Echilibrul dinamic stocastic general şi ciclurile de business

Note de curs pentru masteranzi şi doctoranzi. Curs de Macroeconomie IV, Universitatea Oxford.

Florin O. Bilbiie
Nuffeld College, Universitatea Oxford.
Noiembrie 2006

Nu este nimic original în acest curs de lecții; ele au fost scrise în baza lucrărilor publicate de alți autori, a conspectelor de lecții studiate de mine în calitate de student şi în baza propriilor cercetări. Îi mulțumesc dlui Fabian Eser pentru că a citit precedentul draft şi s-a dat cu părerea, domnilor John Bluedorn, Chris Bowdler şi Roland Meeks pentru discuțiile privind organizarea materialului, la fel şi dlui Fabio Fgironi pentru că s-a împărtăşit cu experiența în predarea cursului de macroeconomie pentru doctoranzi.

Cuprins

Capitolul 1

1 Preliminar

1.1 De ce se doreşte? Obiectivul cursului.

Acest curs este destinat pentru a atinge trei obiective:

1. Familiarizarea dvs cu modul prin care macroeconomia modernă prin intermediul teoriei economice încearcă să explice fluctuaţiile ciclurilor de afaceri, şi anume, prin co-mişcarea seriilor macroeconomice temporale.

2. Concomitent cu 1. se va studia starea de lucruri în arta tehnicilor de modelare.

3. Dezvoltarea intuiţiei dvs economice care, în confruntarea cu 2, pare să fie de o importanţă secundară; se va incerca evitarea acestei capcane.

În cîteva cuvinte: pentru a înţelege ciclurile de afaceri se vor folosi modele dinamice stocastice de echilibru general (DSGE) şi, în special, evoluţia în comun a seriilor temporale macroeconomice. De ce este necesar de a examina acest cadru în prim plan?

De ce dinamic? Deciziile din lumea economică reală sunt dinamice: să ne referim la deciziile privind economii-consum, acumularea de avere, etc. De ce stocastic? Lumea care ne înconjoară este incertă, şi această incertitudine elementară poate fi o sursă de instabilitate economică. Se discută mult şi la nesfîrşit privind sursele exacte de incertitudine evidenţiate anterior. De ce **echilibru general**? Teoria Echilibrului General impune disciplină. Deciziile agenţilor sunt interconexe (decizia gospodarilor de a consuma interacţionează cu decizia lor de a investi în orice active accesibile şi a destina timpul pentru lucru, însă şi asupra deciziilor firmelor de a oferi bunuri de consum şi de a folosi factori de producere – cum ar fi munca şi capitalul – pentru a produce aceste bunuri). Aceste interacţiuni importante au loc pe pieţe, şi (în condiţiile, cel puţin, a competitivităţii perfecte) vor exista preţuri care vor le vor curăţa. Ceea ce necesită răspunsuri la întrebările privind volumul pieţei, ne curăţarea unor pieţe, stabilirea preţurilor şi alte neînţelegeri. Asupra acestor probleme (sunt importante sau nu aceste neînţelegeri) iarăşi se dau discuţii interminabile de proporţii şi aceste probleme se va încerca de soluţionat.

Ceea mai mare parte din teoria elaborată va fi canalizată spre modelele cu perturbaţii, în care „şocurile tehnologice” sunt privite ca sursa principală a fluctuaţiilor: modelele ciclurilor de afaceri reale (RBC), originea cărora se trage de la Kyndall şi Prescott (1982)[1].

Nu se va percepe acest model ca unul exhaustiv, se va renunţa la ideea de a percepe acest model (deşi mulţi oameni procedează astfel), dar s-a accepta că acest model constituie un cadru util. Şi anume se doreşte de a vedea cât de departe putem porni în explicarea fluctuaţiilor dacă folosim modelul fără perturbaţii şi, important, ce nu poate fi explicat, şi care ipoteze necesită a fi atenuate pentru a explica orice enigmă. Totodată se doreşte de a avea un vehicol pentru înţelegerea conceptului teoretic de bază, dezvoltarea intuiţiei şi, important, să discutăm despre bunăstare.

Este important de a ţine minte ca tehnicile studiate pe parcursul acestui curs la momentul actual sunt folositeîn diverse domenii ale macroeconomiei, destul de independent de părerea cuiva referitor la prezenţa sau lipsa acolo a neînţelegilelor (cum ar fi volumul pieţei de mărfuri sau pieţele de muncă, impozitare distorsionată, etc.) şi sursa de fluctuaţii. Vom aduce un exemplu remarcabil, politica monetară modernă la fel foloseşte modele de tip DSGE , care incorporează modele de bază fără perturbaţii ca uc caz special.

[1] Ceva care deseori se scapă din vedere sau se uită este că Kydland şi Prescozz nu au încercat să arăte că tehnologia „reală”, şocurile tehnologice sunt în stare să explice grosul fluctuaţiilor. Întradevăr, modelul dînşilor original de asemenea prezintă rigidităţile nominale (inflexibilitatea salariului tarifar) care permite ca tulburările nominale să aibă un efect real. Adevărul e că şocurile tehnologice relatate pentru majoritatea fluctuaţiilor reiesă din acest model mai larg şi nu sunt impuse apriori.

Aceste modele[2] , care se vor vedea ulterior, extind cadrul modelului prin introducerea ajustării imperfecte de prețuri şi competiție monopolistă. Două implicări importante de acest genîn comparație cu modelul RBC, 1. Politica monetară influențează alocarea de resurse reale; 2. Alte şocuri decât acelea tehnologicejoacă un rol crucial în explicarea fluctuațiilor. Un bun reper în înțelegerea acestei literaturi excelenta carte „Interest and Prices" de Michael Woodford (2003)

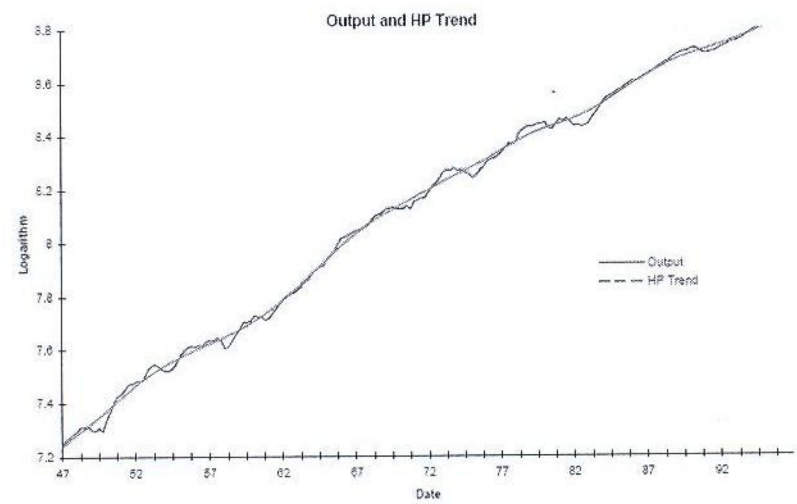
Citiți Lucas (2005), Review of Economic Dynamics.

1.2 Ce se încearcă de a explica? Date stilate

VEZI King and Rebelo Capitolul 2 şi/sau Coolez and Prescott Capitolul 6.

Teoria prezentată va încearca să explice fluctuațiile ciclurilor de afaceri şi ,în special, mişcarea în comun a variabilelor macroeconomice în jurul unui trend. Despre acest trend poate fi spus „cale de creştere balansată", şi anume stare de echilibru în modelele de creştere studiate anterior. Teoria ciclurilor de afaceri în studiul fluctuațiilor pe termen scurt foloseşte aceleaşi modele. Ea purcede la documentarea unor statistici privind seriile temporale macroeconomice, ca apoi să construiască o economie „artificială" (modelul ciclurilor de afaceri) cu scopul de o reproduce. E important, deoarece realitatea stilizată făcând parte atât din modelul de creştere (evoluție de lungă durată), cât şi din modelul ciclurilor de afaceri (evoluție de scurtă durată) este obținută în baza datelor proxy. Teoria ciclurilor de afaceri se referă la construirea unui model în stare să explice dualitatea datelor.

Un moment important (însă ne lipsit de consecințe) la analiza datelor constă tocmai tocmai în luarea deciderilor în vederea extragerii din setul de date a informației privind afacerile ciclice, şi anume, de a elimina trendul. Este o „industrie" întreagă, care porneşte de la o simplă logaritmare în diferențe finite a datelor primare sau utilizarea filtrului Hodrick-Prescott (HP) pînă la metode mult mai sofisticate. Filtrul HP de prima dată a fost folosit de Hodrick şi Prescott în 1980 la cercetarea regularităților în ciclurile de afaceri, baza trimestrială informațională fiind aceea de după război pentru SUA.



Sursa King şi Rebelo(1999)

Se va analiza pe scurt care este sensul acestei metode. Se consideră o serie de timp $\widetilde{X}_t$, din care se doreşte extragerea informației ciclice. La prima etapă, seria dată se va logaritma (în cazul în care nu este exprimată

[2] Numiită de unii „Nou Keznessianism", de alții „Neo-monetarist", „Neo-Wicksellion", etc.

prin „rate”), $x_t = \ln \widetilde{X}_t$. Filtrul HP descompune seria examinată în componenta ciclică $X_t^C = X_t - X_t^G = X_t - \sum_{j=-J}^{J} \alpha_j X_{t-j}$.

Componenta de creştere X_t^G este calculată prin soluţionarea problemei de optimizare:

$$\min_{\{X_t^G\}_0^T} \sum_{t=1}^{T} (X_t^C)^2 + \lambda \sum_{t=1}^{T} \left[\left(X_{t+1}^G - X_t^G \right) - \left(X_t^G - X_{t-1}^G \right) \right]^2 ,$$

Aici λ este un parametru de netezire, valoarea lui convenţională pentru date trimestriale este de 1600. Se va menţiona că în cazul în care $\lambda \to \infty$ în calitate de componentă de creştere se obţine un trend liniar, în timp ce pentru $\lambda = 0$ componenta de creştere este pur şi simplu seria în examinare.

În scopurile propuse este suficient să se folosească facte stilizate împrumutate de la King şi Rebello (1999) (care, la rîndul său, se bazează pe studiul vast Stock şi Watson din acelaşi volum Handbook of Macroeconomics).

Tabelul 1: Statistica ciclurilor de afaceri pentru Economia SUA

Variabile	σ_x	σ_x / σ_y	$E[x_t x_{t-1}]$	$corr(x, y)$
y	1.81	1.00	0.84	1.00
c	1.35	0.74	0.80	0.88
i	5.30	2.93	0.87	0.80
l	1.79	0.99	0.88	0.88
Y/L	1.02	0.56	0.74	0.55
ω	0.68	0.38	0.66	0.12
r	0.30	0.16	0.60	-0.35
A	0.98	0.54	0.74	0.78

Sursa: King şi Rebello, 1999

Majoritatea macroeconomiştilor cunosc intuitiv trăsăturile de bază ale fluctuaţiilor. Urmează principalele proprietăţi ciclice (în special co-mişcarea seriilor selectate în comun cu volumul total de producţie Y_t^C):

1. consumul C_t^C se schimbă într-o măsură mai mică decât volumul total de producţie
2. investiţiile I_t^C se schimbă într-o măsură mult mai mare decât volumul total de producţie (circa de trei ori)
3. orele lucrate L_t^C se schimbă în acelaşi ritm ca şi volumul total de producţie
4. capitalul K_t^C se schimbă cu un ritm mult mai mic decât volumul total de producţie
5. atât productivitatea muncii Y_t^C / L_t^C cât şi salariul W_t^C se schimbă cu ritmuri mult mai mic decât volumul total de producţie
6. $\operatorname{var}(K_t^C) \approx \operatorname{var}(W_t^C) < \operatorname{var}(C_t^C) < \operatorname{var}(Y_t^C) \approx \operatorname{var}(L_t^C) << \operatorname{var}(I_t^C)$

Două observaţii adiţionale, utile în cazul în care se vor examinaa variaţiile modelului RBC, sunt:

- (se referă la puncul 4 de mai sus) deşi stocul de capital este mai puţin volatil decât volumul de producţie integral, utilizarea capitalului este mai volatilă decât aceea a volumului de producţie
- (se referă la punctul 3 de mai sus) numărul orelor lucrate per lucrător este cu mult mai puţin volatil decât volumul de producţie, sugerînd că variaţia orelor lucrate integral este calculată prin intermediul limitei extensive (angajaţii în cîmpul muncii).

