate de element, adică

$$M = \{X \mid X \notin X\}.$$

Admitem că $M \in M$. Atunci, cum fiecare element $X \in M$ verifică condiția $X \notin X$, rezultă $M \notin M$, ceea ce contrazice ipoteza inițială.

Admitem că $M \notin M$. Atunci, conform definiției mulțimii M , se obține $M \in M$, ceea ce iar contrazice presupunerea.

Așadar, se obține că atât afirmația $M \in M$, cât și negația ei $M \notin M$ sunt false (paradoxul lui Russel).

Prin urmare M nu poate fi acceptată ca mulțime, deci nici A .

Observație 1.4.1. *Pentru a evita așa situații paradoxale, ce țin de mulțimi de tipul "mulțimea tuturor mulțimilor", vom fixa o mulțime suficient de "bogată", ce conține în sine toate mulțimile necesare (de exemplu \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , $C[a, b]$, ...). Această mulțime o vom numi mulțime universală și o vom nota \mathcal{U} . Toate mulțimile considerate în continuare vor fi submulțimi (părți) ale mulțimii universale \mathcal{U} , chiar dacă aceasta nu va fi specificat.*

5. Operații cu mulțimi

Definiție 1.5.1. *Reuniune a mulțimilor A și B se numește mulțimea notată cu $A \cup B$ și definită astfel*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\},$$

adică $A \cup B$ este mulțimea elementelor ce aparțin cel puțin uneia din mulțimile A și B .

Exemple.

1. Fie A, B – mulțimile din fig. 2. Atunci $A \cup B$ va fi mulțimea hașurată.

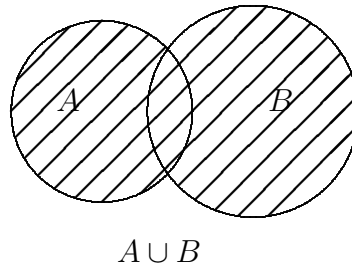


Fig. 2

2. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Atunci reuniunea mulțimilor A și B va avea forma (fig. 3.)

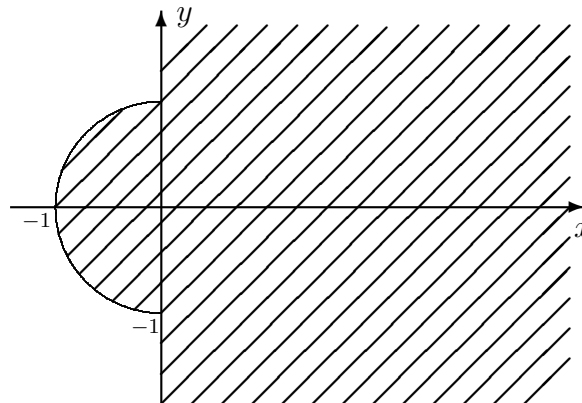


Fig. 3

Afirmație 1.5.1. (*Proprietățile operațiilor de reuniune*)

- 1) $A \cup A = A$ (*idepotență*);
- 2) $A \cup \emptyset = A$;
- 3) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$;
- 4) $A \cup B = B \cup A$ (*comutativitate*);
- 5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (*asociativitate*).

Demonstrația acestor proprietăți rezultă imediat din definiția reuniunii a două mulțimi.

Definiție 1.5.2. *Intersecție a mulțimilor A și B se numește mulțimea notată cu $A \cap B$ și definită astfel*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\},$$

adică $A \cap B$ este mulțimea elementelor, ce aparțin și lui A și lui B .

Exemple.

1. Fie A, B – mulțimile din fig. 4. Atunci $A \cap B$ va fi mulțimea hașurată.

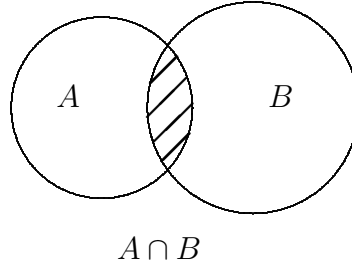


Fig. 4

2. $(-\infty, 1] \cap (-2, 7] = (-2, 1]$.

3. $\{a, b, c\} \cap \{b, d\} = \{b\}$.

4. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \emptyset$.

Afirmație 1.5.2. (*Proprietățile operațiilor de intersecție*)

1) $A \cap A = A$ (*idepotență*);

2) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

3) $A \cap \mathcal{U} = A$;

4) $A \cap B = B \cap A$ (*comutativitate*);

5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (*asociativitate*).

Demonstrația acestor proprietăți rezultă imediat din definiția intersecției a două mulțimi.

Afirmație 1.5.3. *Legătura dintre operațiile de reuniune și intersecție este exprimată de proprietățile de distributivitate:*

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demonstrație. Vom demonstra, de exemplu, proprietatea 2 (demonstrația proprietății 1 este similară).

Fie x un element arbitrar. Atunci

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ și } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ și } (x \in B \text{ sau } x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ și } x \in B) \text{ sau } (x \in A \text{ și } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ sau } (x \in A \cap C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Afirmație 1.5.4. *Legătura dintre operațiile de incluziune și operațiile de reuniune și intersecție este exprimată de următoarele proprietăți:*

- 1) $A \subset A \cup B$;
- 2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
- 3) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$;
- 4) $A \subset C$ și $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$;
- 5) $A \cap B \subset A$;
- 6) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
- 7) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$;
- 8) $C \subset A$ și $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$.

Demonstrația acestor proprietăți nu prezintă greutate.

Definiție 1.5.3. Diferența a mulțimilor A și B se numește mulțimea notată cu $A \setminus B$ și definită astfel

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\},$$

adică $A \setminus B$ este mulțimea elementelor lui A , ce nu aparțin lui B .

Exemplu. Fie A, B – mulțimile din fig. 5. Atunci $A \setminus B$ va fi mulțimea hașurată.

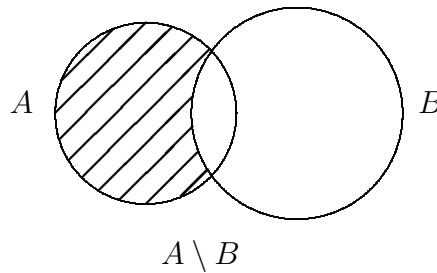


Fig. 5

Observație 1.5.1.

- 1) Diferența $A \setminus B$ se obține eliminând din A elementele, ce aparțin și lui B .
- 2) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $A \setminus B = A$.
- 3) Dacă $A \subset B$, atunci $A \setminus B = \emptyset$.

Definiție 1.5.4. Diferența simetrică a mulțimilor A și B se numește mulțimea

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemple.

1. Fie A, B – mulțimile din fig. 6. Atunci diferența simetrică a acestor mulțimi va fi mulțimea hașurată.

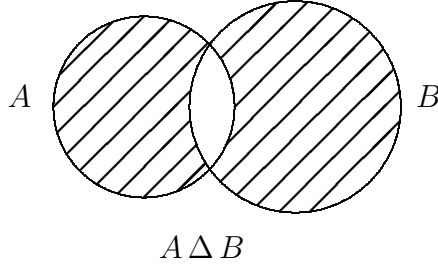


Fig. 6

2. $(-\infty, 2] \Delta [-3, 5) = (-\infty, -3) \cup (2, 5)$.

3. $\{\triangle, \circ, \star\} \Delta \{\diamond, \Delta\} = \{\circ, \star, \diamond\}$.

Afirmație 1.5.5. *Mulțimea tuturor submulțimilor (o parte a mulțimii universale \mathcal{U}), înzestrată cu operația binară algebrică Δ , este un grup abelian, adică se verifică relațiile:*

1) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (asociativitatea);

2) $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$ (\emptyset – element neutru);

3) $A \Delta A = \emptyset$ (A este simetricul lui A);

4) $A \Delta B = B \Delta A$ (comutativitatea).

Demonstrație. Vom demonstra, de exemplu, proprietatea 1 (celelalte proprietăți se demonstrează similar).

$$\forall x \in (A \Delta B) \Delta C \Rightarrow (x \in A \Delta B \text{ și } x \notin C) \text{ sau } (x \notin A \Delta B \text{ și } x \in C).$$

Dacă $x \in A \Delta B$ și $x \notin C$, atunci

$$((x \in A \text{ și } x \notin B) \text{ sau } (x \notin A \text{ și } x \in B)) \text{ și } x \notin C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ și } x \notin B \text{ și } x \notin C) \text{ sau } (x \notin A \text{ și } x \in B \text{ și } x \notin C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ și } x \notin B \Delta C) \text{ sau } (x \notin A \text{ și } x \in B \Delta C) \Rightarrow x \in A \Delta (B \Delta C).$$

Dacă $x \notin A \Delta B$ și $x \in C$, atunci

$$x \notin A \setminus B \text{ și } x \notin B \setminus A \text{ și } x \in C \Rightarrow (x \notin A \text{ sau } x \in B) \text{ și } (x \notin B \text{ sau } x \in A) \text{ și } x \in C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \notin A \text{ și } x \notin B \text{ și } x \in C) \text{ sau } (x \in B \text{ și } x \in A \text{ și } x \in C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \notin A \text{ și } x \in B \Delta C) \text{ sau } (x \in A \text{ și } x \notin B \Delta C) \Rightarrow x \in A \Delta (B \Delta C).$$

Așadar,

$$(A \Delta B) \Delta C \subset A \Delta (B \Delta C).$$

Incluziunea inversă se demonstrează similar.

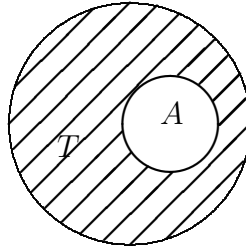
Definiție 1.5.5. Fie T – o mulțime, și $A \subset T$ o submulțime. Mulțimea

$$C_T(A) = \{x \mid x \in T \text{ și } x \notin A\}$$

se numește complementara mulțimii A în raport cu T .

Exemple.

1. Fie T și A – mulțimile din fig. 7. Atunci $C_T(A)$ va fi mulțimea hașurată.



$C_T(A)$

Fig. 7

2. $C_{\mathbb{R}}([1, +\infty)) = (-\infty, 1)$.

Afirmație 1.5.6. (Formule lui de Morgan)

Dacă A și B sunt două submulțimi ale lui T , atunci

1) $C_T(A \cup B) = C_T(A) \cap C_T(B)$;

2) $C_T(A \cap B) = C_T(A) \cup C_T(B)$.

Demonstrație. Vom demonstra, de exemplu, relația 1. Cum $A \subset T$ și $B \subset T$,
 $x \in C_T(A \cup B) \Leftrightarrow x \in T$ și $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \in T$ și $x \notin A$ și $x \notin B \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in C_T(A)$ și $x \in C_T(B) \Leftrightarrow x \in C_T(A) \cap C_T(B)$.

Observație 1.5.2. De regulă, din context este clar în raport cu ce mulțime T se ia complementara mulțimilor considerate. În așa caz, indicele T se omite și complementara mulțimii A se notează $C(A)$ sau \bar{A} .

Afirmație 1.5.7. Complementara are proprietățile:

1) $C_T(C_T(A)) = A$;

2) $C_T(\emptyset) = T$;

3) $C_T(T) = \emptyset$.

Definiție 1.5.6. Fie x și y două obiecte. Se numește pereche ordonată a obiectelor x și y mulțimea notată (x, y) și definită astfel:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Afirmație 1.5.8. Dacă (x, y) și (u, v) sunt două perechi ordonate, atunci

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ și } y = v.$$

Demonstrație. Fie $(x, y) = (u, v)$, adică $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Sunt posibile următoarele cazuri:

I. Obiectele x și y coincid. Atunci $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}\}$ și prin urmare, $\{u\} = \{x\}$ și $\{u, v\} = \{x\}$. Rezultă $u = x$ și $v = x$, adică $x = u$ și $y = v$.

II. Obiectele x și y sunt diferite. Atunci $u \neq v$ și, prin urmare, $\{x\} = \{u\}$ și $\{x, y\} = \{u, v\}$, de unde $x = u$ și $y = v$.

Dacă $x = u$ și $y = v$, atunci, evident, $(x, y) = (u, v)$.

Observație 1.5.3. Dacă x și y sunt două obiecte diferite ($x \neq y$), atunci $(x, y) \neq (y, x)$.

Definiție 1.5.7. Fie a_1, a_2, \dots, a_n - n obiecte. Se numește n -uplu ordonat, obiectul notat (a_1, a_2, \dots, a_n) și definit prin inducție:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n), \quad (n \geq 3).$$

Definiție 1.5.8. Produs cartesian al mulțimilor A_1, A_2, \dots, A_n se numește mulțimea notată $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ și definită astfel:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_j \in A_j, j = \overline{1, n}\}, \quad (n \geq 2).$$

Exemplu. $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

Afirmație 1.5.9. Au loc relațiile:

1) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

5) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demonstrația acestor relații rezultă imediat din definițiile operațiilor respective.

CAPITOLUL 2

CORESPONDENȚE

1. Corespondența între două mulțimi

Definiție 2.1.1. Fie X și Y două mulțimi. Tripletul ordonat (X, G, Y) , unde G este o submulțime a produsului cartesian $X \times Y$, se numește corespondență de la mulțimea X la mulțimea Y . Mulțimea G se numește graficul corespondenței, X – domeniul corespondenței, iar Y – codomeniul (domeniu de valori) corespondenței.

Exemple.

1. Fie $X = Y = \mathbb{R}$, G – mulțimea reprezentată în fig. 8. Tripletul $\alpha = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$ este o corespondență de la mulțimea numerelor reale la ea însăși.

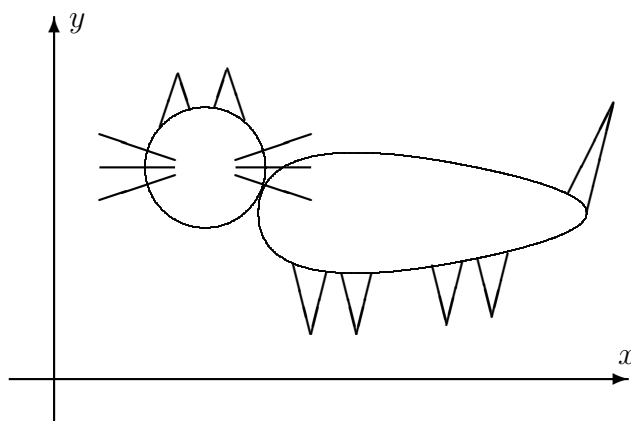


Fig. 8

2. Fie $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $G = \{(1, a), (3, a), (3, b), (2, c)\}$. Tripletul $\alpha = (X, G, Y)$ este o corespondență de la mulțimea X la mulțimea Y . Corespondența α poate fi definită și astfel (fig. 9).