Plus la aceasta, toate agregatele manifestă stabilitate, adjudecată prin autocorelarea de ordinul întâi.

1.3. „Soluţionarea” problemei de optimizare dinamică în trei minute (Recapitulare ?)

Acest compartiment oferă principalele noţiuni privind Ecuaţiile Euler; partea matematică fiind foarte slabă. Ideea de bază care stă la calcularea variaţiilor este: fie că se doreşte soluţionarea problemei de optimizare, şi anume, trebuie de găsit traiectoria optimală pentru variabila de control care va maximiza (minimiza) funcţia obiectiv. Ideea este, că în fiecare punct de pe traiectoria optimală, variaţia controlului în această perioadă va reduce costurile totale. Ceea ce în termeni diferenţiali înseamnă: la derivarea funcţiei obiectiv pe treaiectoria optimă în raport cu variabila de stare, se va obţine ZERO. Deci, de a urma de fiecare dată traiectoria optimă e mai bine decât a deviea de la ea. Sunt cunoscute două abordări ale optimizării dinamice: principiul de maximum Pontreagin şi principiul de maximumi Bellman.

.

1.3.1 Ecuaţia Euler în Cazul Determenist

Să considerăm problema:

$$\sup\sum_{t=0}^{\infty}U(X_t,X_{t+1}) \quad \text{supusă condiţiilor } X_{t+1}\in\Gamma_t(X_t) \tag{1.1}$$

De menţionat, că funcţia de utilitate este dependentă de timp, având ca parte componentă discontarea, şi anume $U_t(\cdot)=\beta^t U(\cdot)$, restricţiile la fel sunt dependente de timp. Pentru simplicitate, să admitem că la moment trebuie de ales starea imediat următoare X_{t+1}, în acest caz variabila de control de fiecare dată ar putea fi exclusă (a se vedea exemplu care urmează). Sunt posibile şi alte restricţii însă ele vor fi introduse mai tîrziu, astfel încât vor fi cunoscute în cazul în care va apărea necesitatea.

La moment, admitem că există soluţia optimală (traiectoria optimă):

$$\exists\{X_t^*\}_1=\{X_0^*,X_1^*,\ldots,X_{t-1}^*X_t^*,X_{t+1}^*,\ldots\} \tag{1.2}$$

Pentru a obţine condiţiile necesare de ordinul în primul rând se vor cerceta devierile admisibile într-o perioadă de timp t de la presupusa traiectorie optimală $\{X_0^*,X_1^*,\ldots,X_{t-1}^*X,X_{t+1}^*,\ldots\}$. Devierile sunt admisibile atunci când traiectoria dată satisface restricţiilor anunţate $\forall t$, mai exact $X\in\Gamma_{t-1}(X_{t-1}^*)$, $X_{t+1}^*\in\Gamma_t(X)$ - restul este trivial, deoarece traiectoria optimală este, prin definiţie, admisibilă.

Din optimalitatea traiectoriei 1.2, pentru $\forall X$ admisibil este veridic (vom menţiona că restul termenilor din funcţia obiectiv dependentă de timp $\sum_{t=0}^{\infty}U_t(X_t,X_{t+1})$ sunt identici deoarece am considerat o variaţie pentru o singură perioadă de timp):

$$U_{t-1}(X_{t-1}^*,X_t^*)+U_t(X_t^*,X_{t+1}^*)\geq U_{t-1}(X_{t-1}^*,X)+U_t(X,X_{t+1}^*),\ \forall t. \tag{1.3}$$

Acum să facem două presupuneri adiţionale care să permită prezentarea acestei afirmaţii şi pentru cazul diferenţiabil: (i) funcţia de utilitate $U_t(\cdot)$ este diferenţiabilă; (ii) $\{X_t^*\}_1$ este o soluţie interioară, şi anume $\forall t$, X_t^*, $X_{t+1}^*\in Int(\Gamma_t)$. Din inegalitatea 1.3 urmează că funcţia $U_{t-1}(X_{t-1}^*,X_t^*)+U_t(X_t^*,X_{t+1}^*)$ atinge maximul în condiţiile în care $X=X_t^*$. Dat fiind funcţia de utilitate diferenţiabilă şi maximul interior, derivata ei evaluată în punctul $X=X_t^*$ va fi zero. Deci s-a obţinut condiţia necesară (unde $D_iU(\cdot)$ notează derivata de la funcţia U sau gradientul în raport cu argumentul ei i):

$$D_2U_{t-1}(X_{t-1}^*,X_t^*)+D_1U_t(X_t^*,X_{t+1}^*)=0,\ \forall t \tag{1.4}$$

Ecuația (1.4) nu-i alt ceva decât Ecuația Euler. Însă cel mai interesant caz va prezint ecuația 1.4 pentru cazul cu discont ea se înscrie ca:

$$D_2U_{t-1}(X_{t-1}^*, X_t^*) + \beta D_1U_t(X_t^*, X_{t+1}^*) = 0, \forall t \tag{1.5}$$

Uşor se demonstrează că într-un caz particular „concav” (U concav pe $\mathbf{\Gamma}$convex) iar $\{X_t^*\}_1$ interior, condiția reflectată în Ecuația Euler este necesară şi suficientă pentru optimalitate. Şi anume, traiectoria $\{X_t^*\}_1$ este optimală *atunci şi numai atunci*, când este satisfacută ecuația 1.4.

În final, ecuația (1.5) este o ecuație de ordinul doi $X_{t+1} = F(X_{t-1}^*, X_t^*)$ din care se obține soluția explicită pentru traiectoria optimală. De menționat că ea are loc pentru orice moment de timp t. Modelele care se vor considera în acest curs au o trăsătură comună: pentru ele această relație nu are soluție explicită, deoarece aceste modele nu posedă soluții generale de formă închisă, însă oricum e bine ca soluția să fie cunoascută.

Vestea proastă e, că o atare (familie de) ecuatie(i) diferențiale are o mulțime de soluții. Dar vestea bună e, ceea ce a fost scăpat din vedere: există condiții de frontieră care vor ajuta la selectarea unei dintre ele. Oricum, nu e cazul de a se agita: la prima vedere dispunem numai de condițiile inițiale, valoarea inițială pentru X_t, însă este bine cunoscut faptul că pentru a soluționa ecuația diferențială de ordinul doi sunt necesare două condiții, care asigură unicitatea. Deci, la momentul actual s-a depistat o familie de traiectorii. A doua condiție, care ar fi utilă în situația creată, este condiția de transversalitate pentru $t \to \infty$. Exemplu imediat următor ne va demonstra aceast fapt.

Exemplu 1. ***Servirea cu prăjituri.*** *Să admite, că un consumstor posedă o summă fixă* X_0 *şi poate doar s-o consume imediat sau s-o păstreze pentru consumul viitor. Consumul în perioada* t *constă din ceea ce dispune astăzi minus ceea ce va econimisi pentru consumul viitor de miîne. Deci restricția* $X_{t+1} \in \Gamma_{t+1}(X_t)$ *în cazul dat este* $X_t \geq X_{t+1} \geq 0$

$$C_t = X_t - X_{t+1} \to U(C_t) = U(X_t - X_{t+1}) \tag{1.6}$$

Vom considera rata de discont β. *Acesta este un caz particular al problemei examinate anterior: ecuația Euler pentru 1.5 este*

$$\frac{d}{dX_t}U(X_{t-1} - X_t) + \frac{d}{dX_t}\beta U(X_t - X_{t+1}) = 0\ \forall t \to -U'(X_{t-1} - X) + \beta U'(X_t - X_{t+1}) = 0\ \forall t \to$$
$$U'(C_{t+1}) = \beta U'(C_t).$$

În cazul în care funcția de utilitate este logaritmică, obținem că $C_t = \beta C_{t-1}\ \forall t$. *Însă, pornim pe o pistă greştăi: în realitate această ecuație diferențială nu este de ordinul doi dar de ordinul întâi, dat fiind exprimată prin variabila de control dar nu prin variabila de stare.*

1.4 Un Exemplu Privind Evaluarea Activelor

Înlocuind din nou consumul printr-o funcție de stare, obținem o ecuație de ordinul doi. Nu avem nuci o valoare inițială pentru consum, cunoaştem doar valoarea inițială a prăjiturii!!! Deci, avem nevoie de condiția de transversalitate, care pentru acest caz este: $\sum_{t=0}^{\infty} C_t = X_0$. *Apoi, uşor poate fi soluționată ecuația diferențială pentru consum şi obținută traiectoria optimală sub o formă explicită. În termeni de stare, soluția este:* $X_t^* = X_0\beta^t \quad \forall t$.

Aceasta are sens: dvs consumați o parte din prăjitură în fiecare perioadă de timp. Consumul dvs integral pentru un orizont infinit de timpniciodată nu va atinge limita (există careva bucățică în jur) şi cu cât mai nerăbdător sunteți cu atât mai repede mîncați (mai repede se bucata se micşorează).

La final, este binevenit evidențierea a două momente. Primul, în modul în care problema a fost formulată s-a fost folosit supremum dar nu maximum, în unele cazuri maximul nu poate fi atins, este necesar de ținut cont de acest moment în propriile cercetări. Doi, o problemă de minimizare uşor poate fi prezentată ca o problemă de maximizare a unei funcții obiectiv negative.

1.3.2 Ecuația Euler pentru Cazul Stocastic

Acum foarte concis şi numai la nivel afirmativ, fără dovezi, se va prezenta cazul stocastic neformal, deoarece procedeul formal ar necesita introducerea unor concepte, cum ar fi teoria măsurii, integralele Lebeague, operatori Marcovieni, etc – dacă întradevăr doriți să obțineți cunoştințe profunde în acest sens vedeți cartea Stokez, Lucas şi Prescott[3]. În general, ecuația Euler pentru cazul cu discont 1.5 va fi modificată în felul următor

$$D_2U\left(X_{t-1}^*, X_t^* \vartheta_t\right) + \beta E_{t-1}\left[D_1U\left(X_t^*, X_{t+1}^*, \vartheta_t\right)\right] = 0$$

(1.7)

Unde z este şoc stocastic general, care redă starea de lucruri în lume. Iar E_{t-1} este un operator de aşteptare pentru momentul de timp $t-1$, iar modul în care va fi definit acest operator face parte din altă istorie lungă. Deci traiectoria optimală va comunica ce de făcut în orice moment de timp şi pentru fiecare stare dată: acesta va fi un **plan de stare probabil**.

De exemplu, dacă se doreşte servirea unei prăjituri stocastice (dimensiunea prăgiturii se micşorează sau se măreşte stocastic în orice perioadă de timp prin multiple şocuri z_t care satisfac unele proprietăți fine), se ajunge la o ecuație Euler:

$$U'(C_{t-1}) = \beta E_{t-1}\left[z_t U'(C_t)\right]$$

1.4 Un exemplu de evaluare a activelor

Scopul acestui compartiment este doar de a face cunoştință cu unele idei suficient de generale în vederea evaluării activelor. Specialiştii avansați în macroeconomiei cu siguranță au făcut cunoştință cu Capitolul 13 (şi Capitolul 10) din cartea autorilor Ljungquist, Sargent şi Cochraine „Evaluarea activelor". Să admitem că consumatorul maximizează utilitatea aşteptată pe durata vieții:

$$u\left(\{C_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_t U(C_t)$$

şi el are posibilitatea să investească în unele active arbitrare care costă P_t astăzi şi vor aduce un venit (de la hîrtiile de valoare) mîine (de exemplu, aceste active pot fi re-vîndute mîine pe piață la preț P_{t+1}, totodată soldându-se cu careva dividente D_{t+1}, încât $Q_{t+1} = P_{t+1} + D_{t+1}$). Să presupunem că numărul activelor pe care le solicită consumătorul (vom nota cererea prin indicile de sus d) este N_t^d, Restricțiile bugetare iau forma:

[3] În cazul în care citiți în limba Italiană, Vă recomandăm cordial: Montruccio, L. Şi Gugno, F (2000), „Scelte intertemporali: teoria e modeli".

$$P_t N_{t+1}^d + C_t = Q_t N_t^d + W_t L\,,$$

(1.8)

aici se presupune că consumatorul obține venit din muncă $W_t L$, unde W_t este salariul şi L este timpul petrecut în muncă, fixat (pentru moment). Vom menționa că $P_t N_{t+1}^d$ este valoarea activelor procurate pe parcursul perioadei t şi prelunjită pe perioada $t+1$, în timp ce $Q_t N_t^d$ este cîştigul total de la active produs în perioada t. Deci, N_t^d este o variabilă de stare.

Utilitatea poate fi maximizată în raport cu numărul activelor solicitate, folosind tehnica studiată, supusă restricțiilor dinamice menționate anterior. Să transcriem restricțiile bugetare în modul următor: $C_t = Q_t N_t^d + W_t L - P_t N_{t+1}^d$, substituind în funcția obiectiv primim:

$$\sup \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_t U(Q_t N_t^d + W_t L - P_t N_{t+1}^d)$$

Să admitem, că pentru aceste active există o cerere interioară diferită de zero (şi anume, nu există restricții asupra împrumuturilor sau lichidităților, nici costuri de tranzacție şi nici restricții asupra vânzărilor pe termen scurt), atunci prin diferențiere în raport cu N_{t+1} obținem equația Euler la momentul de timp t (care poate fi interpretată dat fiina controlul de azi):

$$-\beta^t P_t U_C(C_t) + \beta^{t+1} E_t\left[Q_{t+1} U(C_{t+1})\right] = 0 \quad \text{sau:}$$

$$U_C(C_t) = \beta E_t\left[\frac{Q_{t+1}}{P_t} U(C_{t+1})\right]$$

(1.9)

Costul cosumului în diminuare de azi - în unități de utilitate – este egal cu beneficiul aşteptat de mîine; acest beneficiu este exprimat prin randamentul brut din investire în active, transformat în utilitatea de mîine şi discontat prin β.

Vom rearanja ecuația Euler pentru a obține formula fundamentală de evaluare a activelor:

$$P_t = E_t\left[\Lambda_{t,t+1} Q_{t+1}\right]\,,$$

(1.10)

unde $\Lambda_{t,t+1} \equiv \beta \dfrac{U_C(C_{t+1})}{U_C(C_t)}$ (1.11)

$\Lambda_{t,t+1}$ este **factorul stocastic de discontare** sau **miezul evaluării**, sau **rata limită de substituție** (sau, în cazul în care aceasta e suficient: schimbare de măsură sau starea de densitate a prețurilor). El determină rata la care consumătorul doreşte să substituie consumul din t pentru consumul din $t+1$.

Aruncând o privire asupra ecuațiilor (1.9)-(1.10) (care întradevăr sunt două fațete ale aceleiaşi medalie), putem înțelege diferența care formează esența macroeconomiei moderne[4]

1. Cercetătorii care examinează **comportamentul consumatorului**, de regulă, tratează beneficiul de la active Q_{t+1}/P_t dat fiind cunoscut (sau exogen) şi folosesc (1.9) pentru a obține implicările pentru consum, comparația de date etc.
2. **Finanțarea** cercetărilor, de regulă, în calitate de factori de discont foloseşte $\Lambda_{t,t+1}$ (ceea ce este echivalent cu utilitatea la limită) dat fiind cunoscută şi valoarea expresiei (1.10) de a examina comportamentul prețurilor la active.

[4] Această distincție este mult mai funcțională acuma decât 25 ani în urmă, deoarece multă literatură de astăzi a căzut în a treia categorie; însă încă este util de a fixa ideea.

3. Persoanele care utilizează **modele de echilibru general** nu acceptă *nici unul* dintre obiectele anunțate ca fiind cunoscute, însă le consideră pe toate determinate în comun în echilibru. Pentru acei, care utilizează acestă abordare, nu contează folosesc ei (1.9) sau (1.10). Altfel spus, deoarece toate variabilile sunt tratate ca endogene, fiecare modalitate de a scrie ecuația este în măsură egală legitimată. Desigur, poate fi lansat un experiment mental „ ce se va întâmpla cu prețurile la active în cazul în care traiectoria consumului este cutare" sau o altă traiectorie din vecinătatea apropiată (care va fi traiectoria optimă de consum daca beneficiul de la active este cutare). Dar să ne dăm seamă că aceasta este doar o cale care uneori ajută perceperea.

   De menționat, că derivarea anterioară nu impune nici o structură de piață, nici provienența de active (ele pot fi oricare) şi nici orice structură specifică pentru incertitudine. Întradevăr, în multe cazuri (pentru diferite spețe de ative şi/sau structuri de piață), odată ce se impune echilibru (şi, prin urmare, curățarea pieței) se va obține $N_{t+1}^d = N_t^d$, şi poate fi produsă normare la 1 – însă procedura dată nu se va aplica aici. Să trecem la examinarea unor exemple pentru active speciale.

Exemplu 2 *Pentru stocuri (acțiuni) venitul este obținut din prețul de piață plus dividende:* $Q_{t+1} = P_{t+1} + D_{t+1}$. *Formula pentru preț ea forma:*

$$P_t = E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\left(P_{t+1} + D_{t+1}\right)\right] \tag{1.12}$$

Să definim ***termenul de discont stocastic în intervalul*** *[t , $t+j$]:*

$$\Lambda_{t,t+j} = \beta^j \frac{U_C\left(C_{t+j}\right)}{U_C\left(C_t\right)} = \Lambda_{t,t+1} \times \Lambda_{t+1,t+2} \times \ldots \times \Lambda_{t+j-1,t+j}$$

Folosind acest fapt şi legea aşteptărilor iterative, putem extrapola formula (1.12) înainte pentru a obține ***prețul acțiunilor*** *fiind discontată valoarea prezentă a dividendelor viitoare:*

$$P_t = \lim_{T\to\infty} E_t \Lambda_{t,T} P_T + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{t,t+j} D_{t+j} = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{t,t+j} D_{t+j},$$

Aici, a doua egalitatea a fost obținută folosind condiția de transversalitate. Aceasta este o versiune cu cupon separat a modelului Lucas „arbore" din articolul „Prețurile activelor într-o economie schimbătoare", 1978, Econometrica.

Exercițiul 3 *Câți termeni de însumare sunt în ecuația* $P_t = E_t \sum_{j-1}^{\infty} \Lambda_{t,t+j} D_{t+j}$ *? Care sunt limitele în interiorul cărora se produce însumarea?*

Exemplul 4 *Putem* ***defini randamentul net al oricărui activ prin*** R_{t+1}^A *fiind veniult de la active cu preț unitar, cu alte cuvinte, dacă se investeşte o unitate de consum sau de valută astăzi, câte unități de consum sau de valută se vor obține miine. Deci,*

$1 + R_{t+1}^A \equiv \dfrac{Q_{t+1}}{P_t}$ *care, fiind substituită în ecuația fundamentală pentru prețuri, ne dă:*

$$1 = E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\left(1 + R_{t+1}^A\right)\right]$$

Exemplu 5 *Un caz important special apare când rata* $1 + R_t$ *e fără de risc, atunci randamentul activului (acțiunii lipsite de risc), cu certitudine, va oferi ceva miine:*

$$1 = E_t\left[\Lambda_{t,t+1}(1+R_t)\right] = (1+R_t)E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\right] \to (1+R_t)^{-1} = E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\right]$$

O altă abordare ar fi să se examineze activul, venitul de la care mîine va fi 1 şi prețul căruia, conform formulei anterioare, este $(1+R_t)^{-1}$. *Un atare activ este denumit acțiune cu discont. La mod general , rata* *fără minimală de risc poate fi definită prin această formulă chiar şi atunci când activele lipsite de risc nu se vând sau nu există.*

Exemplu 6 *Capitalul fizic. Se vor considera active fizice, constituite din aceleaşi bunuri consumabile (de asemenea, decizia de a investi este reversibilă: aceste active pot fi uşor transformate în bunuri de consum); de aceea, prețul lor în unități de consum este 1. Oricum, proprietarii casnici pot decide să consume sau să acumuleze această sumă iar, stocul acumulat, poate fi folosi în calitate de factor de producere, care va aduce beneficiarului* R_t^K *unități de bunuri de consum (de exemplu, aceasta poate fi renta). Cum numai acceptăm aceasta, este necesar să acceptăm că o parte din stoc se va epuiza, şi anume, se va deprecia , să zicem, cu rata exogenă* δ*. Deaceea, „dividentele" nete minus deprecierea sunt egale cu* $R_t^K - \delta$*, prin urmare, venitul de mîine este* $1 + R_t^K - \delta$*. Şi ecuația Euler este:* $1 = E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\left(1 + R_t^K - \delta\right)\right]$*. (Deoarece prețul este 1,* $R_t^K - \delta$ *este în acelaşi rând randamentul net al acestor active.) Acest exemplu, într-um mod natural, creează legătura cu modelul care se va examina în continuare. (Se vor cerceta modele cu costuri investiționale ajustate, pentru care prețul de capital asociat cu "Tobin`s* q *" va fi variabil.)*

Capitolul 2

2. Cadrul modelului DSGE-RBC

Realitatea simplificată privind fluctuațiile, analizată unterior, de comun acord cu date simplificate privind creşterea, studiate anteriore, (să ne amintim de „date Kaldoriane" care includ: componentele de venit, componentelede ieşirei, în linii mari fiind constante, raportul capital-output este constant deoarece ambele variabile cresc cu acelaşi ritm, raportul dintre consum şi output este aproximativ constant, etc.). Ceea ce înseamnă că factorii, care manufestă modificări permanente în nivelul activității economice, produc un efect proporțional între serii. Şi, în final, în pofida creşterii salariului real orele lucrate de către o persoană sunt constante.