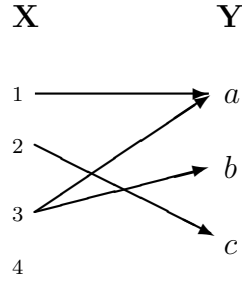


Fig. 9

3. Fie $X = \{\pi \mid \pi - \text{plan în } \mathbb{R}^3\}$, $Y = \{l \mid l - \text{dreaptă în } \mathbb{R}^3\}$,
 $G = \{(\pi, l) \mid \pi \in X, l \in Y, l \perp \pi\}$. Tripletul $\alpha = (X, G, Y)$ este corespondență de la mulțimea X la mulțimea Y .

4. Fie $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$, $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 5k, k \in \mathbb{N}\}$. Tripletul $\alpha = (\mathbb{Z}, G, \mathbb{Z})$ este corespondență de la mulțimea numerelor întregi la ea însăși.

Definiție 2.1.2. Fie $\alpha_1 = (X_1, G_1, Y_1)$ și $\alpha_2 = (X_2, G_2, Y_2)$ - două corespondențe. Corespondențele α_1 și α_2 sunt egale ($\alpha_1 = \alpha_2$), dacă $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ și $G_1 = G_2$.

Corespondențele din exemple 1 - 4 sunt distincte, iar corespondențele $\alpha_1 = (\mathbb{R}, G_1, \mathbb{R}_+)$ și $\alpha_2 = (\mathbb{R}, G_2, \mathbb{R}_+)$, unde $G_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+, y = |x|\}$,
 $G_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+, y = \sqrt{x^2}\}$ sunt egale, deci $\alpha_1 = \alpha_2$.

2. Imagine directă și imagine inversă a unei mulțimi

Definiție 2.2.1. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ - o corespondență, $A \subset X$ o submulțime a lui X . Mulțimea notată cu $\alpha(A)$ și definită prin egalitatea

$$\alpha(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, (x, y) \in G\}$$

se numește imagine directă a mulțimii A prin corespondența α .

Dacă $x \in X$, mulțimea $\alpha(\{x\})$ pentru comoditate va fi notată cu $\alpha(x)$, și se va numi imaginea elementului $x \in X$.

Exemple.

1. Fie $\alpha = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$, unde $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ (a se vedea fig. 10),
 $A = [-1; 1]$. Atunci
 $\alpha(A) = \{y \mid \exists x(-1 \leq x \leq 1 \text{ și } 0 \leq x \leq 2 \text{ și } 0 \leq y \leq x)\} = \{y \mid \exists x(0 \leq x \leq 1 \text{ și } 0 \leq y \leq x)\} = [0, 1]$.

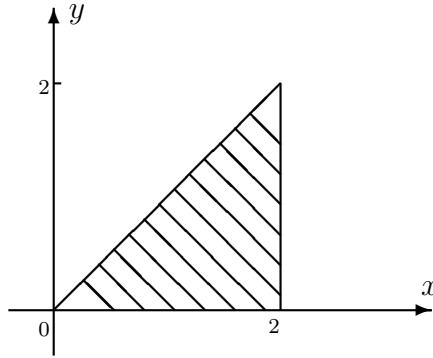


Fig. 10

2. Considerăm exemplul dat de fig. 9. Fie $A = \{1, 2\}$, atunci $\alpha(A) = \{a, c\}$.

Teorema 2.2.1. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ – o corespondență, $A \subset X$, $B \subset X$. Atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

- 1) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$;
- 2) $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$;
- 3) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$;
- 4) $\alpha(A \cap B) \subset \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Demonstrație.

1. $\alpha(\emptyset) = \{y \in Y \mid \exists x \in \emptyset, (x, y) \in G\} = \emptyset$.
2. În presupunerea că $A \subset B$ se obține

$$\alpha(A) = \{y \mid \exists x \in A, (x, y) \in G\} \subset \{y \mid \exists x \in B, (x, y) \in G\} = \alpha(B).$$

3. Pentru fiecare y avem

$$\begin{aligned} y \in \alpha(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B (x, y) \in G \Leftrightarrow \exists x((x \in A \text{ sau } x \in B) \text{ și } (x, y) \in G) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x((x \in A \text{ și } (x, y) \in G) \text{ sau } (x \in B \text{ și } (x, y) \in G)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in A \text{ și } (x, y) \in G) \text{ sau } \exists x(x \in B \text{ și } (x, y) \in G) \Leftrightarrow y \in \alpha(A) \text{ sau } y \in \alpha(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in \alpha(A) \cup \alpha(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ Fie } y \in \alpha(A \cap B). \text{ Atunci } \exists x \in A \cap B (x, y) \in G &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } (x, y) \in G) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x((x \in A \text{ și } (x, y) \in G) \text{ și } (x \in B \text{ și } (x, y) \in G)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x(x \in A \text{ și } (x, y) \in G) \text{ și } \exists x(x \in B \text{ și } (x, y) \in G) \Leftrightarrow y \in \alpha(A) \text{ și } y \in \alpha(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in \alpha(A) \cap \alpha(B). \end{aligned}$$

Observație 2.2.1. În afirmația 4 a teoremei 2.2.1 simbolul incluziunii, în cazul general, nu poate fi înlocuit cu simbolul egalității. Într-adevăr, fie $X = Y = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}^2$, $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$. Atunci $\alpha(A \cap B) = \alpha(\emptyset) = \emptyset$, iar $\alpha(A) \cap \alpha(B) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Definiție 2.2.2. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ o corespondență, $B \subset Y$ o submulțime a lui Y . Mulțimea notată cu $\alpha^{-1}(B)$ și definită prin egalitatea

$$\alpha^{-1}(B) = \{x \in X \mid \alpha(x) \subset B\}$$

se numește imagine inversă a mulțimii B prin corespondența α .

Exemplu. Fie $\alpha = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$, unde $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$, $B = [-1, 1]$. Atunci $\alpha^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha(x) \subset B\} =$
 $= \{x \in (-\infty, 0) \mid \alpha(x) \subset B\} \cup \{x \in [0, 2] \mid \alpha(x) \subset B\} \cup \{x \in (2, +\infty) \mid \alpha(x) \subset B\} =$
 $= \{x \in (-\infty, 0) \mid \emptyset \subset B\} \cup \{x \in [0, 2] \mid [0, x] \subset B\} \cup \{x \in (2, +\infty) \mid \emptyset \subset B\} =$
 $= (-\infty, 0) \cup [0, 1] \cup (2, +\infty) = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty).$

Teorema 2.2.2. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ o corespondență, $A \subset Y$, $B \subset Y$. Atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

- 1) $A \subset B \Rightarrow \alpha^{-1}(A) \subset \alpha^{-1}(B)$;
- 2) $\alpha^{-1}(A \cup B) \supset \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$;
- 3) $\alpha^{-1}(A \cap B) = \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)$;
- 4) $\alpha^{-1}(Y) = X$.

Demonstrație.

1. Fie $A \subset B$. Atunci din $x \in \alpha^{-1}(A)$ se obține $\alpha(x) \subset A$, de unde $\alpha(x) \subset B$, și deci $x \in \alpha^{-1}(B)$.

2. Pentru orice x avem: $x \in \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \alpha^{-1}(A)$ sau $x \in \alpha^{-1}(B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha(x) \subset A$ sau $\alpha(x) \subset B \Rightarrow \alpha(x) \subset A \cup B \Leftrightarrow x \in \alpha^{-1}(A \cup B)$.

3. Pentru orice x avem: $x \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \alpha^{-1}(A)$ și $x \in \alpha^{-1}(B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha(x) \subset A$ și $\alpha(x) \subset B \Leftrightarrow \alpha(x) \subset A \cap B \Leftrightarrow x \in \alpha^{-1}(A \cap B)$.

4. Pentru orice x avem: $x \in X \Rightarrow \alpha(x) \subset Y \Rightarrow x \in \alpha^{-1}(Y)$. Incluziunea opusă este evidentă.

Observație 2.2.2. În afirmația 2 a teoremei 2.2.2 simbolul incluziunii, în caz general, nu poate fi înlocuit cu simbolul egalității.

În adevăr, pentru $X = Y = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}^2$, $A = (-\infty, 0]$, $B = [0, +\infty)$ se obține:
 $\alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\alpha^{-1}(A) = \{x \mid \alpha(x) \subset A\} = \{x \mid \mathbb{R} \subset A\} = \emptyset$.
 Similar $\alpha^{-1}(B) = \emptyset$ și $\alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B) \neq \alpha^{-1}(A \cup B)$.

3. Compunerea corespondențelor. Inversa unei corespondențe

Definiție 2.3.1. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ și $\beta = (Y, H, Z)$ - două corespondențe în care codomeniul lui α coincide cu domeniul lui β . Corespondența notată cu $\beta \circ \alpha$ și definită astfel

$$\beta \circ \alpha = (X, H \circ G, Z)$$

unde $H \circ G = \{(x, z) \mid \exists y (x, y) \in G \text{ și } (y, z) \in H\}$ se numește compunere a corespondențelor α și β .

Exemple.

1. Fie corespondențele $\alpha = (X, G, Y)$ și $\beta = (Y, H, Z)$ reprezentate în fig. 11.

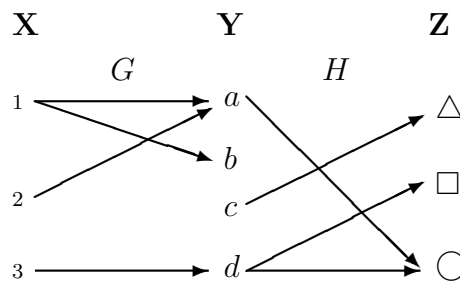


Fig. 11

Atunci compunerea corespondențelor α și β , $\beta \circ \alpha$ are forma din fig. 12.

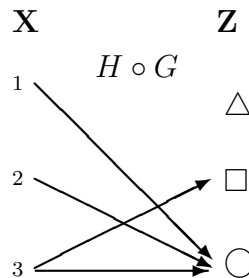


Fig. 12

2. Fie corespondențele $\alpha = (X, G, Y)$ și $\beta = (Y, H, Z)$, unde $X = Y = Z = \mathbb{R}$,
 $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $H = \{(y, z) \mid 1 \leq y \leq 2\}$ (a se vedea fig. 13).

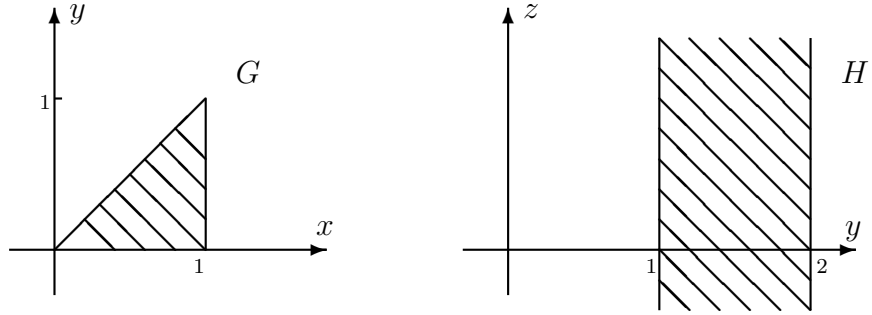


Fig. 13

Atunci $(x, z) \in H \circ G \Leftrightarrow \exists y(x, y) \in G$ și $(y, z) \in H \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists y(0 \leq x \leq 1$ și $0 \leq y \leq x$ și $1 \leq y \leq 2) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ și $1 \leq x \Leftrightarrow x = 1$.
 Așadar, $H \circ G = \{(1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ (a se vedea fig. 14).

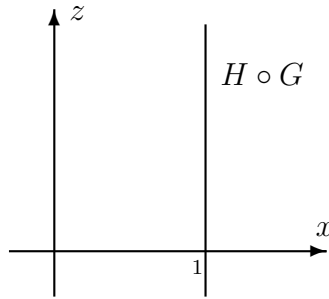


Fig. 14

Definiție 2.3.2. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ o corespondență. Corespondență notată α^{-1} și definită prin

$$\alpha^{-1} = (Y, G^{-1}, X),$$

unde $G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$, se numește inversa corespondenței α .

Exemplu. Fie corespondența α definită în fig. 15.

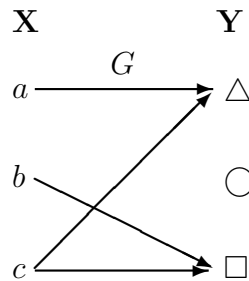


Fig. 15

Atunci corespondența inversă α^{-1} are forma din fig. 16.

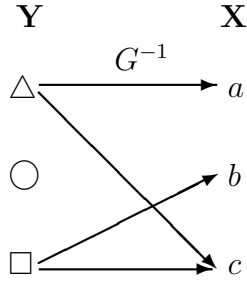


Fig. 16

Teorema 2.3.1. *Operația de compunere a corespondențelor este asociativă, adică pentru orice corespondențe $\alpha = (X, G, Y)$, $\beta = (Y, H, Z)$, $\gamma = (Z, L, U)$ are loc egalitatea $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.*

Demonstrație. Cum

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (Z, L, U) \circ (X, H \circ G, Z) = (X, L \circ (H \circ G), U),$$

și similar

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = (X, (L \circ H) \circ G, U),$$

rezultă, că pentru a demonstra teorema (a se vedea definiția egalității a două corespondențe) este suficient să arătăm că

$$L \circ (H \circ G) = (L \circ H) \circ G.$$

În adevăr, $(x, u) \in L \circ (H \circ G) \Leftrightarrow \exists z((x, z) \in H \circ G \text{ și } (z, u) \in L) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists z(\exists y((x, y) \in G \text{ și } (y, z) \in H) \text{ și } (z, u) \in L) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists y((x, y) \in G \text{ și } \exists z((y, z) \in H) \text{ și } (z, u) \in L) \Leftrightarrow \exists y((x, y) \in G \text{ și } (y, u) \in L \circ H) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x, u) \in (L \circ H) \circ G.$

Observație 2.3.1. *Operația de compunere a corespondențelor, în general, nu este comutativă. Chiar dacă corespondențele $\alpha \circ \beta$ și $\beta \circ \alpha$ sunt definite, egalitatea lor nu întotdeauna are loc.*

În adevăr, fie $\alpha = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$, unde $(x, y) \in G \Leftrightarrow y = 2x$, $\beta = (\mathbb{R}, H, \mathbb{R})$, unde $(y, z) \in H \Leftrightarrow z = y^2$. Atunci

$$(x, z) \in H \circ G \Leftrightarrow \exists y((x, y) \in G \text{ și } (y, z) \in H) \Leftrightarrow \exists y(y = 2x \text{ și } z = y^2) \Leftrightarrow z = (2x)^2.$$

Pe de altă parte,

$$(x, z) \in G \circ H \Leftrightarrow \exists y((x, y) \in H \text{ și } (y, z) \in G) \Leftrightarrow \exists y(y = x^2 \text{ și } z = 2y) \Leftrightarrow z = 2x^2.$$

Se obține $H \circ G \neq G \circ H$, și deci $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

Teorema 2.3.2. Fie $\alpha = (X, G, Y)$, $\beta = (Y, H, Z)$ două corespondențe. Atunci au loc egalitățile:

$$1) (\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1};$$

$$2) (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha.$$

Demonstrație.