Modelul ciclurilor reale de afaceri acționează exact în felul următor: este o versiune „stocastică" a modelului de creştere elaborat de savanții Brock şi Mirman, care permite studierea fluctuațiilor şi creşterii în cadrul aceluiaşi model. [1]

2.1 Cadrul

Se presupune că economia este populată de un număr infinit de consumatori casnici, identici sub orice aspect. Preferințele acestor consumatori casnici, definite prin C_t şi prin orele lucrate L_t sunt aditiv separabile în timp:

$$u\left(\{C_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t),$$

aici $\beta \in (0,1)$ este factor de discont iar $U(.,.)$ este funcția de utilitate, diferențiabilă continuu în raport cu ambele argumente, crescătoare şi concavă în C, descrescătoare şi convexă în L (şi anume, crescătoare şi concavă în raport cu timpul liber.)

[1] Pentru versiunea ciclurilor de afaceri a modelului de creştere endogenă ca la Romer-Grossman-Helpman vezi Bilbiie, Chironi and Melitz (2006)

Tehnologia de producere în economia cu un singur bun Y_t se descrie prin intermediul funcției de producere: $Y = A_t F(K_t, L_t)$, aici K_t reprezintă stocul de capital iar L_t este munca. Operatorul $F : R_+^2 \to R_+$ este crescător în raport cu ambele argumente, concav în raport cu fiecare argument, diferențiabil continuu şi omogen de gradul întâi. Mai mult ca atât, $F(0,0) = F(0, L_t) = F(K_t, 0)$ şi are loc „condiția Inada”:

$$\lim_{K\to 0} F_K(\;) = \infty; \lim_{K\to\infty} F_K(\;) = 0$$

2.2 Economia planificată (centralizată)

Admitem că economia este guvernată de un planificator social binevoitor, care selectează succesiunile $\{C_t\}_0^\infty, \{K_{t+1}\}_0^\infty, \{L_t\}_0^\infty$ în scopul maximizării obiectivului dependent de timp

$$\max E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}, L_{t+i}) \qquad (2.1)$$

supusă condițiilor inițiale pentru stocul de capital K_0, pentru stocul de tehnologii A_0 şi restricțiilor care vor urma. Volumul de producție în economie este fabricat folosind capitalul fizic şi munca:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t), \qquad (2.2)$$

aici A_t este factorul exogen de productivitate, „şoc tehnologic”, dinamica lui va fi specificată mai tîrziu. În această economie închisă, guvernată dinafară, outputul este utilizat: pentru consum şi pentru majorarea stocului de capital, în special a investițiilor:

$$C_t + I_t = Y_t. \qquad (2.3)$$

Acumularea stocului de capital K_t este descrisă printr-o ecuație dinamică (o aproximație simplă, folosită în practică pentru a construi stocul de capital, aşa numita „metodă de inventariere continuă”), în care se presupune că deprecierea este constantă iar I_t este cantitatea investită la momentul t în stocul de capital:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \qquad (2.4)$$

Şi, în final, cantitatea timpului petrecută în lucru este mărginită în timp de sus, fiind normată la 1: $L_t \le 1$. Se va presupune, că există o soluție interioară, încât o parte din timp este destinată pentru odihnă: $L_t < 1$.

Pentru soluționarea problemei formulate toate constrîngerile, exprimate prin ecuații, se vor consolida într-o singură ecuație iar consumul se va exprima printr-o funcție dependentă de capitalul viitor, capitalul actual şi de orele lucrate:

$$C_{t+1} + K_{t+1} = (1-\delta)K_t + A_t F(K_t, L_t) \qquad (2.5)$$

Acum, folosind una dintre tehnicile studiate, se va soluționată problema de optimizare. De exemplu, utilizând aparatul ecuației Euler, funcția obiectiv se va deriva în raport cu capitalul din perioada imediat următoare şi orele lucrate:

$$\max_{K_{t+1}, L_t} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U[(1-\delta)K_{t+i} + A_{t+i} F(K_{t+i}, L_{t+i}) - K_{t+i+1}, L_{t+i}]$$

Condiția de ordinul întâi în raport cu K_{t+1} şi L_t respectiv (împreună cu restricția bugetară) este

$$U_C(C_t, L_t) = \beta E_t\{U_C(C_{t+1}, L_{t+1})[A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) + 1 - \delta]\}$$

(2.6)

$$-U_L(C_t, L_t) = U_C(C_t, L_t)A_tF_L(K_t, L_t) \qquad (2.7)$$

Din prima ecuație desprindem că costul la limită al economisirii unei unități de bunuri pentru consum astăzi egalează cu venitul aşteptat la limită al acestor economisiri de mîine înmulțit cu beneficiul brut de la mărirea stocului de capital prin economisire, ultima este prezentată prin produsul la limită de capital minus deprecierea lui. A doua ecuație constată că utilitatea la limită a celor ce activează în cîmpul de muncă echivalează cu beneficiul la limită al tuturor lucrătorilor, în termeni de utilitate. În forma alternativă, ea echivalează cu rata de substituție la limită dintre consum şi orele lucrate $-U_L(C_t, L_t)/U_C(C_t, L_t)$ cu rata la limită la care munca se transformă în bunuri de consum: $A_tF_L(K_t, L_t)$.

Pentru soluționarea modelului în mod practic, de regulă, se solicită (mai ales în cazul în care se examinează modele mult mai mari) ca numărul ecuațiilor să fie egal cu numărul variabilelor. În acest exemplu simplu, avem două condiții de ordinul întîi plus restricțiile asupra resurselor pentru trei variabile C_t, K_{t+1}, L_t. (Dacă se doreşte obținerea soluției şi pentru investiții şi output, pur şi simplu, se folosesc ecuațiile (2.3) şi (2.4)).

În orice caz se va recurge la o metodă mai fină pentru determinarea traiectoriilor integrale ale soluțiilor variabilelor de interes. Să ne abstractizăm de muncă, de exemplu prin admiterea că gospodăriile casnice nu se îngrijesc de ea nici într-un fel, deci omitem (2.7) şi L_t din ecuații. Este necesar de a găsi traiectoriile integrale pentru $\{C_t\}_0^\infty, \{K_{t+1}\}_0^\infty$ din (2.5), prima ecuație din (2.6) şi condițiile inițiale pentru stocul de capital K_0. Suntem tentați să credem că reuşim deoarece (2.6) este ecuație diferențială de ordinul întâi şi există o condiție inițială. Însă ne înşelăm, îtrucât (2.6) este ecuație de ordinul întâi în raport cu C, îar ea este ecuație diferențială de ordinul doi în raport cu K, pentru care există condiția inițială. Substituind C_t din (2.5) în (2.6), obținem o ecuație diferențială de ordinul doi în raport cu K_t, K_{t+1}, K_{t+2}. Iar condiția inițială rămâne a fi una.

Problema e, că la moment avem nevoie de o condiție adițională de frontieră pentru capital ca să putem obține soluția pentru traiectoria optimală integrală $\{K_{t+1}\}_0^\infty$. Această condiție este Condiția de Transversalitate: $\lim_{i\to\infty_t} E_t\left[\beta^i U_C(C_{S,t+i},.)K_{t+i}\right] = 0$.

De menționat, că deoarece modelul este stocastic, regula de luare a deciziilor nu se găseşte la momentul 0 ca apoi să rămînă intactă; fiecare nouă realizare a stocului modifică în fiecare perioadă de timp setul informațional al agenților. Ceea ce face regula decizională **stare-probabilă**: cât se va consuma, se va lucra, se va economisi etc, depinde de starea economiei în perioada dată. Spațiul acestui model este bi-dimensional: (A_t, K_t) , unde A este o stare exogenă iar K este o stare endogenă. Deaceea, în mod formal, „regula decizională" care soluționează sistemul condițiilor de echilibru se înscrie mai bine în felul: $C_t(A_t, K_t)$; $K_{t+1}(A_t, K_t)$; $L_t(A_t, K_t)$.

2.3 Echilibru competitiv (sau decentralizarea ecomiei planificate)

În majoritatea aplicațiilor se doreşte cercetarea aconomiei în care deciziile se iau de agenții economici în mod decentralizat decât în mod planificat. Deaceea se vaexamina echilibru decentralizat, competitiv cu aşteptări raționale din modelul RBC de bază. Există mai multe căi de decentralizare ale modelului descris anterior, în continuare se va alege calea cât e posibil de simplă: un echilibru competitiv succesiv, în care gospodăriile casnice în fiecare perioadă interacționează cu firmele pe piețe într-un mod, care se va specifica în continuare.

Gospodăriile casnice posedă un stoc de capital (la fel şi firmele, deoarece tot capitalul este capital fizic) şi trebuie să decidă: cât capital să acumuleze, cât de mult să consume şi cât de mult să muncească în fiecare perioadă dată. Fie că indicile s denotă pentru fiecare variabilă cota parte a gospodăriilor casnice în fiecare variabilă agregată: şi anume, K_{t+1}^{s} este stocul de capital care va aparține gospodăriilor casnice în următoarea perioadă, etc. Pentru a evita confuzia, se vor utiliza litere aldine pentru valorile agregate, spre exemplu, stocul agregat de capital se notează prin $\mathbf{K}_{t+1}$. Gospodăriile casnice în fiecare perioadă de timp cîştigă salariul W_t, lucrând în firme, şi renta R_t^K din închirierea capitalului de către firme; ele acceptă ambele prețuri fiind predeterminate (ținem cont că economia examinată este perfect neperturbată), în ea aceste prețuri sunt funcții de agregatele economice de stare: $W(A_t,\boldsymbol{K}_t)$; $R^K(A_t,\boldsymbol{K}_t)$. Concomitent este necesară cunoaşterea legilor de mişcare pentru A_t şi $\boldsymbol{K}_t$. Deci, gospodăriile casnice vor avea de soluționat problema ce urmează:

$$\max E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U\left(C_{t+i}, L_{t+i}^s\right)$$

(2.8)

supusă restricțiilor bugetare, cele din urmă fiind date ca:

$$C_t + I_t^s = W_t L_t^s + R_t^K K_t^s + \pi_t \tag{2.9}$$

Partea stîngă a ecuației (2.9) specifică cheltuielile gospodăriilor casnice respectiv pentru consum şi investiții. Partea dreaptă a ecuației (2.9) specifică componentele resurselor gospodăriilor casnice formate din venitul din muncă, venitul din capital (de la inchirierea capitalului de către firme) şi venitul din profit (daca el există). Deoarece legea mişcării pentru capital rămîne a fi $K_{t+1}^{s} = (1-\delta)K_t^s + I_t^s$, ea poate fi înscrisă ca:

$$C_t + K_{t+1}^s = W_t L_t^s + \left(1 + R_t^K - \delta\right) K_t^s + \pi_t \tag{2.10}$$

În continuare se va defini rata dobînzii în economie $R_t = R_t^K - \delta$, fiind rata de închiriere minus rata de depreciere. Pentru soluționarea acestei probleme se va folosi aceeaşi tehnică ca şi anterior şi vom obține regula decizională pentru gospodăriile casnice sub forma $C_t\left(A_t, K_t^s, K_t\right)$; $K_{t+1}^s\left(A_t, K_t^s, K_t\right)$; $L_t\left(A_t, K_t^s, K_t\right)$ care reprezintă soluția problemei de optimizare (împreună cu (2.10) şi Condițiile de Transversalitate):

$$K_{t+1} \quad : \quad U_C\left(C_t, L_t^s\right) = \beta E_t\left\{U_C\left(C_{t+1}, L_{t+1}^s\right)\left[R_{t+1}^K + 1 - \delta\right]\right\} \tag{2.11}$$

$$L_t \quad : \quad -U_L\left(C_t, L_t^s\right) = U_C\left(C_t, L_t^s\right) W_t$$

(2.12)

Firmele decid câtă forță de muncă să angajeze şi cât capital să închirieze de la gospodăriile casnice pe piețele disponibile cu scopul de a produce bunuri de consum. Fie că indicile d se atribuie cererii „valorile variabilelor din punctul de vedere al firmelor”. Firmele sunt perfect competitive, ele selectează K_t^d şi L_t^d pentru a maximiza profitul π_t în fiecare perioadă de timp,

$$\pi_t = A_t F\left(K_t^d, L_t^d\right) - \left(W_t L_t^d + R_t^K K_t^d\right) , \qquad (2.13)$$

Aici primul termen indică vînzările firmelor iar termenul din paranteze este costul total al producției. Optimizarea conduce la:

$$A_t F_L\left(K_t^d, L_t^d\right) = W_t,$$
$$A_t F_K\left(K_t^d, L_t^d\right) = R_t^K$$

(2.14)

Întrucât funcția de producere manifestă rentabilitate la scară constantă, profitul de fiecare dată va fi egal cu zero – rămîne să fie înlocuite expresiile pentru prețuri la aceşti factori în funcția pentru profit (2.14) şi să se aplice teorema Euler.

Exercițiul 7 *Truc: puteți să ne spuneți cât de multe firme produc în această economie?*

Curățarea pieței. În fiecare perioadă de timp gospodăriile casnice şi firmele interacționează pe piețele disponibile iar starea de echilibru necesită curățarea acestor piețe. „Cuantificarea" completă a piețelor, asigurarea sterilizării lor şi perceperea funcționării este o componentă esențială în modelarea practică şi este absolut ne trivială pentru mai multe modele. În economia simplă examinată aici funcționează trei piețe: pița muncii, piața de capital şi piața bunurilor de consum (output). Important este că în cazul în care se porneşte de la condițiile de echilibru pentru n piețe, este necesar să se specifice condițiile de curățare a piețelor doar pentru $(n-1)$ piețe. Legea lui Walras asigură echilibru şi pentru a n -a piață În cazul nostru se va limita la piețele factorilor de producere:

$$L_t^d = L_t^s$$
$$K_{t+1}^d = K_{t+1}^s \left(= K_{t+1}\right)$$

De menționat, că condiția de curățare a pieței de capital este înscrisă pentru $t+1$ ceea ce ar fi de folos pentru orice condiții de curățare cu privire la variabilele de stare în implementarea practică. În sfîrşit, consistența deciziilor individuale şi acele agregate necesită ca legea de mişcare pentru capital presupusă de gospodăriile casnice în echilibru coincide cu legea de mişcare agregată: $K_{t+1}^s(A_t, \mathbf{K_t}, \mathbf{K_t}) = \mathbf{K_{t+1}}(A_t, \mathbf{K_t})$.

Exercițiul 8 *Dovediți că Legea Walras are loc în economia examinată, şi anume că* $Y_t = C_t + I_t$

Exercițiul 9 4AM: *Să se aplice tehnica programării Dinamice (Principiul lui Bellman) studiată anterior atât pentru economia centralizată cât şi pentru economia decentralizată şi să se demonstreze că soluția obținută este echivalentă cu aceea din notițele date.*

2.4 Teoreme de bunăstare

Să se aducă aminte din Macroeconomie că optimul Pareto (echilibru planificat) şi echilibru competitiv coincid dacă sunt condiționate de preferințe, tehnologie, etc. Exercițiul ce va urma propune să se demonstreze că modelul în examinare reprezintă anume acest caz:

Exercițiul 10 *Să se demonstreze euristic că echilibru planificat coincide cu acel competitiv (sugestie: demonstrați că coincid condițiile de ordinul întâi).*

De menționat, că acest rezultat poate fi aplicat în cazul acestui model simplu fără perturbații. În majoritatea aplicațiilor echilibru planificat va fi diferit de acel competitiv: echilibru competitiv va fi sub-optimal ceea ce datorează prezenței externalităților, taxelor distorsionate, neîțelegeror comerciale, etc. Cu certitudine, unele exemple în acest sens vor fi prezentate ulterior.

Totuşi avantajul cel mare al aplicării teoremelor de bunăstare constă în posibilitatea deplasării libere între echilibrul planificat şi acel competitiv, acel din urmă este, de regulă: a) unic şi b) uşor de calculat (soluționarea problemei de programare concavă). În caz contrar, existența şi unicitatea echilibrului competitiv nu se stabileşte trivial.

2.5 Forme funcționale

Pentru a simplifica obținerea soluției analitice, se vor introduce forme funcționale. Deja s-a presupus că funcțiile de producere sunt funcții omogene de gradul întâi (manifestă rentabilitate la scară constantă). Să admitem că ele sunt de forma Cobb-Douglas, consistentă cu factorii de creştere:

$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$,

Unde α este „cota capitalului" – dacă capitalul este achitat cu produsul la limită, el cîştigă cota α din output. De menționat că produsul la limită al capitalului şi al muncii respectiv este (egal cu rata de rentă şi salariu):

$$R_t^K = \alpha A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}; W_t = (1-\alpha) A_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}$$

Observăm imediat că cotele părți ale capitalului şi muncii în volumul total (output) de producție sunt constante şi egale puterii exponențiale în funcția de producere.

În acelaşi rând se vor specifica preferințele care iau forma:

$$U(C_t, L_t) = \ln C_t - v(L_t), \tag{2.15}$$

unde $v()$ este dezutilitatea muncii care e continuu diferențiabilă, crescătoare şi convexă. Această funcție de utilitate, aditiv separabilă, este concordată cu creşterea balansată şi altele proprietăți necesare, care vor fi stabilite ulterior. Există şi funcții de utilitate ne separabile care, la dorință, pot fi folosite în aplicații – a se vedea articolul original de King, Plosser şi Rebello (1988) consacrat acestei probleme.

2.6 Starea de stabilitate şi condițiile asupra preferințelor

În continuare se vor folosi teoremele de bunăstare, accentul la soluționarea modelului fiind pus pe Echilibru Planificat. De menționat că, oricum, toate tehnicile descrise, în măsură egală, pot fi aplicate în cazul Echilibrului Decentralizat.

Pornind de la aceasta, se va stabilu că modelul examinat atinge o *stare de stabilitate non-stocastică* unică, care este consistentă cu unele „elemente stilizate de creştere", cu privire la unele rate dat fiind constante. În starea de stabilitate non-stocastică toate variabilile X_t sunt constante $X_{t+1} = X_t$ şi tehnologia este normată la 1, $A_{t+1} = A_t = 1$. (de menționat că creşterea nu se examinează: acest element poate fi introdus prin admiterea că $A_{t+1} = (1+g)A_t$, unde g va fi rata exogenă de creştere). Şi mai mult, operatorul de aşteptare poate fi eliminăt.

Din ecuația Euler (2.6) evaluată în starea de stabilitate obținem: $\beta^{-1} = F_K(K, L) + 1 - \delta$. Deoarece produsul la limită al capitalului depinde de raportul dintre capital şi muncă, imediat urmează că în starea de stabilitate şi el este constant: $\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = \beta^{-1} - 1 + \delta$. Întrucât produsul muncii la limită (salariul real) la fel depinde de raportul dintre capital şi muncă şi acesta va fi constant şi se va înscrie ca o funcție de parametrii de bază. Folosind definiția pentru rata dobînzii reală, obținem: $R = \beta^{-1} - 1$. Evaluarea acumulării de capital în starea de stabilitate ne dă: $\frac{I}{K} = \delta$ - în starea de stabilitate investițiile, pur şi simplu, acoperă deprecierea de capital.

Şi, în final, o remarcă importantă asupra proprietăţilor orelor lucrate în starea de stabilitate, ele sunt în raportate la cerere (ceea ce creează stare de confuzie pentru mulţi oameni, aveţi grijă să nu fiţi în rândul lor!!!). Între timp, analizând datele de după război s-a stabilit existenţa unui trend de lungă durată privind salariile, dar nu şi pentru orele lucrate, este necesar ca în starea de stabilitate orele lucrate să nu depindă de salarii. Şi mai mult, la mod general, este necesar ca preferinţele să fie concordate cu orele constante pentru un simplu motiv – orele lucrate per capita sunt, pur şi simplu, limitate de sus în timp, deci ele nu pot creşte (puteţi lucra dvs mai mult decât 24 de ore?). Aceasta confirmă că funcţia de utilitate selectată va garanta ore de lucru constante în starea de stabilitate. În scopul evaluării condiţiilor intertemporale de optimalitate se va folosi forma funcţională pentru utilitate şi se va obţine: $v_L(L)=\dfrac{W}{C}$.

Să admitem, pentru simplicitate, (ceea ce nici într-un fel nu este o condiţie necesară) că $C=WL$, şi atunci observăm că $Lv_L(L)=1$ şi orele lucrate nu depind de salariu sau de orice altă componentă cu trend potenţial. Din nou, pot exista preferinţe mult mai generale (ne separabile) care manifestă această proprietate, însă este suficient de a urma obiectivele propuse.

În loc de a încerca determinarea rapoartelor constante în starea de stabilitate etc. , ce s-a încercat anterior, să întreprindem o tentativă de a găsi **soluţia explicită pentru starea de stabilitate.** Pentru a efectua aceasta, se vor evalua condiţiile de echilibru în starea de stabilitate şi se vor folosi formele funcţionale propuse pentru F şi U. Presupunem că tehnologia este constantă şi egală cu A (nu se va normaliza $A=1$ ca înainte). Iarăşi, întrucât rata reală a dobînzii în starea de stabilitate şi factorul de discont sunt dependenţi unul de altul prin relaţia $R=\beta^{-1}-1$ (numai din considerentul analitic) R se va trata în primul rând ca parametru în raport cu β. Din ecuaţia Euler în starea de stabilitate, obţinem consumul ca funcţie de muncă:

$K=\left(\dfrac{R+\delta}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}L$, înlocuind expresia dată în restricţia redusă (2.5), primim consumul ca funcţie de muncă:

$$C=A\left(\frac{R+\delta}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}L-\delta\left(\frac{R+\delta}{\alpha A}\right)L=\left(\frac{R+\delta}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[\frac{R+\delta}{\alpha}-\delta\right]L$$

Înlocuind ambele în condiţia de optimalitate intertemporală:

$v_L(L)L=\dfrac{(1-\alpha)(R+\delta)}{R+\delta-\delta\alpha}=\dfrac{1}{1+R[(1-\alpha)(R+\delta)]^{-1}}$, care poate fi soluţionată pentru L, odată cu determinarea formei funcţionale pentru $v_L(L)$, ceea ce permite obţinerea soluţiilor şi pentru alte variabile. Vom menţiona, că în corespundere cu cele menţionate anterior, orele lucrate sunt independente de nivelul tehnologic. Oricum, orele lucrate sunt dependente de preferinţe. Să considerăm, de exemplu, o formă funcţională standard pentru $v(L)=\chi\dfrac{L^{1+\varphi}}{1-\varphi}$, din care $v_L(L)=\chi L^{\varphi}$. Înlocuind în expresia de mai sus avem:

$$L=\left[\frac{1}{\chi}\right]\frac{1}{1+R[(1+\alpha)(R+\delta)]^{-1}} \tag{2.16}$$

Concluzionăm, că cu cât mai mult agentului nu-i place să lucreze (χ mare) cu atât mai puţin el lucrează în starea de stabilitate.