1. Cum

$$(\beta \circ \alpha)^{-1} = (X, H \circ G, Z)^{-1} = (Z, (H \circ G)^{-1}, X),$$

$$\alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = (Y, G^{-1}, Z) \circ (Z, H^{-1}, Y) = (Z, G^{-1} \circ H^{-1}, X),$$

rămâne să demonstrăm egalitatea $(H \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ H^{-1}$.

Avem $(z, x) \in (H \circ G)^{-1} \Leftrightarrow (x, z) \in (H \circ G) \Leftrightarrow \exists y((x, y) \in G \text{ și } (y, z) \in H) \Leftrightarrow \exists y((z, y) \in H^{-1} \text{ și } (y, x) \in G^{-1}) \Leftrightarrow (z, x) \in G^{-1} \circ H^{-1}$.

2. Cum

$$(\alpha^{-1})^{-1} = (Y, G^{-1}, X)^{-1} = (X, (G^{-1})^{-1}, Y),$$

rămâne să demonstrăm, că $(G^{-1})^{-1} = G$.

Avem $(x, y) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in G^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

Definiție 2.3.3. Fie X o mulțime arbitrară. Corespondența

$$\mathbf{1}_X = (X, \Delta_X, X),$$

unde $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ - diagonala mulțimii X , se numește corespondență unitate (identitate).

Exerciții.

1. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ o corespondență, atunci au loc egalitățile

$$\alpha \circ \mathbf{1}_X = \alpha; \quad \mathbf{1}_Y \circ \alpha = \alpha.$$

2. Există corespondența $\alpha = (X, G, Y)$, pentru care

$$\alpha \circ \alpha^{-1} \neq \mathbf{1}_Y \text{ și } \alpha^{-1} \circ \alpha \neq \mathbf{1}_X.$$

Teorema 2.3.3. Fie $\alpha = (X, G, Y)$ și $\beta = (Y, H, Z)$ două corespondențe, $A \subset X$, $B \subset Y$, $C \subset Z$. Atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

$$1) (\beta \circ \alpha)(A) = \beta(\alpha(A));$$

$$2) \alpha(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset \alpha^{-1}(B);$$

$$3) (\beta \circ \alpha)^{-1}(C) = \alpha^{-1}(\beta^{-1}(C)).$$

Demonstrație.

1. Avem $z \in (\beta \circ \alpha)(A) \Leftrightarrow \exists x \in A (x, z) \in H \circ G \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists x \in A \exists y ((x, y) \in G \text{ și } (y, z) \in H) \Leftrightarrow \exists y ((\exists x \in A (x, y) \in G) \text{ și } (y, z) \in H) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists y (y \in \alpha(A) \text{ și } (y, z) \in H) \Leftrightarrow z \in \beta(\alpha(A)).$

2. Dacă $\alpha(A) \subset B$, rezultă că pentru fiecare $x \in A$ avem

$$\alpha(x) \subset \alpha(A) \Rightarrow \alpha(x) \subset B \Rightarrow x \in \alpha^{-1}(B).$$

Prin urmare, $A \subset \alpha^{-1}(B)$.

Dacă $A \subset \alpha^{-1}(B)$, atunci pentru fiecare $y \in \alpha(A)$ se obține

$$\begin{aligned} \exists x \in A (x, y) \in G &\Rightarrow \exists x \in A, y \in \alpha(x) \Rightarrow \exists x \in \alpha^{-1}(B) y \in \alpha(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x (\alpha(x) \subset B \text{ și } y \in \alpha(x)) \Rightarrow y \in B. \end{aligned}$$

Așadar, $\alpha(A) \subset B$.

3. Utilizând afirmațiile 1 și 2, se obține $x \in (\beta \circ \alpha)^{-1}(C) \Leftrightarrow (\beta \circ \alpha)(x) \subset C \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \beta(\alpha(x)) \subset C \Leftrightarrow \alpha(x) \subset \beta^{-1}(C) \Leftrightarrow \{x\} \subset \alpha^{-1}(\beta^{-1}(C)) \Leftrightarrow x \in \alpha^{-1}(\beta^{-1}(C)).$

4. Relație binară

Definiție 2.4.1. *Corespondență $\alpha = (X, \rho, Y)$ se numește relație binară, dacă $X = Y$.*

Observație 2.4.1. *În loc de $\alpha = (X, \rho, X)$ vom nota relația binară $\alpha = (X, \rho)$. Deseori relația binară se identifică cu graficul ei, înțelegând în așa sens prin relația binară ρ pe mulțimea X o submulțime a produsului cartesian $X \times X$. Se spune, că elementele x și y se află în relația ρ , dacă $(x, y) \in \rho$ (se notează de asemenea $x\rho y$).*

Vom nota prin $R(X)$ mulțimea relațiilor binare pe mulțimea X , așadar, $R(X) = \mathcal{P}(X \times X)$.

Cum relațiile binare sunt cazuri particulare ale corespondențelor, au loc următoarele proprietăți.

Proprietăți 2.4.1.

1) $(\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 = \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3);$

2) $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1};$

3) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho;$

4) $\rho \circ \Delta_X = \Delta_X \circ \rho = \rho;$

5) $\rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $\rho^0 = \Delta_X$, $\rho^n = \underbrace{\rho \circ \rho \circ \dots \circ \rho}_{n \text{ ori}};$

6) $\rho^{-m} \circ \rho^{-n} = \rho^{-(m+n)}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $\rho^{-n} = (\rho^n)^{-1}$.

Definiție 2.4.2. *Relația binară ρ pe mulțimea X se numește*

(1) *reflexivă, dacă $\Delta_X \subset \rho$, adică*

$$\forall x \in X \Rightarrow x\rho x;$$

(2) *simetrică, dacă $\rho^{-1} \subset \rho$, adică*

$$\forall x, y \in X (x\rho y \Rightarrow y\rho x);$$

(3) *antisimetrică, dacă $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_X$, adică*

$$\forall x, y \in X (x\rho y \text{ și } y\rho x \Rightarrow x = y);$$

(4) *tranzitivă, dacă $\rho^2 \subset \rho$, adică*

$$\forall x, y, z \in X (x\rho y \text{ și } y\rho z \Rightarrow x\rho z);$$

(5) *totală, dacă $\rho \cup \rho^{-1} = X \times X$, adică*

$$\forall x, y \in X (x\rho y \text{ sau } y\rho x).$$

Teorema 2.4.1. *Fie ρ o relație binară pe mulțimea X . Atunci ρ este reflexivă (simetrică, antisimetrică, tranzitivă, totală) dacă și numai dacă ρ^{-1} este reflexivă (simetrică, antisimetrică, tranzitivă, totală).*

Demonstrație. Vom demonstra teorema în cazul când ρ este tranzitivă (celelalte afirmații se demonstrează similar).

Fie ρ – tranzitivă, $x, y, z \in X$, elemente din X . Presupunem că $x\rho^{-1}y$ și $y\rho^{-1}z$. Atunci $y\rho x$ și $z\rho y$. Cum ρ este tranzitivă, se obține $z\rho x$, de unde $x\rho^{-1}z$.

CAPITOLUL 3

FUNCȚII

1. Noțiunea de funcție

Definiție 3.1.1. *Corespondența $f = (X, F, Y)$ se numește funcție de la mulțimea X la mulțimea Y , dacă se verifică condițiile:*

- 1) $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in F$;
- 2) $\forall (x, y'), (x, y'') \in F \Rightarrow y' = y''$.

Mulțimea X se numește domeniu de definiție al funcției f , iar mulțimea Y – domeniu de valori (codomeniu) al funcției f .

Notatii. Pentru funcția $f = (X, F, Y)$ se utilizează frecvent notațiile $f : X \rightarrow Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$. Dacă $(x, y) \in F$ se spune că y este imaginea lui x prin funcția f și se notează $y = f(x)$.

Observație 3.1.1. *Din definiția funcției rezultă că funcțiile $f : X_1 \rightarrow Y_1$ și $g : X_2 \rightarrow Y_2$ sunt egale dacă și numai dacă $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ și $f(x) = g(x), \forall x \in X_1$.*

Exemple.

1. Fie X o mulțime arbitrară. Funcția $\mathbf{1}_X = (X, \Delta_X, X)$ se numește funcție identică a mulțimii X . Din definiția funcției identice rezultă că $\mathbf{1}_X(x) = x, \forall x \in X$. În particular, dacă $X = \emptyset$, se obține funcția vidă $\mathbf{1}_\emptyset = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

2. Fie X, Y – mulțimi arbitrare, $Y \neq \emptyset$. Funcția $f = (X, Y_{y_0}, Y)$, unde $F_{y_0} = \{(x, y_0) | x \in X\}$, y_0 – un element fixat din mulțimea Y , se numește funcție constantă. Din definiția funcției constante rezultă că $f(x) = y_0 (\forall x \in X)$.

2. Restricția și prelungirea unei funcții

Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție, $A \subset X$.

Definiție 3.2.1. *Funcția $g : V \rightarrow W$ se numește prelungire a funcției f , dacă $X \subset V$, $Y \subset W$ și $\forall x \in X f(x) = g(x)$.*

Definiție 3.2.2. *Funcția $f|_A : A \rightarrow Y$ se numește restricție a funcției f la mulțimea A , dacă $f|_A(x) = f(x), (\forall x \in A)$.*

Exemple.

1. Inițial, a^p se definește ca produsul a p numere, egale toate cu a . Această definiție presupune $p \in \mathbb{N}$. Apoi se introduce noțiunea de funcție exponențială, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ultima este o prelungire a primei funcții.

2. Cum $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, funcția $f(x) = x!$ apriori nu are nici un sens, dacă $x \notin \mathbb{N}$. Această funcție se prelungeste la \mathbb{Z} (și chiar la $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) prin intermediul funcției Γ (funcția lui Euler de speța a doua).

Exerciții.

1. Să se demonstreze afirmațiile ce urmează:

a) orice funcție este o prelungire a oricărei restricții ale ei;

b) dacă funcția $g = (V, G, W)$ este o prelungire a funcției $f = (X, F, Y)$, atunci $F \subset G$ (afirmația reciprocă, în general, nu are loc).

2. Să se aducă exemplul de așa funcții f și g , încât g să fie o prelungire a lui f , iar f să nu fie o restricție a lui g .

3. Compunerea și inversarea funcțiilor

Teorema 3.3.1. Dacă $f = (X, F, Y)$ și $g = (Y, G, Z)$ sunt două funcții, atunci corespondența $g \circ f$ este o funcție și $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Demonstrație. Pentru corespondența $g \circ f = (X, G \circ F, Z)$ se verifică condițiile din definiția funcției.

Fie $x \in X$, un element arbitrar din mulțimea X . Cum f este funcție, există așa un $y \in Y$, încât $(x, y) \in F$. Cum g este funcție, există așa un $z \in Z$, încât $(y, z) \in G$. Prin urmare, $(x, z) \in G \circ F$.

Fie $(x, z_1) \in G \circ F$, $(x, z_2) \in G \circ F$. Atunci există elementele $y_1, y_2 \in Y$, astfel încât $(x, y_1) \in F$, $(y_1, z_1) \in G$, $(x, y_2) \in F$, $(y_2, z_2) \in G$. Cum f este funcție, rezultă $y_1 = y_2$ și cum g este funcție, se obține $z_1 = z_2$.

Să verificăm afirmația $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Notăm $y = f(x)$ și $z = g(y)$. Cum $(x, y) \in F$, $(y, z) \in G$, rezultă $(x, z) \in G \circ F$, adică $g(f(x)) = z = (g \circ f)(x)$.

Teorema 3.3.2. Fie $f = (X, F, Y)$ o funcție. Atunci corespondența $f^{-1}(Y, F^{-1}, X)$ este o funcție dacă și numai dacă $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_X$ și $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_Y$.

Demonstrație. Fie corespondența f^{-1} este o funcție și $x \in X$ – un element arbitrar. Vom nota $y = f(x)$. Cum $(x, y) \in F$, rezultă $(y, x) \in F^{-1}$ și $x = f^{-1}(y)$. Prin urmare, $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. De aici, ținând seamă că domeniile de definiție și domeniile de valori ale funcțiilor $f^{-1} \circ f$ și $\mathbf{1}_X$ coincid, rezultă că aceste funcții sunt egale. Egalitatea $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_Y$ se verifică similar.

Fie că au loc egalitățile $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_X$ și $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_Y$. Să demonstrăm că f^{-1} este funcție. Verificăm pentru f^{-1} condițiile din definiția funcției.

Fie $y \in Y$ un element arbitrar. Cum $(y, y) \in \Delta_Y = F \circ F^{-1}$, rezultă că există elementul $x \in X$, astfel încât $(y, x) \in F^{-1}$ și $(x, y) \in F$.

Fie $(y, x_1) \in F^{-1}$, $(y, x_2) \in F^{-1}$. Cum $(y, x_1) \in F^{-1}$, $(x_2, y) \in F$ implică $(x_2, x_1) \in F^{-1} \circ F = \Delta_X$, rezultă $x_2 = x_1$. Teorema este demonstrată.

4. Funcții injective, surjective, bijective

Definiție 3.4.1. *Funcția $f : X \rightarrow Y$ se numește*

- (1) *surjectivă, dacă $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$;*
- (2) *injectivă, dacă $\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$;*
- (3) *bijectivă, dacă f este și surjectivă, și injectivă.*

Exemple.

1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Funcția f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, $-1 \neq 1$, și totodată, $f(-1) = (-1)^2 = (1)^2 = f(1)$. Această funcție nu este nici surjectivă, deoarece $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -1$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$. Această funcție nu este injectivă (a se vedea exemplul precedent), dar este surjectivă, deoarece $\forall y \in [0, +\infty) \exists x \in \mathbb{R}$ (de exemplu, $x = \sqrt{y}$): $x^2 = y$.

3. Fie $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$. Această funcție este surjectivă (a se vedea exemplul precedent) și injectivă. În adevăr, pentru $\forall \{x_1, x_2\} \subset [0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ avem $x_1^2 \neq x_2^2$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$. Fiind surjectivă și injectivă, f este și bijectivă.