2.7 Linearizarea logarimică

Modelul descris este alcătuit dintr-un sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare stocastice. Aflarea soluţiei de formă închisă este imposibilă atât timp cât deprecierea este completă şi funcţie de utilitate este logaritmică în funcţie de consum (a se vedea Capitolul privind RBC pentru acest caz special din manualul David Romer). La mod general, este nenesar să se recurgă la tehnici de aproximare, multe din ele le folosesc savanţii (a se vedea Cooley şi Prescott pentru o trecere în revistă ne-exhaustivă). Cert e, că cele mai frecvent folosite tehnici se bazează pe aproximaţia de ordinul întâi a condiţiilor de echilibru în jurul stării de stabilitate non stocastice şi cercetarea comportamentului variabilelor endogene ca reacţie la mici perturbaâii stocastice în procesele exogene. Această abordare se va utiliza în continuare. Acesta este un exemplu al *teoremei funcţiei implicite*, care trebuia să se cunoască din cursul de Matematică: calculul efectului de la modificări în unii „parametri” (în cazul nostru şocuri stocastice) asupra soluţiei sistemului de ecuaţii (este vorba despre regulile deciziei optimale pentru variabilile endogene care sunt determinate implicit dintr-un sistem de condiţii de echilibru).

Fie că prin litere mici se notează abaterile în procente ale variabilelor, notate cu litere mari, de la valorile sale în starea de stabilitate, ce e echivalent cu abaterile logaritmice, deci pentru orice variabilă X_t avem

$x_t \equiv \ln\frac{X_t}{X} \cong \frac{X_t - X}{X}$ aici ultima aproximaţie urmează din $\ln(1+\alpha) \cong \alpha$.

2.7.1 Introducere în linearizare logaritmică

Există mai multe modalităţi de linearizare logaritmică, de fiecare dată se vor încerca mai multe procedee pentru a minimaliza probabilitatea de apariţie a erorilor. Pentru aplicarea linearizării logaritmice la un sistem de ecuaţii este necesar de a cunoaşte o singură teoremă. Să admitem că o ecuaţie neliniară leagă două funcţii diferenţiabile $G(X_t)$ şi $H(Z_t)$ defenite pe vectorii $X_t = \left(X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^n\right)$; $Z_t = \left(Z_t^1, Z_t^2, \ldots, Z_t^n\right)$: $G(X_t) = H(Z_t)$.

Ecuaţia obţinută poate fi aproximată prin descompunerea de ordinul întâi a seriei lui Taylor în jurul stării de stabilitate a variabilelor X şi Z (desigur, ecuaţia are loc şi în starea de stabilitate $G(X_t) = H(Z_t)$):

$\nabla G(X)(X_t - X) \cong \nabla H(Z)(Z_t - Z)$,

unde $\nabla G(X)$ este gradientul de la G în raport cu X, un vector linie format din derivate parţiale evaluate în starea de stabilitate $\left\{G_i(\ ) = \frac{\partial G}{\partial X^i}\right\}_{i=1}^{n}$. Expresia dată conţine devieri absolute ai fiecărei variabile de la starea sa de stabilitate, $X_t^i - X^i$ (în timp ceea ce se propune sunt devieri în logaritmi). Putem obţine versiunea linearizată în logaritmi din expresia de mai sus dacă înmulţim şi împărţim fiecare termen din sumă cu valoarea în satrea de stabilitate $\frac{X_t^i - X^i}{X^i} \cong X^i x_t^i$, primim:

$$\sum_{i=1}^{n} G_i(X) X^i x_t^i \cong \sum_{i=1}^{n} H_i(Z) Z^i z_t^i .$$

Această abordare este una destul de generală – e perfect când orice ecuaţie poate fi înscrisă în aşa mod.

Însă, în multe cazuri pot fi folosite trucuri mai simple:

$$X_t = X(1 + x_t)$$

$$X_t Z_t = XZ(1 + x_t + z_t)$$

$$f(X_t) = f(X)\left(1 + \frac{f'(X)X}{f(X)} x_t\right)$$

aici $\frac{f'(X)X}{f(X)}$ este elasticitatea funcţiei f în raport cu X. De exemplu, din ultima ecuaţie urmează că devierea logaritmică de la f este aproximativ egală cu elasticitatea lui f înmulţită cu devierea logaritmică a argumentului său.

2.7.2 Linearizarea logaritmică a economiei planificate

Să trecem la linearizarea logaritmică a ecuațiilor obținute. Se vor folosi diferite modalități de liniarizare logaritmică pentru fiecare din ele, din motivul de a face cunoştință cu mai multe „tehnici” posibile. Pentru a fi siguri pe rezultat, de fiecare dată aplicați metoda cea mai generală din cele prezentate anterior. Unele din ele sunt întradevăr simple: de exemplu, funcția de producere deja este lineară în logaritmi, în sensul că, logaritmând această formă funcțională, obținem o expresie liniară în logaritmi: $\ln Y_t = \ln A_t + \alpha \ln K_t + (1-\alpha)\ln L_t$. Evaluînd-o în starea de stabilitate şi scăzând din ea ecuația rezultantă pentru starea de stabilitate, obținem (de menționat, că expresia se îndeplineşte exact, aceastu nu e o aproximație):

$$y_t = a_t + \alpha k_t + (1-\alpha) l_t \tag{2.17}$$

Ecuația pentru acumularea de capital nu este liniară în logaritmi, însă e posibilă linearizarea ei în logaritmi în modul următor. Împărțind la K_t primim:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1-\delta) + \frac{I_t}{K_t}$$

Aplicând al doilea „truc” de mai sus, avem:

$$\frac{K}{K}(1 + k_{t+1} - k_t) = 1 - \delta + \frac{I}{K}(1 + i_t - k_t)\,,$$

Simplificând:

$$k_{t+1} - k_t = \frac{I}{K}(i_t - k_t)\,,$$

Şi înlocuind raportul dintre investiții şi capital SS:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \delta i_t \tag{2.18}$$

Ecuația Euler este (înlocuind forma funcțională pentru funcția de utilitate):

$$1 = \beta E_t \left\{ \frac{C_t}{C_{t+1}} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta + 1 \right) \right\}.$$

Este o acțiune trunchiată deoarece implică aşteptări. Oricum, în urma aplicării aproximației de ordinul întâi, implicit se presupun unele echivalențe, astfel aşteptarea unei funcții neliniare dependentă de variabile aleatoare va fi egală (la primul aranjament) cu funcția de la aşteptările acestor variabile. Ținând cont de acest fapt, să înscriem versiunea ecuației în prevederi perfecte[2]:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta + 1 \right)$$

Apoi, aplicând al doilea „truc” obținem:

$$\frac{C}{C}(1 + c_{t+1} - c_t) = \beta \left(\alpha \frac{Y}{K}(1 + y_{t+1} - k_{t+1}) - \delta + 1 \right)$$

Omitem termenii constanți, astfel încât primim:

$$c_{t+1} - c_t = \beta\alpha \frac{Y}{K}(y_{t+1} - k_{t+1})\,.$$

Amintindu-ne că în starea de stabilitate $\frac{Y}{K} = \frac{R+\delta}{\alpha}$ şi aplicând operatorul de aşteptare (ținem cont de faptul că capitalul este o variabilă de stare, $E_t k_{t+1} = k_{t+1}$), obținem ecuația Euler liniarizată în logaritmi:

$$E_t c_{t+1} - c_t = \frac{R+\delta}{1+R}(E_t y_{t+1} - k_{t+1}) \tag{2.19}$$

---

[2] A se vedea următorul compartiment privind linearizarea logaritmică a ecuației Euler care nu foloseşte versiunea de prevedere perfectă

Ecuația obținută manifestă proprietatea de substituție în consum: în cazul în care produsul de capital la limită se aşteaptă a fi mare, creşterea aşteptată a consumului este înaltă (consumul de azi scade deoarece planificatorul economiseşte pentru a mări stocul de capital). De menționat, că elasticitatea intertemporală de substituție s-a normat implicit (curbura funcției de utilitate) la o unitate prin asumarea formei logaritmice pentru de utilitate. Următoarea discuție asupra acestei probleme va avea loc la cercetarea economiei decentralizate.

Liniarizarea logaritmică a condițiilor intertemporale de optimalitate $v_L(L_t)=(1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}\frac{1}{C_t}$ produce (prin aplicarea a „trucului" trei):

$$v_L(L)[1+\varphi l_t]=(1-\alpha)\frac{Y}{L}\frac{1}{C}(1+y_t-l_t-c_t)\,,$$

unde $\varphi\equiv v_{LL}L/v_L$ este elasticitatea dizutilității la limită a muncii în raport cu variația orelor lucrate. O explicație mai utilă se va regăsi în liniarizarea logaritmică pentru economia competitivă. Simplificând obținem:

$$(1+\varphi)l_t=y_t-c_t\;, \tag{2.20}$$

Liniarizarea logaritmică a restricțiilor asupra resurselor economice este efectuată în modul ce urmează. Aplicăm primul „truc" pentru a primi:

$$Y(1+y_t)=C(1+c_t)+I(1+i_t)\,.$$

Împărțind la Y şi folosind faptul că în starea de stabilitate are loc $Y=C+I$, primim

$$y_t=\frac{C}{Y}c_t+\frac{I}{Y}i_t\,.$$

Nu se va recurge la calcularea rapoartelor în starea de stabilitate care (fracția consumului în output şi a investițiilor în output). Atenționăm, că deseori rapoartele calculate în starea de stabilitate rezultă din liniarizarea logaritmică. Investițiile în raport cu capitalul şi outputul în raport cu capitalul au fost aflate anterior, iar cota parte a investițiilor în output este chiar raportul celor două. Prin urmare, cota consumului în output este uşor de găsit:

$$\frac{I}{Y}=\frac{I}{K}\frac{K}{Y}=\alpha\frac{\delta}{R+\delta};\quad \frac{C}{Y}=1-\frac{I}{Y},\ \text{astfel:}$$

$$y_t=\left(1-\alpha\frac{\delta}{R+\delta}\right)c_t+\alpha\frac{\delta}{R+\delta}i_t \tag{2.21}$$

Va urma o analiză puțin plicsitoare dar necesară. Este nevoie de a „număra" ecuațiile şi variabilele endogene pentru a se încredința că numărul ecuațiilor este egal cu numărul variabilelor endogene.[3] Avem cinci variabile pentru care se doreşte o soluție şi 5 ecuații: (2.17),(2.19), 2.18, 2.20, 2.21.

Exercițiul 11 *Pentru a se încredința în reuşita cunoaşterei profunde a acestui material, substituiți investițiile* i *şi outputul* y *în sistemul de mai sus şi obțineți un sistem cu trei ecuații şi trei necunoscute:* c, k, l *. Acum încercați să logaritmați direct ecuațiile nelineare 2.6, 2.7, 2.5 şi încredințați-vă că ați obținut exact acelaşi rezultat (de sigur, după ce folosiți formele funcționale pentru* F *şi* U *deja acceptate)*

[3] La prima vedere se crede că aceasta e trivial însă, cu certitudine, nu ve-ți rîde atunci când ve-ți încerca să construiți propriul model. Lla început fiecare încercare se va sfîrşi cu o ecuație sau cu o variabilă în plus (sau cîteva..). Desigur, e posibil că „numărarea" să se producă după ce se va deriva echilibru neliniar complet, însă fiți siguri că atunci când liniarizați în logaritmi veți folosi aceeaşi condiție.

Şi, în final, este necesar de specificat, dinamica tehnologiilor – de aici încoace acesta este un proces stocastic de forță exogen. În literatura de specialitate există un standard privind dinamica A_t care urmează un proces AR(1) în logaritmi, şi anume: $a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$,

unde ε_t este zgomot alb. La măsurarea lui a se va reveni ulterior.

2.7.3 Linearizarea logaritmică a economiei competitive

În scopul finalității se va recurge la linearizarea logaritmică a condițiilor de echilibru ale economiei competitive. Pentru a uşura procedura, se vor folosi condițiile de curățare ale pieței şi se va substitui cererea şi oferta pentru cantitățile actuale agregate (şi anume, K^s înlocuite prin K^d, etc.). Funcția de producere şi acumularea de capital afectează mediul, deci sunt primitivele modelului. Deaceea, ele sunt identice cu acelea din echilibru în economia planificată 2.17, 2.18.

Ecuația Euler este (având în acelaşi timp substituită definiția ratei dobînzii reale):

$$1 = \beta E_t \left\{ \frac{C}{C_{t+1}} (R_{t+1} + 1) \right\}.$$

Ca şi pînă acum, unele identități ne ajută să obținem uşor liniarizarea în logaritmi. Între timp rata dobînzii a devenit o simplă rată (e exprimată în puncte procentuale), nu e nevoie de calcularea devierilor în logaritmi: şi anume, ea va fi: $r_{t+1} \equiv R_{t+1} - R$. Pentru a demonstra aceasta, se va logaritma versiunea ecuației Euler în prevederi perfecte (fără operatorul de aşteptare) ca să obținem:

$$0 = \ln \beta + \ln C_t - \ln C_{t+1} + \ln(1 + R_{t+1}).$$

Să adunăm şi să extragem $\ln C$, apoi folosim expresia $\beta = (1+R)^{-1}$ ca să primim $c_{t+1} - c_t = \ln(1 + R_{t+1}) - \ln(1+R) \cong R_{t+1} - R \equiv r_{t+1}$ şi, aplicând operatorul de aşteptare (suntem în drept să procedăm astfel în baza unor echivalențe), obținem ecuația Euler lineară în logaritmi:

$$E_t c_{t+1} - c_t = E_t r_{t+1} \qquad (2.22)$$

Această ecuație poate fi obținută în cazul în care admitem că rata dobînzii reală şi consumul viitor sunt lognormali şi homoscedastici.[4] Ecuația Euler în logaritmi devine (iarăşi se foloseşte egalitatea $\ln(R_{t+1} + 1) = R_{t+1}$):

$$-\ln C_t = \ln \beta + \ln E_t \left\{ C_{t+1}^{-1} (R_{t+1} + 1) \right\} = \ln \beta + E_t \ln\left\{ C_{t+1}^{-1} (R_{t+1} + 1) \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{var}_t \left(\ln\left\{ C_{t+1}^{-1} (R_{t+1} + 1) \right\} \right) =$$

$$\ln \beta - E_t \ln C_{t+1} + E_t R_{t+1} + \frac{1}{2} \operatorname{var}_t (\ln C_{t+1}) + \frac{1}{2} \operatorname{var}_t (R_{t+1}) - \operatorname{cov}_t (R_{t+1} \ln C_{t+1})$$

În cazul în care se îndeplinesc condițiile de homoscedasticitate şi momentele de ordinul doi sunt constante indicii de timp pot fi omişi. Deci, evaluând ecuația obținută în starea de stabilitate şi scăzând rezultatul din ecuația pentru dinamică, primim ecuația (2.22) (constantele, care conțineau momentele de ordinul doi, sunt omise).

Ecuația (2.22) obține proprietatea de substituție intertemporală în consum: în cazul în care rata reală a dobînzii se aşteaptă a fi mare, creşterea aşteptată a consumului va fi mare (consumul de astăzi diminuează deoarece gospodăriile casnice economisesc). De menționat,examinarea funcției logaritmice de utilitate a condus la normarea implicită a elasticității intertemporale de substituție cu unu (curbura funcției de utilitate). La mod general impactul ratei dobînzii asupra consumului va depinde de acest parametru.

Combinând prezentarea ratei dobînzii brute cu expresia pentru rata de rentă în echilibru, avem

[4] Dacă variabilile X şi Y sunt lognormale, $\ln E[XY] = E[\ln XY] + 1/2 \operatorname{var}[\ln XY]$

$1+R_{t+1}=\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}+1-\delta$ care, evaluată în starea de stabilitate, devine $\frac{Y}{R}=\frac{R+\delta}{\alpha}$. Aplicarea aproximației de ordinul întâi, şi folosirea primului truc pentru partea stîngă a ecuației şi trucului doi pentru partea dreaptă a ecuației, produce:

$$(1+R)(1+r_{t+1})=\alpha\frac{Y}{K}(1+y_{t+1}-k_{t+1})+1-\delta$$

Înlocuind $\frac{Y}{K}$ din ecuația recent obținută (după eliminarea termenilor constanți) primim:

$$r_{t+1}=\frac{R+\delta}{1+R}(y_{t+1}-k_{t+1}).$$

Şi, în final, liniarizarea logaritmică a condițiilor de optimalitate $v_L(L_t)=W_t/C_t$ produce (aplicând al „treilea truc"): $\varphi l_t=w_t-c_t$, unde $\varphi=v_{LL}/v_L L$ este elasticitatea dizutilității la limită a muncii în raport cu variația orelor lucrate. Foarte important e că φ este interpretată ca elasticitatea inversă a ofertei de muncă l în raport cu modificările în rata salarială w, consumul fiind fixat.[5] Dacân $\varphi=0$, oferta de muncă este infinit elastică – când cererea sporeşte, gospodăriile casnice sunt gata să muncească ore în plus pentru salariul real propus. În acelaşi timp, pentru acest caz consumul este independent de venitul non-salarial, şi, prin urmare, de bunăstare. Când $\varphi\to\infty$, oferta de muncă este inelastică, şi numai sporirea cererii pentru muncă generează deplasări în salariul real, în timp ce orele lucrate rămîn intacte.

NOTĂ. În multe lucrări ştiințifice funcția de utilitate este specificată mai degrabă prin timpul liber $1-L_t$ decât prin orele lucrate, reprezentând o funcție de utilitate sub forma: $\ln C_t+h(1-L_t)$ unde $h(\ )$ ecte o funcție diferențiabilă continuu, crescătoare şi concavă. Încredințați-vă că este posibil de obținut condițiile de ordinul întâi şi în acest caz. De remarcat, elasticitatea ofertei de muncă devine $\varphi L/(1-L)$, deci depinde de orele lucrate în starea de stabilitate.

Expresia pentru salariul real şi rata de rentă sunt deja liniare în logaritmi, astfel avem:

$$w_t=y_t-l_t$$
$$r_t^K=y_t-k_t$$

Ceea ce poate fi tratat ca „cererea pentru factori" din partea firmelor, la un nivel de output fixat. Cum e de aşteptat, cererea este descrescătoare în raport cu prețurile factorilor respectivi.

Restricțiile bugetare pentru gospodăriile casnice iau forma:

$$\frac{C}{Y}c_t+\frac{I}{Y}i_t=\frac{WL}{Y}(w_t+l_t)+\frac{R^K K}{Y}(r_t^K+k_t)$$

Ne putem convinge că această expresie este aceiaşi ca şi în cazul restricțiilor asupra resurselor economice care se regăsesc în echilibrul planificat: pur şi simplu se înlocuesc expresiile liniarizate logaritmic pentru salariul real, rata de rentă, şi cotele WL/Y şi R^K/Y în starea de stabilitate pentru a obține y_t în partea dreaptă a ecuației. Ceea ce încă o dată confirmă faptul că condițiile de „curățare ale pieței" (după cum se vor numi ele în echilibrul competitiv), sunt de fapt inutile, odată ce sunt înregistrate restul condițiilor de echilibru. De ce? Deoarece acestea sunt combinații din alte condiții liniare de echilibru şi, prin urmare, nu conțin altă informație nouă în ele! Însă, dacă pentru careva motiv, se insistă la examinarea acestei ecuații pentru soluționarea modelului (prin includerea ei în codul de program respectiv), va fi necesar să se excludă

[5] Deoarece utilitatea este separată în consum şi muncă, φ la rîndul său este elasticitatea inversă Frisch a orelor de muncă în raport cu salariul, şi anume elasticitatea nu menține fixat consumul, dar utilitatea la lumită a consumului (care, în cazl separării utilității, este proporțională consumului). Pentru cazuri mai generale, preferințele ne separabile, elasticitatea Frisch şi elasticitatea care menține consumul fixat sunt noțiuni diferite.

una din expresiile pentru prețurile factor, condițiile de curătare ale pieței, sau propriu zis restricția asupra bugetului gospodăriilor casnice.

Calculând din nou numărul variabileleor şi numărul ecuațiilor observăm, că se înregistrează cu trei variabile mai mult (w, r^K şi r) şi cu trei ecuații mai mult în comparație cu economia planificată: două pentru prețurile factorilor iar una defineşte rata dobînzii. Cum şi era de aşteptat, după înlocuirea acestor trei variabile se vor obține exact aceleaşi ecuații ca şi pentru echilibru planificat – deoarece două stări de echilibru sunt echivalente (ceea ce avem de demonstrat în cazul general este neliniaritatea şi soluționarea ei cu ajutorul echilibrului aproximativ).

2.8 Calibrarea

Analizând starea de stabilitate, aflăm modul în care variabilele şi ratele (multe din ele apar în echilibru, fiind liniarizate logaritmic) se îmbină cu „parametrii esențiali" şi anume cu parametrii ce corespund preferințelor şi tehnologiilor, fie că $X = S(\Theta)$, unde Θeste vectorul tuturor literelor Greceşti, utilizate în model, în cazul de față $\alpha\delta\beta\varphi$. Această corespondență este univocă. Un moment important în soluționarea modelului constă în obținerea valorilor numerice pentru aceşti parametri. Există mai multe tehnici pentru a realiza aceasta – de regulă – se alege dat fiind cunoscute valorile variabilelor în starea de stabilitate şi soluționarea apoi pentru „Greceşti" prin inversarea $S : \Theta = S^{-1}(X)$ sau parametrii esențiali să tratează drept valori cunoscute şi soluționarea pentru vaorile variabilelor endogene în starea de stabilitate, folosind $X = S(\Theta)$.

Prima abordare este ceea mai apropiată spiritului, pe care îl promo vau adepții modelelor RBC: utilizarea numai datelor statistice din Conturile Naționale (CN), privind agregatele macroeconomice, folosirea relațiilor dintre „Greeks" şi valorile ratelor în starea de stabilitate, determinarea de „Greeks". Aceasta necesită cunoştințe profunde privind datele din CN, uneori e importantă alegerea şi fundamentarea agregatelor macroeconomice pentru a fi utilizate (spre exemplu, cum vor fi trata bunurile durabile de consum, profiturile, deprecierea, etc.) - date statistice diferite conduc la valori diferite pentru X şi, evident, (uneori foarte diferite) valori pentru parametrii de bază. În calitate de „*Ghid al Utilizatorului*" într-o atare abordare poate servi articolul autorilor Cooley şi Prescott.