Teorema 3.4.1. *Fie $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ două funcții. Atunci sunt juste următoarele implicații:*

- 1) dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ – injectivă;
- 2) dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ – surjectivă;
- 3) dacă f și g sunt bijective, atunci $g \circ f$ – bijectivă;
- 4) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f – injectivă;
- 5) dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g – surjectivă;
- 6) dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f – injectivă, g – surjectivă.

Demonstrație.

1. Fie f și g – injective, $x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2$. Cum f este injectivă, $f(x_1) \neq f(x_2)$ și cum g este injectivă $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, adică $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ și $g \circ f$ – injectivă.

2. Fie f și g – surjective, $z \in Z$ – un element arbitrar. Cum g este surjectivă, rezultă existența elementului $y \in Y$, astfel încât $g(y) = z$, și cum f este surjectivă, rezultă existența elementului $x \in X$ cu $f(x) = y$. Așadar, $g(f(x)) = z$ și $g \circ f$ – surjectivă.

3. Rezultă din 1 și 2.

4. Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$. Cum $g \circ f$ este injectivă, rezultă $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$ și f – injectivă.

5. Fie $z \in Z$ element arbitrar. Cum $g \circ f$ este o funcție surjectivă, rezultă existența elementului $x \in X$ cu proprietatea $(g \circ f)(x) = z$. Fie $y = f(x)$, atunci $g(y) = g(f(x)) = z$, deci, g este surjectivă.

6. Rezultă din 4 și 5.

5. Monomorfisme, epimorfisme, izomorfisme

Definiție 3.5.1. Funcția $f : X \rightarrow Y$ se numește

(1) *monomorfism*, dacă

$$\forall Z \quad \forall u, v : Z \rightarrow X \quad (f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v);$$

(2) *epimorfism*, dacă

$$\forall Z \quad \forall u, v : Y \rightarrow Z \quad (u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v);$$

(3) *izomorfism*, dacă f este monomorfism și epimorfism.

Teorema 3.5.1. Funcția f este injectivă dacă și numai dacă f este monomorfism.

Demonstrație. Fie f – injectivă, iar Z – o mulțime arbitrară, $u, v : Z \rightarrow X$ – două funcții, astfel încât $f \circ u = f \circ v$. Atunci $\forall z \in Z \Rightarrow (f \circ u)(z) = (f \circ v)(z)$. Cum f este injectivă, se obține $\forall z \in Z \Rightarrow u(z) = v(z)$. Rezultă că $u = v$, și f – monomorfism.

Fie f – monomorfism, să demonstrăm că f este injectivă. Considerăm elementele arbitrare $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Fie $f(x_1) = f(x_2)$ și funcțiile $u, v : X \rightarrow X$,

$$u = \mathbf{1}_X, \quad v(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \neq x_1, \\ x_2, & \text{dacă } x = x_1. \end{cases}$$

Cum $u(x_1) = x_1 \neq x_2 = v(x_1)$, rezultă $u \neq v$. Pe de altă parte, $f \circ u = f \circ v$, ceea ce contrazice faptului că f – monomorfism. Prin urmare, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Teorema este demonstrată.

Teorema 3.5.2. *Funcția f este surjectivă dacă și numai dacă f este epimorfism.*

Demonstrație. Fie f – funcție surjectivă. Să demonstrăm că f este epimorfism. Fie Z – o mulțime arbitrară, $u, v : Y \rightarrow Z$ sunt două funcții cu proprietatea $u \circ f = v \circ f$. Considerăm un element arbitrar $y \in Y$. Cum f este surjectivă, rezultă existența unui element $x \in X$ cu proprietatea $y = f(x)$. Prin urmare, $u(y) = (u \circ f)(x) = (v \circ f)(x) = v(y)$ și, deci, $u = v$.

Fie f – epimorfism. Presupunem, că f nu este o funcție surjectivă. Atunci $\exists y_0 \in Y$, astfel încât $\forall x \in X \ f(x) \neq y_0$. Considerăm funcțiile $u, v : Y \rightarrow Y$,

$$u = \mathbf{1}_Y, \quad v(y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } y \neq y_0, \\ y_1, & \text{dacă } y = y_0, \end{cases} \quad \text{unde } y_1 \neq y_0.$$

Cum $u(y_0) \neq v(y_0)$, rezultă $u \neq v$. Dar $u \circ f = v \circ f$, ce contrazice faptului că f – epimorfism. Așadar, f este surjectivă.

Definiție 3.5.2. *Funcția $f : X \rightarrow Y$ se numește*

- (1) *inversabilă la stânga, dacă $\exists g : Y \rightarrow X : g \circ f = \mathbf{1}_X$, în așa caz funcția g se numește funcție inversă de stânga a funcției f ;*
- (2) *inversabilă de dreapta, dacă $\exists h : Y \rightarrow X : f \circ h = \mathbf{1}_Y$, în așa caz funcția h se numește funcție inversă de dreapta a funcției f ;*
- (3) *inversabilă, dacă f este inversabilă la stânga și la dreapta.*

Teorema 3.5.3. *Dacă funcția f este inversabilă, atunci fiecare inversă de stânga a ei coincide cu fiecare inversă de dreapta.*

Demonstrație. Fie $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, g – inversă de stânga a funcției f , $h : Y \rightarrow X$, h – inversă de dreapta a funcției f . Atunci

$$g = g \circ \mathbf{1}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathbf{1}_X \circ h = h.$$

Definiție 3.5.3. Dacă funcția f este inversabilă, atunci inversa ei de stânga (sau de dreapta) se numește funcție inversă și se notează f^{-1} .

Teorema 3.5.4.

- 1) Dacă f este inversabilă la stânga, atunci f este injectivă.
- 2) Dacă f este inversabilă la dreapta, atunci f este surjectivă.

Demonstrație.

1. Fie g – inversa de stânga a funcției f . Cum funcția $\mathbf{1}_X = g \circ f$ este bijectivă, rezultă că f este injectivă.

2. Fie h – inversa de dreapta a funcției f . Cum funcția $\mathbf{1}_Y = f \circ h$ este bijectivă, rezultă că f este surjectivă.

Teorema 3.5.5. Fie funcția $f : X \rightarrow Y$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) f^{-1} este funcție;
- 2) f este izomorfism;
- 3) f este bijecție;
- 4) f este inversabilă.

Demonstrație. Conform teoremei 3.3.2 rezultă, că afirmațiile 1 și 4 sunt echivalente, iar din teoreme 3.5.1 și 3.5.2 rezultă, că afirmațiile 2 și 3 sunt echivalente. Cum funcțiile $\mathbf{1}_X$ și $\mathbf{1}_Y$ sunt bijective, conform teoremei 3.5.4 conchidem, că 4 implică 3. Să arătăm, că 3 implică 4.

Fie f – bijectivă. Definim funcția $g : Y \rightarrow X$. Considerăm un element arbitrar $y \in Y$. Cum f este surjectivă, există $x \in X$ cu proprietatea $y = f(x)$ și, cum f este injectivă, acest element este unic. Fie $g(y) = x$, atunci $(g \circ f)(x) = g(y) = x$, $(f \circ g)(y) = f(x) = y$, adică $g \circ f = \mathbf{1}_X$, $f \circ g = \mathbf{1}_Y$, și f – inversabilă.

6. Familie de elemente, familie de mulțimi

Definiție 3.6.1. Vom numi familie de elemente din mulțimea X , indexată după mulțimea I , funcția

$$f : I \rightarrow X.$$

Familia de elemente se notează $(x_i)_{i \in I}$, unde $x_i = f(i)$, $i \in I$. În cazul, când elementele mulțimii X sunt mulțimi, termenul de "familie de elemente" se substituie cu termenul "familie de mulțimi".

Exemple.

1. Fie $I = \mathbb{N}$. Atunci familia de elemente din mulțimea X , indexată după mulțimea I (adică $f : \mathbb{N} \rightarrow X$), reprezintă șirul elementelor mulțimii X , $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, unde prin x_n s-a notat $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Fie $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Atunci familia de elemente din mulțimea X , indexată după mulțimea I , reprezintă cotejurile ordonate

$$(x_j)_{j=1}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ unde } x_j \in X, j = \overline{1, n}.$$

3. Fie X – o mulțime arbitrară. Mulțimea X poate fi considerată ca o familie indexată după ea însăși, $(x)_{x \in X}$.

Definiție 3.6.2. Se numește reuniune de familii de mulțimi $(X_i)_{i \in I}$ mulțimea

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid \exists i (i \in I \text{ și } x \in X_i)\}.$$

Definiție 3.6.3. Se numește intersecție de familii de mulțimi $(X_i)_{i \in I}$ mulțimea

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid \forall i (i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}.$$

Exemple.

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [1, 2 - \frac{1}{n}] = [1, 2).$

2. $\bigcap_{\alpha \in (0,1]} [1, 2 + \alpha] = [1, 2].$

3. $\bigcup_{X \in \{A,B\}} X = A \cup B, \quad \bigcap_{X \in \{A,B\}} X = A \cap B.$

Proprietăți 3.6.1.

1) Fie $(X_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulțimi și $I = \emptyset$. Atunci

$$\bigcup_{i \in \emptyset} X_i = \emptyset, \quad \text{iar} \quad \bigcap_{i \in \emptyset} X_i = U.$$

2) Au loc formulele lui de Morgan:

$$C\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} C(X_i), \quad C\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} C(X_i).$$

3) Fie $(X_i)_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J}$ familii de mulțimi. Atunci

$$\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j).$$

4) Fie $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$ două familii de mulțimi indexate după aceeași mulțime I . Atunci

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X_i \times Y_i).$$

5) Fie $f : K \rightarrow I$ o aplicație surjectivă. Atunci

$$\bigcup_{x \in K} X_{f(x)} = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad \bigcap_{x \in K} X_{f(x)} = \bigcap_{i \in I} X_i.$$

6) Fie I o reuniune de familii de mulțimi $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$. Atunci

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{i \in J_\lambda} X_i\right), \quad \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{\lambda \in L} \left(\bigcap_{i \in J_\lambda} X_i\right).$$

7) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $(X_i)_{i \in I}$ - o familie de submulțimi din A . Atunci

$$f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i).$$

8) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $(Y_j)_{j \in J}$ - o familie de submulțimi din B . Atunci

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j).$$

Demonstrațiile proprietăților enunțate, fiind simple (se utilizează definițiile corespunzătoare), sunt lăsate în calitate de exerciții.

7. Sumă directă și produs direct a unei familii de mulțimi

Definiție 3.7.1. Se numește sumă directă a familiei de mulțimi $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ mulțimea

$$\bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}.$$

Correspondențele $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, $i_\alpha(x) = (x, \alpha)$ se numesc injecții canonice.

Exemplu. Fie $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{c, d\}$. Atunci

$$X_1 \sqcup X_2 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (d, 2)\}.$$

Injecțiile canonice i_{X_1}, i_{X_2} acționează în următorul mod (fig. 17).

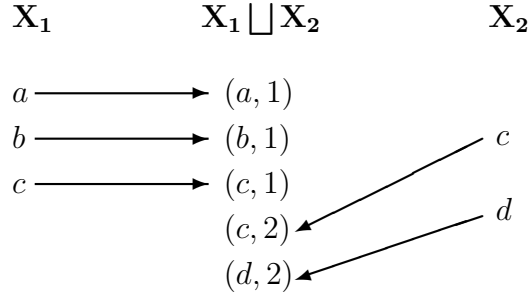


Fig. 17

Se observă, că $(X_1 \times \{1\}) \cap (X_2 \times \{2\}) = \emptyset$, deși $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

Teorema 3.7.1. Fie $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$, $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ - familii de mulțimi, $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ - o familie de aplicații $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$. Atunci există o aplicație unică

$$f : \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in I} Y_\alpha, \quad (1)$$

astfel încât pentru orice $\alpha \in I$ are loc

$$j_\alpha \circ f_\alpha = f \circ i_\alpha, \quad (2)$$

unde $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, $j_\alpha : Y_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$ - injecții canonice.

Observație 3.7.1. Proprietatea (2) înseamnă, că diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f \\ Y_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & \bigsqcup_{\alpha \in I} Y_\alpha \end{array}$$

este comutativă.

Demonstrație. Fie f - o aplicație ce verifică (1) și (2). Atunci, cum fiecare element $w \in \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ are forma $w = (x, \alpha)$ pentru oarecare $\alpha \in I$, $x \in X_\alpha$, rezultă

$$f(w) = (f \circ i_\alpha)(x) = (j_\alpha \circ f_\alpha)(x) = (f_\alpha(x), \alpha)$$

și, prin urmare, unicitatea lui f este demonstrată.

Pentru a demonstra existența aplicației f , ce verifică (1) și (2), este suficient de considerat

$$f(w) = (f_\alpha(x), \alpha), \text{ unde } w = (x, \alpha), \alpha \in I, x \in X_\alpha.$$

Definiție 3.7.2. Funcția f , ce verifică condițiile (1) și (2), se numește sumă directă a familiei de funcții $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ și se notează $\bigsqcup_{\alpha \in I} f_\alpha$.

Definiție 3.7.3. Se numește produs direct al familiei de mulțimi $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ mulțimea

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{ \varphi \mid (\varphi : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha) \wedge (\forall \alpha \in I \varphi(\alpha) \in X_\alpha) \right\}.$$

Aplicațiile

$$p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\alpha, \quad p_\alpha(\varphi) = \varphi(\alpha)$$

se numesc proiecții canonice.

Exemplu. Produs direct al unei familii finite de mulțimi $(X_j)_{j=1}^n$ va fi mulțimea

$$\prod_{j=1}^n X_j = \left\{ \varphi \mid (\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \bigcup_{j=1}^n X_j) \wedge (\varphi(j) \in X_j, j = \overline{1, n}) \right\}.$$

Definim funcția

$$\Phi : \prod_{j=1}^n X_j \rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \quad \Phi(\varphi) = (\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)).$$

Cum pentru $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\varphi(j) \in X_j$, aplicația Φ este definită corect, și cum funcția φ univoc se determină de valorile sale, rezultă, că aplicația Φ este bijecție.

Astfel noțiunea de produs direct poate fi considerată ca o generalizare a noțiunii de produs cartesian pe familii de mulțimi infinite.

Teorema 3.7.2. Fie $(X_\alpha)_{\alpha \in I}, (Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ - familii de mulțimi, $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ - o familie de aplicații $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$. Atunci există o aplicație unică,

$$f : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha, \tag{3}$$

cu proprietatea

$$\forall \alpha \in I \quad q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha, \tag{4}$$

unde $p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$, $q_\alpha : \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ - proiecții canonice.

Observație 3.7.2. Condiția (4) înseamnă, că pentru fiecare $\alpha \in I$ diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xleftarrow{p_\alpha} & \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f \\ Y_\alpha & \xleftarrow{q_\alpha} & \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \end{array}$$

este comutativă.

Demonstrație. Fie aplicația f verifică condițiile (3) și (4). Atunci pentru fiecare element $\varphi \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ avem

$$f(\varphi)(\alpha) = q_\alpha(f(\varphi)) = (q_\alpha \circ f)(\varphi) = (f_\alpha \circ p_\alpha)(\varphi) = f_\alpha(p_\alpha(\varphi)) = f_\alpha(\varphi(\alpha)),$$

de unde rezultă unicitatea lui f .

Pentru a demonstra existența funcției f , ce verifică (3) și (4), este suficient de considerat

$$f(\varphi)(\alpha) = f_\alpha(\varphi(\alpha)) \quad (\varphi \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \alpha \in I).$$

CAPITOLUL 4

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

1. Relații de echivalență

Definiție 4.1.1. *Relație binară ρ pe mulțimea X se numește relație de echivalență, dacă ea posedă următoarele proprietăți:*

- 1) $\forall x \in X \quad x\rho x$ (reflexivitate);
- 2) $\forall x, y \in X \quad (x\rho y \Rightarrow y\rho x)$ (simetrie);
- 3) $\forall x, y, z \in X \quad (x\rho y \text{ și } y\rho z \Rightarrow x\rho z)$ (tranzitivitate).

Exemple.

1. Relația de egalitate a elementelor unei mulțimi arbitrare X ($x, y \in X \quad x\rho y \Leftrightarrow x = y$) este o relație de echivalență.

2. Relația de asemănare a triunghiurilor din plan este o relație de echivalență.

Teorema 4.1.1. *Fie $(\rho_i)_{i \in I}$ – o familie de relații de echivalență pe mulțimea X . Atunci $\rho = \bigcap_{i \in I} \rho_i$ este o relație de echivalență pe mulțimea X .*

Demonstrație. Cum pentru fiecare $x \in X$ avem $(x, x) \in \rho_i$ ($\forall i \in I$), rezultă $(x, x) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i = \rho$, adică ρ este o relație reflexivă.

Fie $x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho$. Atunci $(x, y) \in \rho_i$ ($\forall i \in I$), și cum ρ_i este o relație simetrică, rezultă $(y, x) \in \rho_i$ ($\forall i \in I$) și, prin urmare, $(y, x) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i = \rho$. Așadar, ρ este o relație simetrică.

Fie $x, y, z \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho$ și $(y, z) \in \rho$. Atunci $(x, y) \in \rho_i$ și $(y, z) \in \rho_i$ ($\forall i \in I$). Conform tranzitivității relațiilor ρ_i , avem $(x, z) \in \rho_i$ ($\forall i \in I$), și, prin urmare, $(x, z) \in \rho$. Deci, ρ este o relație tranzitivă. Teorema este demonstrată.

Teorema 4.1.2. *Fie ρ – o relație binară simetrică arbitrară pe mulțimea X . Atunci relația binară*

$$\rho^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n$$

este o relație de echivalență pe mulțimea X .

Demonstrație. Cum $\Delta_X = \rho^0 \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n = \rho^*$, ρ^* este o relație reflexivă.

Pentru a demonstra că ρ^* este o relație simetrică, vom demonstra, utilizând inducția matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, că ρ^n este simetrică. Din condițiile teoremei rezultă, că ρ^1 este o relație simetrică. Vom stabili simetria relației ρ^{n+1} , în presupunerea că ρ^n este simetrică ($n \in \mathbb{N}^*$). Pentru orice $x, z \in X$ din condiția $(x, z) \in \rho^{n+1}$ rezultă existența $y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho^n$ și $(y, z) \in \rho$. Cum ρ^n și ρ sunt relații simetrice, $(z, y) \in \rho$ și $(y, x) \in \rho^n$ și, prin urmare, $(z, x) \in \rho^n \circ \rho = \rho^{n+1}$. Așadar, conform inducției matematice, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ relația ρ^n este simetrică.

Considerând acum elementele arbitrare $x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in \rho^*$, se obține $(x, y) \in \rho^n$ pentru un oarecare $n \in \mathbb{N}$. Din simetria relației ρ^n rezultă $(y, x) \in \rho^n$, și, prin urmare, $(y, x) \in \rho$. Așadar, relația ρ^* este simetrică.

Fie $x, y, z \in X$ – elementele arbitrare din X cu proprietatea $(x, y) \in \rho^*$ și $(y, z) \in \rho^*$. Din modul de definire a lui ρ se obține $(x, y) \in \rho^n$ și $(y, z) \in \rho^m$ pentru careva $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci $(x, z) \in \rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n}$, adică $(x, z) \in \rho^*$, deci relația ρ^* este tranzitivă. Teorema este demonstrată.

Consecință 4.1.1. Pentru fiecare relație binară ρ pe mulțimea X relația

$$\tilde{\rho} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\rho \cup \rho^{-1})^n$$

este o relație de echivalență pe mulțimea X .

Demonstrație. Cum relația $\rho \cup \rho^{-1}$ este simetrică, afirmația rezultă din teorema precedentă.

Definiție 4.1.2. Fie ρ – relație de echivalență pe mulțimea X . Mulțimea

$$[x]_{\rho} = \{y \in X \mid y\rho x\}$$

se numește clasă de echivalență, asociată elementului x prin relația ρ .

Definiție 4.1.3. Mulțimea

$$X/\rho = \{[x]_{\rho} \mid x \in X\}$$

se numește mulțime factor a mulțimii X prin relația ρ .

Exemplu. Considerăm pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relația de echivalență $x\rho y \Leftrightarrow xy > 0$. Atunci

$$\forall x > 0 \Rightarrow [x]_{\rho} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \cdot x > 0\} = (0, +\infty).$$

Similar, pentru fiecare $x < 0$ se obține $[x]_\rho = (-\infty, 0)$. Prin urmare,

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} / \rho = \{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}.$$

Definiție 4.1.4. Fie ρ – o relație de echivalență pe mulțimea X . Aplicația

$$p_{X,\rho} : X \rightarrow X / \rho, \quad p_{X,\rho}(x) = [x]_\rho$$

se numește aplicație canonică a mulțimii X pe mulțimea factor X / ρ .

Teorema 4.1.3. Fie ρ o relație de echivalență pe mulțimea X . Atunci următoarele afirmații sunt juste:

1) fiecare element aparține clasei de echivalență, a cărei reprezentant este el, adică

$$\forall x \in X \Rightarrow x \in [x]_\rho;$$

2) reuniunea tuturor claselor de echivalență formează mulțimea X ,

$$X = \bigcup_{x \in X} [x]_\rho;$$

3) două clase de echivalență sunt egale atunci și numai atunci, când reprezentanții lor sunt echivalenți, adică

$$\forall x, y \in X \quad ([x]_\rho = [y]_\rho \Leftrightarrow x \rho y);$$

4) oricare două clase de echivalență sau coincid sau nu se intersectează, adică

$$\forall x, y \in X \quad ([x]_\rho = [y]_\rho \text{ sau } [x]_\rho \cap [y]_\rho = \emptyset).$$

Demonstrație.

1. Pentru fiecare $x \in X$ din reflexivitatea relației ρ rezultă $x \rho x$, prin urmare, $x \in [x]_\rho$.

2. Cum pentru fiecare $x \in X$ are loc $[x]_\rho \subset X$, rezultă $\bigcup_{x \in X} [x]_\rho \subset X$. Cum pentru fiecare $x \in X$ din afirmația 1) rezultă $x \in [x]_\rho$, deci $x \in \bigcup_{y \in X} [y]_\rho$, și, prin urmare, $X \subset \bigcup_{y \in X} [y]_\rho$.

3. Dacă $[x]_\rho = [y]_\rho$, atunci, conform afirmației 1), $x \in [x]_\rho$, și, prin urmare, $x \in [y]_\rho$, de unde rezultă $x \rho y$.

Dacă $x \rho y$, atunci pentru fiecare $t \in [x]_\rho$ urmează $t \rho x$. Ținând seamă că $x \rho y$ și ρ este o relație tranzitivă, se obține $t \rho y$. Prin urmare, $[x]_\rho \subset [y]_\rho$. Similar se demonstrează incluziunea $[y]_\rho \subset [x]_\rho$.

4. Fie $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ și $t_0 \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Atunci $x\rho t_0$ și $t_0\rho y$, și, prin urmare, $x\rho y$. Atunci, conform afirmației 3), $[x]_\rho = [y]_\rho$.

Teorema 4.1.4. Fie ρ, ρ' - relații de echivalență pe mulțimile X și respectiv Y , $f : X \rightarrow Y$ o funcție cu proprietatea

$$\forall x, y \in X \quad (x\rho y \Rightarrow f(x)\rho' f(y)).$$

Atunci există o funcție unică $\tilde{f} : X/\rho \rightarrow Y/\rho'$, astfel încât

$$\tilde{f} \circ p_{X,\rho} = p_{Y,\rho'} \circ f,$$

adică diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_{X,\rho} \downarrow & & \downarrow p_{Y,\rho'} \\ X/\rho & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y/\rho' \end{array}$$

este comutativă.

Demonstrație.

Existența. Definim $\tilde{f} : X/\rho \rightarrow Y/\rho'$ prin egalitatea $\tilde{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$. Dacă $[x]_\rho = [y]_\rho$, atunci $x\rho y$ și, prin urmare, $f(x)\rho' f(y)$, adică $[f(x)]_{\rho'} = [f(y)]_{\rho'}$. Așadar, definiția funcției este corectă.

Pentru fiecare $x \in X$ se obține

$$\left(\tilde{f} \circ p_{X,\rho}\right)(x) = \tilde{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'} = (p_{Y,\rho'} \circ f)(x),$$

de unde rezultă egalitatea $\tilde{f} \circ p_{X,\rho} = p_{Y,\rho'} \circ f$.

Unicitatea. Fie $\tilde{f} : X/\rho \rightarrow Y/\rho'$ - o funcție, astfel încât $\tilde{f} \circ p_{X,\rho} = p_{Y,\rho'} \circ f$. Atunci pentru fiecare $[x]_\rho \in X/\rho$ avem

$$\tilde{f}([x]_\rho) = \left(\tilde{f} \circ p_{X,\rho}\right)(x) = (p_{Y,\rho'} \circ f)(x) = [f(x)]_{\rho'},$$

adică funcția \tilde{f} numaidecât acționează conform regulei $\tilde{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$.

Teorema 4.1.5. Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție. Atunci sunt juste afirmațiile:

- 1) relația $x_1\rho x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ este o relație de echivalență pe mulțimea X ;
- 2) funcția $\tilde{f} : X/\rho \rightarrow f(X)$, $\tilde{f}([x]_\rho) = f(x)$ este definită corect și este bijectivă;

3) funcția f se reprezintă ca compoziție $f = i_{f(X),Y} \circ \tilde{f} \circ p_{X,\rho}$, unde $i_{f(X),Y} : f(X) \rightarrow Y$, $i_{f(X),Y}(y) = y$, adică diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_{X,\rho}} & X/\rho \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ Y & \xleftarrow{i_{f(X),Y}} & f(X) \end{array}$$

este comutativă.

Demonstrație. Cum 1 și 3 sunt evidente, vom demonstra 2.

Verificăm corectitudinea definiției \tilde{f} . Dacă $[x]_\rho = [y]_\rho$, atunci $y\rho x$ și, prin urmare,

$$\tilde{f}([x]_\rho) = f(x) = f(y) = \tilde{f}([y]_\rho).$$

Cum pentru fiecare $y \in f(X)$ se obține $y = f(x)$ pentru un careva $x \in X$, deci $y = \tilde{f}([x]_\rho)$, rezultă, că funcția \tilde{f} este surjectivă.

Fie $[x]_\rho, [y]_\rho \in X/\rho$ – elementele arbitrare, astfel încât $[x]_\rho \neq [y]_\rho$. Atunci $(x, y) \notin \rho$ și, prin urmare,

$$\tilde{f}([x]_\rho) = f(x) \neq f(y) = \tilde{f}([y]_\rho),$$

adică \tilde{f} este injectivă.

2. Partiție a unei mulțimi

Definiție 4.2.1. O familie de mulțimi $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ se numește partiție a mulțimii nevide X , dacă sunt îndeplinite condițiile:

1) mulțimile X_α nu sunt vide, adică

$$\forall \alpha \in I \Rightarrow X_\alpha \neq \emptyset;$$

2) mulțimile X_j sunt disjuncte, adică

$$\forall \alpha, \beta \in I \quad (\alpha \neq \beta \Rightarrow X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset);$$

3) reuniunea familiei de mulțimi $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ este X , adică

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = X.$$

Mulțimea partițiilor, ce se pot defini pe mulțimea X , se notează cu $Part(X)$.

Exemplu. Familia de mulțimi $X_i = \{n \in \mathbb{Z} \mid n - i \text{ se divide prin } 5\}$, ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) este o partiție a mulțimii \mathbb{Z} .

- (1) Mulțimile X_i nu sunt vide, de exemplu $i \in X_i$, ($i = \overline{0, 4}$).
- (2) Mulțimile X_i sunt disjuncte două câte două. În adevăr, în caz contrar există $x \in X_i \cap X_j$ ($0 \leq i < j < 5$), de unde $5|x - i$ și $5|x - j$. Prin urmare, $5|(x - i) - (x - j)$, de unde $5|j - i$, ceea ce contrazică $0 < j - i < 5$.
- (3) Incluziunea $\bigcup_{i=0}^4 X_i \subset \mathbb{Z}$ este evidentă. Să demonstrăm incluziunea $\mathbb{Z} \subset \bigcup_{i=0}^4 X_i$. Fie $n \in \mathbb{Z}$ un element arbitrar și j - restul de la împărțirea lui la 5. Atunci $n - j$ se divide cu 5, și, prin urmare, $n \in X_j \subset \bigcup_{i=0}^4 X_i$.

Definiție 4.2.2. Două partiții $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ și $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ pe mulțimea X se numesc echivalente (notație $\alpha \sim \beta$), dacă există o funcție bijectivă $f : I \rightarrow J$, astfel încât $X_i = Y_{f(i)}$ oricare ar fi $i \in I$.

Teorema 4.2.1. Relația \sim pe mulțimea $Part(X)$ este o relație de echivalență.

Demonstrație. Pentru fiecare $\alpha = (X_i)_{i \in I} \in Part(X)$, funcția $\mathbf{1}_X : I \rightarrow I$ este o bijecție și $\forall i \in I \quad X_i = X_{\mathbf{1}_X(i)}$. Prin urmare, $\alpha \sim \alpha$, și relația \sim este reflexivă.

Considerăm partițiile arbitrare $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ și $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ pe mulțimea X , astfel încât $\alpha \sim \beta$. Atunci există o funcție bijectivă $f : I \rightarrow J$, astfel încât $\forall i \in I \quad X_i = Y_{f(i)}$. Prin urmare, funcția $f^{-1} : J \rightarrow I$ este bijectivă și $\forall j \in J \quad X_{f^{-1}(j)} = Y_j$, adică $\beta \sim \alpha$. Așadar, relația \sim este simetrică.

Pentru a demonstra tranzitivitatea relației \sim , considerăm partițiile $\alpha = (X_i)_{i \in I}$, $\beta = (Y_j)_{j \in J}$, $\gamma = (Z_k)_{k \in K}$, astfel încât $\alpha \sim \beta$ și $\beta \sim \gamma$. Atunci există funcțiile bijective $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow K$, astfel încât:

$$\forall i \in I \quad X_i = Y_{f(i)} \quad \text{și} \quad \forall j \in J \quad Y_j = Z_{g(j)}.$$

Cum funcția $g \circ f : I \rightarrow K$ este bijectie, și se verifică proprietatea

$$\forall i \in I \quad X_i = Y_{f(i)} = Z_{g(f(i))},$$

rezultă $\alpha \sim \gamma$, și deci, relația \sim este tranzitivă.

Teorema 4.2.2. Fie $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ o partiție a mulțimii X . Atunci relația binară $\rho = \varphi(\alpha)$ pe X , definită astfel

$$\rho = \bigcup_{i \in I} (X_i \times X_i), \quad \text{adică} \quad xpy \Leftrightarrow \exists i \in I \quad x \in X_i \text{ și } y \in X_i, \quad (5)$$

este o relație de echivalență pe mulțimea X .

Demonstrație. Fie $x \in X$ arbitrar. Cum α este o partiție pe X , rezultă, că există $i \in I$ cu proprietatea $x \in X_i$. Așadar, $x\rho x$, și relația ρ este reflexivă.

Fie $x, y \in X$ – două elemente, astfel încât $x\rho y$. Atunci există $i \in I$ cu proprietatea $x \in X_i \wedge y \in X_i$. Rezultă, că $y \in X_i$ și $x \in X_i$, adică $y\rho x$, și relația ρ este simetrică.

Verificăm tranzitivitatea. Fie $x, y, z \in X$, ce verifică condițiile $x\rho y \wedge y\rho z$. Atunci pentru careva $i, j \in I$ avem $x \in X_i \wedge y \in X_i \wedge y \in X_j \wedge z \in X_j$. Cum pentru $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$, rezultă $i = j$ și $x \in X_i \wedge z \in X_i$, adică $x\rho z$, și ρ – tranzitivă.

Teorema 4.2.3. Funcția $\varphi : Part(X) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ definită de (5), verifică următoarele proprietăți:

1) funcția φ este surjectivă;

2) partițiile α și β sunt echivalente atunci și numai atunci, când $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, adică $\forall \alpha, \beta \in Part(X) \quad (\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta))$.

Demonstrație.

1. Fie $\rho \in \mathcal{R}(X)$ – o relație de echivalență arbitrară, $\alpha = (X_i)_{i \in I}$, unde $I = X/\rho$, $X_i = i$. Conform teoremei 4.1.3, familia α este o partiție a mulțimii X .

Conform teoremei 4.1.3, pentru orice $x, y \in X$ condiția $x\rho y$ este echivalentă condiției $x\varphi(\alpha)y$, adică existența $X_i \in X/\rho$ cu proprietățile $x \in X_i \wedge y \in X_i$. În adevăr, dacă $x\rho y$, conform teoremei 4.1.3, putem considera $X_i = [x]_\rho = [y]_\rho$. Dacă pentru un careva $[z]_\rho = X_i$ se verifică proprietățile $x \in X_i \wedge y \in X_i$, atunci în baza definiției 4.1.2, $z\rho x \wedge z\rho y$. Utilizând simetria și tranzitivitatea relației ρ , se obține $x\rho y$.

Așadar, $\varphi(\alpha) = \rho$, deci, funcția φ este surjectivă.

2. Fie partițiile $\alpha = (X_i)_{i \in I}$, $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ – echivalente. Atunci există o funcție bijectivă $f : I \rightarrow J$ cu proprietatea $\forall i \in I \quad X_i = Y_{f(i)}$. Rezultă, că

$\forall x, y \in X \quad x\varphi(\beta)y \Leftrightarrow \exists j \in J \quad x \in Y_j \wedge y \in Y_j \Leftrightarrow \exists i \in I \quad j = f(i) \wedge x \in Y_j \wedge y \in Y_j \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists i \in I \quad x \in X_i \wedge y \in X_i \Leftrightarrow x\varphi(\alpha)y,$

de unde $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Fie acum, că pentru partițiile $\alpha = (X_i)_{i \in I}$ și $\beta = (Y_j)_{j \in J}$ se verifică $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Să demonstrăm, că $\alpha \sim \beta$. Vom verifica, că funcția

$$f : I \rightarrow J, \quad f(i) = j \Leftrightarrow X_i = Y_j$$

este definită corect și este bijectie.

Fixăm un element arbitrar $x \in X_i$. Cum β este o partiție a mulțimii X , există așa un Y_j cu proprietate $x \in Y_j$. Atunci

$$y \in X_i \Leftrightarrow x\varphi(\alpha)y \Leftrightarrow x\varphi(\beta)y \Leftrightarrow y \in Y_j,$$

și, prin urmare, $X_i = Y_j$. Așadar,

$$\forall X_i \in \alpha \quad \exists! Y_j \in \beta \quad X_i = Y_j.$$

Cum partițiile α și β sunt arbitrare, $\forall Y_j \in \beta \quad \exists! X_i \in \alpha \quad X_i = Y_j$, și, prin urmare, funcția f este surjectivă.

Cum diferite elemente ale partițiilor sunt disjuncte două câte două, rezultă, că funcția f este injectivă.

Așadar, funcția $f : I \rightarrow J$ cu $X_i = Y_{f(i)}$ este bijectie, ceea ce demonstrează echivalența $\alpha \sim \beta$.

Consecință 4.2.1. *Funcția*

$$\tilde{\varphi} : Part X / \sim \rightarrow \mathcal{R}(X), \quad \tilde{\varphi}([\alpha]_{\sim}) = \varphi(\alpha) \quad (6)$$

este definită corect și este bijectivă.

Afirmația rezultă din teorema precedentă și teorema 4.1.5.

Teorema 4.2.4. *Fie X - o mulțime nevidă, ρ - o relație de echivalență pe X . Fie $I = X/\rho$, funcția $\mathbf{1}_{X/\rho} : I \rightarrow X/\rho$ și $X_i = \mathbf{1}_{X/\rho}(i)$, $i \in I$. Atunci familia $\alpha = \psi(\rho) = (X_i)_{i \in I}$ este o partiție a mulțimii X .*

Demonstrație. Conform teoremei 4.1.3, au loc proprietățile:

- 1) fiecare clasă de echivalență $X_i \in X/\rho$ este o mulțime nevidă;
- 2) dacă clasele de echivalență $X_i, X_j \in X/\rho$ nu coincid, intersecția lor e vidă;
- 3) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$.

Prin urmare, familia $(X_i)_{i \in I}$ este o partiție a mulțimii X .

Teorema 4.2.5. *Funcția*

$$\tilde{\psi} : \mathcal{R}(X) \rightarrow Part(X) / \sim, \quad \tilde{\psi} = [\psi(\rho)]_{\sim},$$

unde funcția ψ este definită în teorema precedentă și funcția $\tilde{\varphi}$, definită de relația (6), sunt reciproc inverse.

Demonstrație. Pentru fiecare $\rho \in \mathcal{R}(X)$ avem $(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(\rho) = \tilde{\varphi}([\psi(\rho)]_{\sim}) = \varphi(\psi(\rho))$.

Ținând seamă, că

$$\psi(\rho) = (X_i)_{i \in I}, \text{ unde } I = X/\rho, X_i = \mathbf{1}_{X/\rho}(i), i \in I,$$

pentru orice $x, y \in X$ se obține

$$(x, y) \in \varphi(\psi(\rho)) \Leftrightarrow \exists i \in I \ x, y \in X_i \Leftrightarrow \exists i \in X/\rho : x, y \in X_i \Leftrightarrow (x, y) \in \rho.$$

Prin urmare,

$$(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(\rho) = \rho, \text{ și deci, } \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = \mathbf{1}_{\mathcal{R}(X)}.$$

Cum funcția $\tilde{\varphi}$ este bijectivă (a se vedea consecință 4.2.1.), rezultă $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}^{-1}$.

CAPITOLUL 5

NUMERE CARDINALE

1. Mulțimi echivalente. Puterea mulțimii

Definiție 5.1.1. Mulțimile X și Y se numesc echivalente (notație $X \sim Y$), dacă există o bijecție $f : X \rightarrow Y$.

Teorema 5.1.1. Relația \sim este o relație de echivalență pe mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii universale.

Demonstrație. Cum pentru orice mulțime X funcția $\mathbf{1}_X : X \rightarrow X$ este o bijecție, $X \sim X$, adică relația \sim este reflexivă.

Fie date mulțimi arbitrare X, Y cu $X \sim Y$. Atunci există o bijecție $f : X \rightarrow Y$ și, prin urmare, funcția $f^{-1} : Y \rightarrow X$ la fel este o bijecție. Așadar, $Y \sim X$ și relația \sim este simetrică.

Fie mulțimile X, Y, Z și $X \sim Y$, $Y \sim Z$. Atunci există bijecțiile $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Prin urmare, funcția $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ este bijectivă și $X \sim Z$, adică relația \sim este tranzitivă. Teorema este demonstrată.

Teorema 5.1.2. (Cantor)

Mulțimea X nu este echivalentă cu mulțimea tuturor submulțimilor sale.

Demonstrație. Presupunem contrariul, adică $X \sim \mathcal{P}(X)$. Atunci există o funcție bijectivă $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Considerăm mulțimea $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ și elementul $a = f^{-1}(\{A\})$.

Dacă $a \in A$, atunci pentru $x = a$ nu se verifică proprietatea $x \notin f(x)$, prin urmare, $a \notin A$.

Dacă $a \notin A$, atunci pentru $x = a$ se verifică proprietatea $x \notin f(x)$ și, prin urmare, $a \in A$. Contradicție.

Teorema 5.1.3. (Cantor-Bernstein)

Dacă mulțimile X și Y verifică condițiile:

1) mulțimea X este echivalentă cu submulțimea Y_1 din Y ;

2) mulțimea Y este echivalentă cu submulțimea X_1 din X ;

atunci mulțimile X și Y sunt echivalente.

Demonstrație. Din condițiile teoremei rezultă existența funcțiilor bijective $f : X \rightarrow Y_1$ și $g : Y \rightarrow X_1$. Construim șirul de mulțimi:

$$Y_2 = f(X_1), \quad X_2 = g(Y_1), \quad Y_3 = f(X_2), \quad X_3 = g(Y_2), \dots$$

Cum $Y \supset Y_1$, $X \supset X_1$, rezultă $X_1 = g(Y) \supset g(Y_1) = X_2$, $Y_1 \supset Y_2$. Similar se obține $X_2 \supset X_3$, $Y_2 \supset Y_3$ etc.

Așadar, $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$; $Y \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$.

Vom demonstra că

$$X = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (X_{j-1} \setminus X_j) \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j \right), \quad \text{unde } X_0 = X.$$

Considerăm un element arbitrar $x \in X$. Dacă $x \notin \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$, atunci $x \in X_{s-1}$, $x \notin X_s$,

unde $s = \min\{j \mid x \notin X_j\}$. Prin urmare, $x \in X_{s-1} \setminus X_s \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (X_{j-1} \setminus X_j) \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j \right)$.

Incluziunea inversă este evidentă.

Similar se demonstrează și egalitatea

$$Y = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (Y_{j-1} \setminus Y_j) \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} Y_j \right), \quad \text{unde } Y_0 = Y.$$

Cum funcțiile f, g sunt bijective,

$$f(X_{j-1} \setminus X_j) = f(X_{j-1}) \setminus f(X_j) = Y_j \setminus Y_{j+1}, \quad g(Y_{j-1} \setminus Y_j) = X_j \setminus X_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}^*$$

și

$$f \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j \right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} f(X_j) = \bigcap_{j=2}^{\infty} Y_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} Y_j.$$

Așadar, funcția $h : X \rightarrow Y$, definită prin

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j, \\ f(x), & \text{dacă } x \in X_{j-1} \setminus X_j, \text{ unde } j - \text{ impar}, \\ g^{-1}(x), & \text{dacă } x \in X_{j-1} \setminus X_j, \text{ unde } j - \text{ par}, \end{cases}$$

și care se reprezintă prin diagrama următoare:

proprietatea $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Așadar, $\forall i \neq j \quad x_i \neq x_j$, și în baza afirmației 5.2.1, conchidem, că mulțimea $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset X$ este numărabilă.

Afirmație 5.2.3. *Fie mulțimile X și Y – numărabile. Atunci mulțimea $X \cup Y$ este numărabilă.*

Demonstrație. Cum mulțimile X și Y sunt numărabile, au loc reprezentările $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ și $Y = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$. Deci,

$$X \cup Y = \{x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}.$$

Vom exclude din acest șir elementele ce se repetă conform regulei: elementul z_j se exclude dacă există $s < j$ cu proprietatea $z_s = z_j$. În rezultat se obține reprezentarea mulțimii $X \cup Y$ ca șir infinit de elemente disjuncte:

$$X \cup Y = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

Așadar, conform afirmației 5.2.1, conchidem, că mulțimea $X \cup Y$ este numărabilă.

Consecință 5.2.1. *Dacă mulțimile X_j , $j = \overline{1, n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt numărabile, atunci reuniunea lor $\bigcup_{j=1}^n X_j$ la fel este numărabilă.*

Consecința se demonstrează, utilizând afirmația precedentă și metoda inducției matematice.

Afirmație 5.2.4. *Dacă mulțimea X este numărabilă, iar mulțimea Y – infinită, atunci $X \cup Y \sim Y$.*

Demonstrație. Conform afirmației 5.2.2, mulțimea Y conține o submulțime numărabilă Y_1 . Utilizând afirmația 5.2.3, se obține $Y_1 \cup X \sim Y_1$.

Prin urmare,

$$X \cup Y = (X \cup Y_1) \cup (Y \setminus Y_1) \sim Y_1 \cup (Y \setminus Y_1) = Y.$$

Afirmație 5.2.5. *Dacă mulțimile X_j sunt numărabile, $j = 0, 1, 2, \dots$, atunci și reuniunea lor $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ este numărabilă.*

Demonstrație. Reprezentăm mulțimile ca șiruri:

2. Mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} este numărabilă, deoarece ea se reprezintă ca reuniune numărabilă de mulțimi numărabile:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Numărul $\alpha \in \mathbb{R}$ se numește algebric, dacă există un polinom

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$$

cu coeficienți întregi, astfel încât $p(\alpha) = 0$. Mulțimea A a tuturor numerelor algebrice este numărabilă. În adevăr, fie

$$A_n = \left\{ \alpha \in A \mid \exists a_j \in \mathbb{Z} \quad j = \overline{0, n}, \quad a_n \neq 0, \quad \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j = 0 \right\}.$$

Cum fiecărui polinom de gradul n ,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{0, n}, \quad a_n \neq 0,$$

îi corespunde în mod univoc cotejul (a_0, a_1, \dots, a_n) , $a_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{0, n}$, $a_n \neq 0$, rezultă, că mulțimea polinoamelor de gradul n este echivalentă cu mulțimea

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}),$$

și, deci, este numărabilă. Așadar, mulțimea polinoamelor de gradul n se scrie în formă de șir. Vom numerota mulțimea rădăcinilor reale ale primului polinom (o mulțime finită), după ce numerotăm mulțimea rădăcinilor polinomului al doilea (mulțime finită) și așa mai departe. Se obține o reprezentare a mulțimii A_n în formă de șir, prin urmare, A_n este numărabilă. Atunci și mulțimea numerelor algebrice $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ la fel este o mulțime numărabilă.

3. Mulțimi de puterea continuumului. Operații cu numere cardinale

Definiție 5.3.1. *Mulțimea X se numește de puterea continuumului, dacă $\text{Card } X = c$, adică $X \sim R$.*

Exemple.

1. Cum funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg } x$ este bijectivă, rezultă $\text{Card} \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = c$.

2. Cum funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este bijectivă, rezultă $\text{Card}(0, +\infty) = c$.

3. Cum pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, avem $(a, b) \sim (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, bijecția între aceste mulțimi este realizată, de exemplu, de funcția $f : (a, b) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}$, rezultă, că $\text{Card}(a, b) = c$.

4. Conform afirmației 5.2.4,

$$[0, 1] = (0, 1) \cup \{0, 1\} \sim (0, 1),$$

prin urmare, $\text{Card}[0, 1] = c$.

Definiție 5.3.2. Fie α, β - numere cardinale, X, Y - mulțimi, $\text{Card } X = \alpha$, $\text{Card } Y = \beta$. Se spune că numărul α este mai mic sau egal cu β (notație $\alpha \leq \beta$), dacă există o submulțime $Y_1 \subset Y$, astfel încât $Y_1 \sim X$.

Se spune că α este strict mai mic ca β (notație $\alpha < \beta$), dacă $\alpha \leq \beta$ și $\alpha \neq \beta$.

Afirmație 5.3.1. Fie α, β, γ - numere cardinale. Atunci:

- 1) $\alpha \leq \alpha$ (reflexivitate);
- 2) $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ (simetrie);
- 3) $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ (tranzitivitate).

Demonstrație. Fie X, Y, Z - mulțimi cu $\text{Card } X = \alpha$, $\text{Card } Y = \beta$, $\text{Card } Z = \gamma$.

1. Cum $X \sim X$, rezultă $\alpha \leq \alpha$.

2. Din condițiile $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha$ rezultă, că există așa mulțimi $X_1 \subset X$ și $Y_1 \subset Y$ cu $X_1 \sim Y$ și $Y_1 \sim X$. Conform teoremei Cantor-Bernstein, $X \sim Y$, de unde rezultă $\alpha = \beta$.

3. Dacă $\alpha \leq \beta$ și $\beta \leq \gamma$, atunci există mulțimile $Y_1 \subset Y$ și $Z_1 \subset Z$, astfel încât $Y_1 \sim X$ și $Z_1 \sim Y$. Fie $f : X \rightarrow Y_1$, $g : Y \rightarrow Z_1$ bijecții și $Z_2 = g(Y_1) \subset Z$. Atunci funcția $h : X \rightarrow Z_2$, $h(x) = g(f(x))$ este bijecție, ca compoziție de funcții bijective. Rezultă $X \sim Z_2$, și, prin urmare, $\alpha \leq \gamma$.

Afirmație 5.3.2. Fie X, Y - mulțimi. Următoarele afirmații sunt adevărate:

- 1) dacă există o funcție injectivă $f : X \rightarrow Y$, atunci $\text{Card } X \leq \text{Card } Y$;
- 2) dacă există o funcție surjectivă $f : X \rightarrow Y$, atunci $\text{Card } Y \leq \text{Card } X$;

Demonstrație.

1. Fie $f(X) = Y_1 \subset Y$. Atunci $X \sim Y_1$, deoarece funcția $g : X \rightarrow Y_1$, $g(x) = f(x)$ este bijecție. Rezultă, că $\text{Card } X \leq \text{Card } Y$.

2. Vom alege din fiecare mulțime a familiei de mulțimi nevide disjuncte două câte două $(f^{-1}\{y\})_{y \in Y}$ câte un element și vom forma din ele mulțimea X_1 . Atunci $X_1 \sim Y$, deoarece funcția $g : X_1 \rightarrow Y$, $g(x) = f(x)$ este bijecție. Rezultă $\text{Card } Y \leq \text{Card } X$.

Afirmație 5.3.3. Fie $\text{Card } X = c$, $\text{Card } Y = c$. Atunci $\text{Card}(X \times Y) = c$.

Demonstrație. Cum $X \sim (0, 1)$ și $Y \sim (0, 1)$, rezultă, că $X \times Y \sim (0, 1) \times (0, 1)$, deci, este suficient să verificăm, dacă $\text{Card}((0, 1) \times (0, 1)) = c$.

Cum funcția $f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x, y) = x$ este surjectivă, rezultă

$$c = \text{Card}(0, 1) \leq \text{Card}((0, 1) \times (0, 1)).$$

Considerăm funcția $g : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, care pune în corespondență fiecărui cuplu de numere $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ scrise în sistemul binar de numerație $x = 0.x_1x_2x_3\dots$, $y = 0.y_1y_2y_3\dots$ (nu vom folosi reprezentarea numerelor în formă de fracție zecimală, ce se termină cu o infinitate de unități) numărul $z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$, considerat în sistemul zecimal de numerație. Cum funcția g este injectivă, rezultă

$$\text{Card}((0, 1) \times (0, 1)) \leq \text{Card}(0, 1) = c.$$

Așadar, $\text{Card}(X \times Y) = \text{Card}((0, 1) \times (0, 1)) = c$.

Consecință 5.3.1. Dacă $\text{Card } X_i = c$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\text{Card}(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) = c$.

Afirmație 5.3.4. Dacă $\text{Card } X = c$, $\text{Card } Y = c$, atunci $\text{Card}(X \cup Y) = c$.

Demonstrație. Cum $X \subset X \cup Y$, rezultă $\text{Card}(X \cup Y) \geq \text{Card } X = c$.

Cum $\text{Card } X = c$, $\text{Card } Y = c$, rezultă, că există funcții bijective $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, $v : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Definim funcția $f : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R} \times \{1, 2\}$,

$$f(x) = \begin{cases} (u(x), 1), & \text{dacă } x \in X, \\ (v(x), 2), & \text{dacă } x \in Y \setminus X. \end{cases}$$

Cum f – injectivă, rezultă

$$\text{Card}(X \cup Y) \leq \text{Card}(\mathbb{R} \times \{1, 2\}) \leq \text{Card}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = c.$$

Afirmație 5.3.5. Dacă $\text{Card } X_i = c$, ($i \in I$) și $1 \leq \text{Card } I \leq c$, atunci $\text{Card}(\bigcup_{i \in I} X_i) = c$.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă existența funcțiilor bijective $u_i : \mathbb{R} \rightarrow X_i$, ($i \in I$).

Definim funcția

$$f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i, \quad f(x, i) = u_i(x).$$

Cum funcția f este surjecție, rezultă

$$\text{Card} \bigcup_{i \in I} X_i \leq \text{Card}(\mathbb{R} \times I) = c.$$

Pe de altă parte,

$$\text{Card} \bigcup_{i \in I} X_i \geq \text{Card} X_k = c, \quad (k \in I).$$

Prin urmare, $\text{Card} \bigcup_{i \in I} X_i = c$.

Definiție 5.3.3. Fie $(\alpha_i)_{i \in I}$ - o familie de numere cardinale, $(X_i)_{i \in I}$ - o familie de mulțimi cu $\text{Card} X_i = \alpha_i$ ($i \in I$).

(1) Vom numi suma familiei $(\alpha_i)_{i \in I}$ numărul cardinal

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \text{Card} \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right).$$

(2) Vom numi produsul familiei $(\alpha_i)_{i \in I}$ numărul cardinal

$$\prod_{i \in I} \alpha_i = \text{Card} \left(\prod_{i \in I} X_i \right).$$

Definiție 5.3.4. Fie α, β - numere cardinale, X, Y - mulțimi de puterea α și respectiv β . Numărul cardinal α^β se definește astfel:

$$\alpha^\beta = \text{Card} (X^Y), \quad \text{unde } X^Y = \{f \mid f : Y \rightarrow X\}.$$

Exercițiu. Să se demonstreze că definiția precedentă este corectă, adică α^β nu depinde de alegerea reprezentanților X și Y .

Afirmație 5.3.6. Următoarele afirmații sunt juste:

- 1) dacă $\text{Card} X = \alpha$, atunci $2^\alpha = \text{Card} \mathcal{P}(X)$;
- 2) $\alpha < 2^\alpha$, oricare ar fi numărul cardinal α ;
- 3) $2^{\aleph_0} = c$;
- 4) $\aleph_0 < c$.

Demonstrație.

1. Conform definiției 5.3.4,

$$2^\alpha = \text{Card}\{f \mid f : X \rightarrow \{0, 1\}\}.$$

Definim funcția

$$g : \{f \mid f : X \rightarrow \{0, 1\}\} \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad g(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}.$$

Cum funcția g este bijectie, rezultă $\{f \mid f : X \rightarrow \{0, 1\}\} \sim \mathcal{P}(X)$, și, prin urmare, $2^\alpha = \text{Card } \mathcal{P}(X)$.

2. Fie $\text{Card } X = \alpha$. Conform teoremei Cantor și punctului 1), se obține

$$2^\alpha = \text{Card } \mathcal{P}(X) > \text{Card } X = \alpha.$$

3. În baza punctului 1), este suficient să arătăm, că $\text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$. Definim funcția $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$,

$$f(A) = 0.x_0x_1x_2\dots, \quad \text{unde } x_j = \begin{cases} 0, & \text{dacă } j \notin A, \\ 1, & \text{dacă } j \in A, \end{cases}$$

și numărul $0.x_0x_1x_2\dots$ este scris în sistemul zecimal de numerație. Cum funcția f este injectivă, $\text{Card } \mathcal{P}(X) \leq \text{Card}[0, 1] = c$.

Definim funcția $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$, ce acționează după aceeași regulă ce și f , doar că numărul $0.x_0x_1x_2\dots$ se consideră scris în sistemul binar de numerație. Funcția g este surjectivă și, prin urmare, $\text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) \geq \text{Card}[0, 1] = c$. Așadar, $\text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$.

4. Rezultă din afirmațiile 2 și 3.

Exerciții. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale numerelor cardinale:

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$

2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha;$

3. $\sum_I \alpha = \alpha \cdot \text{Card } I, \quad \prod_I \alpha = \alpha^{\text{Card } I};$

4. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma, \quad \forall i \in I \quad \alpha_i \leq \beta_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i \in I} \alpha_i \leq \sum_{i \in I} \beta_i, \quad \prod_{i \in I} \alpha_i \leq \prod_{i \in I} \beta_i;$

5. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^\beta \leq \alpha_2^\beta, \quad \beta^{\alpha_1} \leq \beta^{\alpha_2}.$

CAPITOLUL 6

NUMERE ORDINALE

1. Mulțimi ordonate

Definiție 6.1.1. *Relația binară ρ pe mulțimea X se numește relație de ordine, dacă verifică următoarele condiții:*

- 1) $\forall x \in X \Rightarrow x\rho x$ (reflexivitate);
- 2) $\forall x, y \in X \quad (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ (anitsimetrie);
- 3) $\forall x, y, z \in X \quad (x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$ (tranzitivitate).

O mulțime pe care este definită o relație de ordine, se numește mulțime ordonată.

Exemple.

1. Relația de divizibilitate pe mulțimea \mathbb{N}^* :

$$x\rho y \Leftrightarrow x|y.$$

2. Relația de incluziune pe mulțimea $\mathcal{P}(X)$:

$$A\rho B \Leftrightarrow A \subset B.$$

3. Relația de ordine naturală pe \mathbb{R} :

$$x\rho y \Leftrightarrow x \leq y.$$

Definiție 6.1.2. *Fie (X, \leq) – o mulțime ordonată, $A \subset X$. Elementul $a \in X$ se numește*

- (1) *element maximal al mulțimii A , dacă $a \in A$ și pentru fiecare $x \in X$ condiția $x > a$ implică $x \notin A$, adică oricare ar fi $b \in A$, cu proprietatea $a \leq b$, atunci $a = b$;*
- (2) *element minimal al mulțimii A , dacă $a \in A$ și pentru fiecare $x \in X$ condiția $x < a$ implică $x \notin A$, adică oricare ar fi $b \in A$ cu proprietatea $b \leq a$, atunci $a = b$;*
- (3) *majorant pentru mulțimea A , dacă fiecare element al mulțimii A nu întrece a (nu se cere condiția $a \in A$);*

(4) *minorant pentru mulțimea A, dacă a nu întrece fiecare element al mulțimii A (nu se cere condiția $a \in A$).*

Exemplu. Fie relația de ordine pe mulțimea $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ este definită cu ajutorul grafului (fig. 19) ($x \leq y$, dacă de la x la y putem trece pe muchiile grafului în direcția indicată de săgeți) și fie $A = \{a, b, c, f\}$. Atunci h – majorant al mulțimii A , a – minorant, f, c – elemente maximale, a – element minimal al mulțimii A .

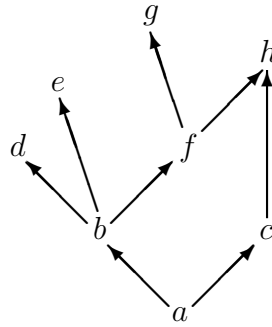


Fig. 19

Definiție 6.1.3. *Mulțimile ordonate (X_1, ρ_1) , (X_2, ρ_2) se numesc izomorfe (se notează $X_1 \simeq X_2$), dacă există o funcție bijectivă $f : X_1 \rightarrow X_2$, astfel încât:*

$$\forall x, y \in X_1 \quad (x \rho_1 y \Leftrightarrow f(x) \rho_2 f(y)).$$

În așa caz funcția f se numește izomorfism.

Afirmație 6.1.1. *Relația binară de izomorfism al mulțimilor ordonate este o relație de echivalență.*

Definiție 6.1.4. *Vom numi număr ordinal al mulțimii ordonate X (notație \overline{X}) mulțimea tuturor mulțimilor ordonate, izomorfe cu X .*

Notație. Numărul ordinal al mulțimii numerelor naturale se notează cu ω , adică $\overline{\mathbb{N}} = \omega$.

Definiție 6.1.5. *Mulțimea ordonată (X, ρ) se numește total ordonată, dacă pentru orice $x, y \in X$ se verifică cel puțin una din relațiile $x \rho y$ sau $y \rho x$.*

Exemple.

1. Mulțimea \mathbb{R} cu relația naturală de ordine \leq .
2. Mulțimea \mathbb{C} cu relația de ordine

$$(x_1 + iy_1) \rho (x_2 + iy_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \quad \text{este total ordonată.}$$

Observație 6.1.1. Dacă puterile mulțimilor total ordonate coincid, nu rezultă că aceste mulțimi sunt izomorfe. În adevăr,

$$\text{Card } \mathbb{Z} = \text{Card } \mathbb{N} = \aleph_0,$$

dar (\mathbb{Z}, \leq) și (\mathbb{N}, \leq) nu sunt izomorfe, deoarece în \mathbb{Z} nu există element minimal, pe când în \mathbb{N} există (la izomorfism, elementul minimal trece în element minimal).

2. Mulțimi bine ordonate

Definiție 6.2.1. O mulțime total ordonată se numește bine ordonată, dacă orice submulțime nevidă a ei are un element minimal.

Tipul de ordine al mulțimilor bine ordonate se numește număr ordinal.

Exemple.

1. Mulțimea \mathbb{N} cu relația de ordine naturală este bine ordonată.
2. Mulțimea \mathbb{Z} cu relația de ordine naturală nu este bine ordonată, deoarece nu are element minimal.

Teorema 6.2.1. Fie (A, \leq) – o mulțime bine ordonată, $P(x)$ – proprietate ce depinde de elementul $x \in A$. Dacă se verifică condițiile:

- 1) $P(a)$ – este adevărată pentru $a = \min A$;
- 2) pentru fiecare $x \in A$, $x \neq a$ din $P(y)$ – adevărată pentru orice $y \in A$, $y < x$, rezultă $P(x)$ – adevărată;

atunci, pentru orice $x \in A$ proprietatea $P(x)$ este adevărată.

Demonstrație. Admitem contrariul, adică

$$B = \{x \in A \mid P(x) \text{ – falsă}\} \neq \emptyset.$$

Atunci, cum A – bine ordonată, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, rezultă, că există $b = \min B$. Dacă $b = a$, atunci obținem o contradicție cu 1). Dacă însă $b \neq a$, atunci pentru fiecare $y < b$ rezultă $y \notin B$, adică $P(y)$ – adevărată și totodată $P(b)$ – falsă, ce contrazice 2).

Teorema 6.2.2. Fie (A, \leq) – o mulțime bine ordonată, $f : A \rightarrow A$ o funcție injectivă, ce verifică proprietatea

$$\forall x, y \in A \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)). \quad (8)$$

Atunci pentru orice $a \in A$ are loc $f(a) \geq a$.

Demonstrație. Fie mulțimea $M = \{a \in A \mid f(a) < a\}$ nu este vidă. Atunci cum A este bine ordonată, $M \subset A$, există $m = \min M$. Din condiția $m \in M$ rezultă, că $f(m) < m$. Cum are loc (8) și f este injectivă, se obține $f(f(m)) < f(m)$. Așadar, $f(m) \in M$, ce contrazice ipoteza că m este element minimal. Contradicția obținută demonstrează justetea afirmației inițiale.

Definiție 6.2.2. Se numește segment al mulțimii bine ordonate A , determinat de elementul $a \in A$, mulțimea bine ordonată

$$A_a = \{x \in A \mid x < a\}.$$

Teorema 6.2.3. Nu există o aplicație injectivă, ce păstrează relația de ordine, dintr-o mulțime bine ordonată (A, \leq) într-un segment al ei, adică așa o aplicație injectivă $f : A \rightarrow A_\alpha$ cu proprietatea

$$\forall x, y \in A \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$$

Demonstrație. Fie $f : A \rightarrow A_\alpha$ – o aplicație injectivă, ce păstrează relația de ordine. Atunci, conform teoremei precedente, $f(a) \geq a$, adică $f(a) \notin A_\alpha$. Contradicție.

Definiție 6.2.3. Fie α, β – numere ordinale, A, B – mulțimi bine ordonate cu $\overline{A} = \alpha$, $\overline{B} = \beta$. Se spune că $\alpha \leq \beta$, dacă A este izomorfă cu B sau cu un segment al mulțimii B .

Teorema 6.2.4. Fie α, β, γ – numere ordinale. Atunci au loc următoarele proprietăți:

- 1) $\alpha \leq \alpha$ (reflexivitate);
- 2) $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ (antisimetrie);
- 3) $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ (tranzitivitate).

Demonstrație.

1. Fie A – o mulțime bine ordonată și $\overline{A} = \alpha$. Cum A este izomorfă cu A , rezultă $\alpha \leq \alpha$.

2. Fie A, B – mulțimi bine ordonate, astfel încât $\overline{A} = \alpha$, $\overline{B} = \beta$.

Presupunem $\alpha \neq \beta$, adică A și B nu sunt izomorfe. Atunci, cum $\alpha \leq \beta$ și $\beta \leq \alpha$, rezultă existența elementelor $a \in A$, $b \in B$ cu proprietățile $A \simeq B_b$ și $B \simeq A_\alpha$. Fie $f : A \rightarrow B_b$,

$g : B \rightarrow A_\alpha$ – izomorfismele respective. Atunci $g \circ f : A \rightarrow A_\alpha$ este o aplicație injectivă ce păstrează ordinea, care este o contradicție cu teorema 6.2.3. Prin urmare, $\alpha = \beta$.

3. Fie A, B, C – mulțimi bine ordonate, $\bar{A} = \alpha$, $\bar{B} = \beta$, $\bar{C} = \gamma$. Dacă $\alpha = \beta$ și $\beta \leq \gamma$ sau $\alpha \leq \beta$ și $\beta = \gamma$, evident $\alpha \leq \gamma$. A rămas de considerat cazul $\alpha < \beta$ și $\beta < \gamma$.

Atunci există elementele $b \in B$ și $c \in C$, pentru care $A \simeq B_b$, $B \simeq C_c$. Fie $f : A \rightarrow B_b$, $g : B \rightarrow C_c$ – izomorfismele respective. Atunci

$$\begin{aligned} g(B_b) &= \{g(x) \mid x \in B_b\} = \{g(x) \mid x \in B \wedge x < b\} = \\ &= \left| y = g(x) \right| = \{y \mid y \in C_c \wedge y < g(b)\} = \\ &= \{y \mid y \in C \wedge y < g(b)\} = C_{g(b)} \end{aligned}$$

Prin urmare, funcția $g \circ f : A \rightarrow C_{g(b)}$ este izomorfism, și, deci, $\alpha \leq \gamma$.

Teorema 6.2.5. *Mulțimea $W(x)$ a tuturor numerelor ordinale, mai mici ca numărul ordinal α , este bine ordonată și $\overline{W(\alpha)} = \alpha$.*

Demonstrație. Fie A – o mulțime bine ordonată cu $\bar{A} = \alpha$. Considerăm aplicația

$$f : A \rightarrow W(\alpha), \quad a \rightarrow \bar{A}_a \quad (a \in A).$$

Dacă $a, b \in A$, $a < b$, atunci $A_a = (A_b)_a$, rezultă $f(a) < f(b)$, adică aplicația f păstrează relația de ordine și este injectivă.

Pentru a demonstra surjectivitatea lui f considerăm un element arbitrar $\beta \in W(\alpha)$ și mulțimea bine ordonată B cu $\bar{B} = \beta$. Cum $\beta < \alpha$, rezultă existența elementului $a \in A$, astfel încât $B \simeq A_a$. Prin urmare, $f(a) = \bar{A}_a = \bar{B} = \beta$ și f – surjectivă. Așadar, aplicația f este bijectivă și păstrează relația de ordine, adică f – izomorfism. Rezultă, că $W(\alpha) \simeq A$ și $\overline{W(\alpha)} = \bar{A} = \alpha$.

Teorema 6.2.6. *Oricare două numere ordinale α, β sunt comparabile între ele, adică se verifică cel puțin una din condițiile $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.*

Demonstrație. Cum mulțimile $A = W(\alpha)$, $B = W(\beta)$ sunt bine ordonate și mulțimea $C = A \cap B$ este bine ordonată. Vom nota $\gamma = \bar{C}$ și vom demonstra, că $\gamma \leq \alpha$.

Dacă $C = A$, atunci $\gamma = \bar{C} = \bar{A} = \alpha$.

Dacă $C \neq A$, atunci vom demonstra, că $C = A_{\gamma_1}$, unde $\gamma_1 = \min(A \setminus C)$ (atunci se obține egalitatea $\gamma_1 = \gamma$). Pentru fiecare $\tau \in C$ elementele τ și γ_1 sunt comparabile între

ele, deoarece $\tau, \gamma_1 \in A$. Dacă $\gamma_1 \leq \tau$, atunci cum

$$\tau < \alpha \wedge \tau < \beta \quad (\tau \in C = W(\alpha) \cap W(\beta)),$$

rezultă, ținând seamă de tranzitivitate $\gamma_1 < \alpha \wedge \gamma_1 < \beta$, de unde $\gamma_1 \in C$, ceea ce este imposibil. Rezultă $\tau < \gamma_1$, adică $\tau \in A_{\gamma_1}$. Invers, pentru fiecare $\tau \in A_{\gamma_1}$ se obține $\tau < \gamma_1$, de unde rezultă $\tau \notin A \setminus C$ (deoarece $\gamma_1 = \min(A \setminus C)$), și, deci $\tau \in C$. Așadar $C = A_{\gamma_1}$.

Similar se demonstrează $\gamma \leq \beta$.

Condițiile $\gamma < \alpha$ și $\gamma < \beta$ concomitent nu se verifică, deoarece în caz contrar $C = A_\gamma$ și $C = B_\gamma$, de unde rezultă $\gamma \in A \setminus C$ și $\gamma \in B \setminus C$, adică $\gamma \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = \emptyset$ – imposibil.

Prin urmare, $\gamma = \alpha$ și $\gamma \leq \beta$ sau $\gamma \leq \alpha$ și $\gamma = \beta$. Astfel se verifică $\alpha \leq \beta$ sau $\beta \leq \alpha$.

3. Axioma alegerii și forme echivalente ale ei

AXIOMA ALEGERII. Pentru orice familie $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de mulțimi nevide există o funcție

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha,$$

astfel încât pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$ are loc $f(\alpha) \in X_\alpha$.

Definiție 6.3.1. Vom numi lanț într-o mulțime ordonată orice submulțime total ordonată a acestei mulțimi.

Vom numi lanț maximal într-o mulțime ordonată, lanțul A , pentru care nu există așa un lanț B , astfel încât $A \subset B$, $A \neq B$.

TEOREMA LUI HAUSDORFF. Orice lanț într-o mulțime ordonată se conține într-un lanț maximal.

LEMA LUI ZORN. Dacă orice lanț al mulțimii ordonate X posedă majorant, atunci orice element al mulțimii X nu întrece un careva element maximal.

TEOREMA LUI ZERMELO. Fie X o mulțime nevidă. Atunci există așa o relație \leq , astfel încât (X, \leq) este total ordonată.

Consecință 6.3.1. Oricare două numere cardinale sunt comparabile între ele.

Demonstrație. Fie α, β – două numere cardinale arbitrare, A, B – mulțimi de puterea α și respectiv β . Fie \leq_A, \leq_B – relații ce bine ordonează A , respectiv B . Conform teoremei 6.2.6, numerele ordinale sunt compatibile, are loc una dintre relațiile

$$\bar{A} < \bar{B}, \quad \bar{A} = \bar{B}, \quad \bar{A} > \bar{B}.$$

Dacă $\bar{A} < \bar{B}$, există izomorfismul

$$f : A \rightarrow B_b,$$

și, prin urmare, $A \sim B_b$, de unde rezultă

$$\alpha = \text{Card } A \leq \text{Card } B = \beta.$$

Analog, pentru $\bar{A} = \bar{B}$, $\bar{A} > \bar{B}$, se obține $\alpha = \beta$, respectiv $\alpha \geq \beta$.

Așadar, oricare ar fi numerele cardinale α, β sau $\alpha \leq \beta$ sau $\alpha \geq \beta$.

Teorema 6.3.1. *Axioma alegerii, teorema lui Hausdorff, lema lui Zorn, teorema Zermelo sunt afirmații echivalente.*

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [7].

Bibliografie

- [1] Năstăsescu C. Introducere în teoria mulțimilor. – București: Ed. did. și Ped., 1974.
- [2] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.
- [3] Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965.
- [4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
- [5] Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969.
- [6] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 1995.
- [7] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Гостехиздат, 1957.
- [8] Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.
- [9] Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М., 1968.
- [10] Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.
- [11] Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.-Л.: Тех. теорет. лит., 1937.

CUPRINSUL

Capitolul 1. MULȚIMI	3
1. Noțiunea de mulțime	3
2. Moduri de definire a mulțimilor	5
3. Relația de incluziune a mulțimilor	5
4. Mulțimea universală	7
5. Operații cu mulțimi	7
Capitolul 2. CORESPONDENȚE	15
1. Corespondența între două mulțimi	15
2. Imagine directă și imagine inversă a unei mulțimi	16
3. Compunerea corespondențelor. Inversa unei corespondențe	19
4. Relație binară	23
Capitolul 3. FUNCȚII	25
1. Noțiunea de funcție	25
2. Restricția și prelungirea unei funcții	25
3. Compunerea și inversarea funcțiilor	26
4. Funcții injective, surjective, bijective	27
5. Monomorfisme, epimorfisme, izomorfisme	28
6. Familie de elemente, familie de mulțimi	30
7. Sumă directă și produs direct a unei familii de mulțimi	32
Capitolul 4. RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ	36
1. Relații de echivalență	36
2. Partiție a unei mulțimi	40
Capitolul 5. NUMERE CARDINALE	45
1. Mulțimi echivalente. Puterea mulțimii	45

2. Mulțimi numărabile	47
3. Mulțimi de puterea continuumului. Operații cu numere cardinale	50
Capitolul 6. NUMERE ORDINALE	55
1. Mulțimi ordonate	55
2. Mulțimi bine ordonate	57
3. Axioma alegerii și forme echivalente ale ei	60
Bibliografie	62