Exemplu: Vom încerca să efectuăm calibrarea pentru modelul examinat. Factorul de discont în starea de stabilitate este restricționat de condiția $R = \beta^{-1} - 1$, prin urmare, cunoscând valoarea agregată a ratei dobînzii, obținem valoarea pentru β (rămîne să se decidă, care valoare a ratei dobînzii va fi folosită la mod propriu; King şi Rebelo folosesc randamentul mediu pentru capital, fiind cunoscu randamentul mediu pentru acei 500 Săraci&Standard). Se va afla factorul de discont folosind expresia $\beta^{-1} = \alpha\frac{Y}{K} + 1 - \delta$ dar nu rata dobînzii, ceea ce înseamnă că, în primul rând, se vor afla α şi δ, apoi se va extrage rădăcina şi se va determina β pentru a găsi raportul dintre capital şi output. În acest model simplu examinat, rata de depreciere este pur şi simplu egală cu cota parte a investițiilor în capital, $\delta = \frac{I}{K}$. α se va afla din simpla constatare, că este egală cu cota parte a venitului din capital în venitul total $\alpha = \frac{R^K K}{Y}$ (viziunea dată este mult mai simplă decât ceea ce prezintă realitatea – obținerea măsurărilor corecte pentru „venitul din capital" este foarte complicată – a se vedea Cooley şi Prescott). IMPORTANT: Să se procedeze prudent la transformarea tuturor ratelor – discont, dobîndă, depreciere, etc. – încât se operează cu valori trimestriale! La fel, este necesar să se folosească valori per-capita pentru agregatele macroeconomice, deoarece modelul economic este per-capita.

Probabil, ceea mai mare dificultate ține de selectarea parametrului de elasticitate a ofertei de muncă- sau elasticitatea de sbstituție intertemporală a ofertei de muncă.

Ceea ce şi se întîmplă atunci, când chiar şi cei „mai înflăcărați" teoreticieni RBC primesc-sau folosesc „ieftenirea fixă". Această fixare constă în folosirea formelor funcționale speciale pentru preferințe în aşa mod încât elasticitățile sunt fixate. În interiorul claselor de preferințe cu care se va lucra, aceasta se întîmplă în cazul în care se admite că $v(L)=\chi \ln L$, care efectiv produce elasticitatea unitară a orelor lucrate în raport cu salariu $\varphi \equiv v_{LL} L / v_L = 1$ sau $v(L)=\chi L$, care efectiv conduce la o elasticitate infinită a ofertei forței de muncă, deoarece $\varphi = v_{LL} L / v_L = 0$. În caz general, oricum se cere determinarea valorilor pentru aceşti parametri.[6] De regulă, este necesar să se recurgă la studii microeconomice care estimează aceste elasticități, deşi nu e deloc clar dacă există careva relație pentru acest parametru, prin care microeconometricienii îl estimează la momentul actual. În finai, ponderea relativă, pe care agenții economici i-o atribuie muncii în funcția de utilitate, sugerează că restul parametrilor pot fi calculați prin asumarea pentru numărul orelor lucrate valorii din starea de stabilitate L şi utilizarea expresiei (2.16).

O altă abordare, care se numeşte „parametrizare", pur şi simplu oferă „Greeks" valori din evidența „micro" (nu utilizați nicicând „calibrarea" la nivel verbal în cazul în care folosiți această abordare, în special atunci când colegul „Minnesottabred" este audiat). De această abordare se face abuz în literatura de specialitate, în special atunci când se examinează modele foarte mari cu mulți parametri, ar fi mai bine să se evite aplicarea acestei abordări oricând e posibil.

2.9 „Soluționarea" modelului

În final, modelul examinat este reprezentat de un sistem de ecuații diferențiale cu aşteptări. Trei ecuații sunt (s-au restabilit condițiile de echilibru liniarizat pentru k, c, l , fiind eliminate variabilele i şi y , prin excluderea din sistem a ecuațiilor notate cu steluță:

$$\left\{\begin{array}{l} E_t c_{t+1} - c_t = \dfrac{R+\delta}{1+R}\left(E_t y_{t+1} - k_{t+1}\right) \\ k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \delta i_t \\ * i_t = \dfrac{R+\delta}{\alpha\delta} y_t + \left(1 - \dfrac{R+\delta}{\alpha\delta}\right) c_t \qquad): \\ * y_t = a_t + \alpha k_t + (1-\alpha) l_t \\ (1+\varphi) l_t = y_t - c_t, \end{array}\right.$$

$$k_{t+1} = (1+R)k_t + \frac{R+\delta}{\alpha} a_t + \frac{R+\delta}{\alpha}(1-\alpha) l_t - \left(\frac{R+\delta}{\alpha} - \delta\right) c_t \tag{2.23}$$

$$E_t c_{t+1} - c_t = \frac{R+\delta}{1+R}(1-\alpha)(E_t l_{tt+1} - k_{t+1}) + \frac{R+\delta}{1+R} E_t a_{t+1} \tag{2.24}$$

$$l_t = \frac{1}{\alpha+\varphi} a_t + \frac{\alpha}{\alpha+\varphi} k_t - \frac{1}{\alpha+\varphi} c_t \tag{2.25}$$

[6] A se vedea Prescott (1986) pentru a cunoaşte modul de obținere al „elasticităților empirice", bazate numai pe date agregate, prin folosirea atât datelor privind gospodăriile casnice, cât şi date instituționale privind orele lucrate.

Există mai multe metode pentru soluționarea acestui sistem, cel puțin cîteva din ele se vor regăs în Dr.Meeks[7]. Întrucât majoritatea modelelor este de dimensiuni mai mari decât acest în examinare, de regulă, va fi necesar să se apeleze la calculator. Aici se va demonstra cum poate fi soluționat acest exemplu simplu „manual”, se va propune un principiu general de soluționare, şi deaceea aceiaşi tehnică poate fi folosită la utilizarea calculatorului.

Să admitem pentru un moment că munca este inelastică, $\varphi \to \infty$. Ceea ce va permite soluționarea modelului în mod analitic şi va fi întradevăr transparent ce se va întîmpla în „cutia neagră”, după cum mulți percep codul de program pentru soluționarea sistemelor de ecuații diferențiale cu aşteptare. Ne vom întoarce la munca elastică când vom soluționa modelul numeric. Problemele în cauză care devin simple sunt acelea că ecuația pentru orele lucrate devine: $l_t = 0$, şi sistemul în formă standard este (variabila k_{t+1} din prima ecuație a fost înlocuită îtr-a doua ecuație cu scopul ca partea dreaptă să conțină numai variabile endogene la momentul de timp t):

$$\begin{aligned} E_t c_{t+1} = &\left(1 + \left(\frac{R+\delta}{\alpha} - \delta\right)\frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R}\right)c_t - (R+\delta)(1-\alpha)k_t - \\ &- \frac{(R+\delta)}{\alpha}\frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R}a_t + \frac{R+\delta}{1+R}E_t a_{t+1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$k_{t+1} = (1+R)k_t - \left(\frac{R+\delta}{\alpha} - \delta\right)c_t + \frac{R+\delta}{\alpha}a_t \tag{2.27}$$

În formă matriceală (să amintim că $E_t k_{t+1} = k_{t+1}$), notând prin x_t vectorul variabilelor endogene $[c_t, k_t]'$:

[7] A se vedea Campbel (1994) pentru soluția analitică privind „coeficienții nedeterminați”

$$\Gamma := \begin{bmatrix} 1+\left(\frac{R+\delta}{\alpha}-\delta\right)\frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R} & -(R+\delta)(1-\alpha) \\ -\left(\frac{R+\delta}{\alpha}-\delta\right) & 1+R \end{bmatrix};$$

$$\Psi := \begin{bmatrix} -\frac{R+\delta}{\alpha}\frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R}+\frac{R+\delta}{1+R}M \\ \frac{R+\delta}{\alpha} \end{bmatrix},$$

aici M este un operator general – se va postula că aşteptările pentru tehnologiile de mîine reprezintă o funcție liniară de la tehnologiile actuale – de exemplu, dacă şocul este $AR(1)$, $M=\rho$. Însă această metodă de soluționare funcționează chiar şi atunci când şocul nu e $AR(1)$ (Dacă şocul este AR de ordin mai mare, atunci M conține operatori cu întîrziere).

Cum se va soluționa sistemul de ecuații? Dacă sunteți tentați să afirmați: aceasta este autoregresie vectorială, astfel îcât se va itera înapoi (sau se va utiliza operatorul cu întîrziere) pentru a obține $x_t=\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^i\Psi u_{t-i}$, va trebui de citit atent materialul din secția imediat următoare, deoarece aceasta este pur şi simplu INCORECT.

NOTĂ: diferite tehnici de soluționare, oricum prezintă sistemul în mod diferit, exprimând variabilele actuale ca funcții dependente de valorile lor aşteptate şi de şocuri:

$$x_t=\Omega_x E_t x_{t+1}+\Omega_\alpha a_t \quad . \tag{2.30}$$

Prezentarea dată este echivalentă celei precedente, în care $\Omega_x=\Gamma^{-1}$; $\Omega_a=-\Gamma^{-1}\Psi$.

2.9.1 Soluționarea înainte şi înapoi: stabilitate (locală), nesiguranța şi unicitatea echilibrului

O regulă generală, care e dorit să fie memorizată pentru totdeauna constă în faptul că variabilele de control se vor soluționa „înainte” iar variabilele de stare (predeterminate) „înapoi”. Nu este nici un fel de mister implicat aici. Decizzile privindla variabilele de control se iau de către agenții economici, care privesc în viitor, maximizând valoarea aşteptată a funcției obiectiv: deci distribuția şocurilor pe viitor va conta, şi nu este nici o valoare iniţială de la care să se pornească. Variabilele de stare sau predeterminate sunt deja cunoscute pentru timpul t ; întradevăr, reprezintă întreaga istorie a economiei, pentru ele se cunosc valorile iniţiale şi integral distribuţia precedentă a şocurilor va fi cunoscută.

Să admitem că s_t este o variabilă de stare pentru care există ecuaţia, în care u este un şoc exogen: $s_{t+1} = \lambda_s s_t + u_t$. Dacă această condiţie nu este satisfăcută ecuaţia devine insatabilă.

Ea poate fi uşor soluţionată „înainte" producând $s_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_s)^i u_{t-i}$ dacă condiţia de stabilitate $\lambda_s < 1$ este satisfăcută.[8] Dacă această condiţie nu este satisfăcută, ecuaţia nu este stabilă.

Fie că x este variabilă de control şi există următoarea ecuaţie care dictează dinamica ei: $E_t y_{t+1} = \lambda_t y_t + u_t$.

Una din modalităâile de soluţionare ale ei constă „iterarea înainte"[9] (sau, dacă utilizăm operatorul „înainte" F , $Fy_t = y_{t+1}$) , după înlocuire $y_t = (\lambda_y)^{-1} E_t y_{t+1} - (\lambda_y)^{-1} u_t$ obţinem $y_t = -E_t \sum_{t=0}^{\infty} (\lambda_y)^{-i-1} u_{t+i}$.

Este clar că transformările au loc atunci şi numai atunci când $\lambda_y > 1$, ceea ce contravine cerinţelor înaintate pentru ecuaţia „înapoi".

Este un exemplu simplu pentru o singură ecuaţie, însă acelaşi principiu poate fi aplicat la modele cu mai multe ecuaţii. Este un rezultat general care aparţine Lui Blanchard şi Kahn (Econometria) şi sună astfel: într-un sistem din n ecuaţii diferenţiale cu aşteptări, în care m variabile sunt predeterminate sau variabile de stare (şi restul $n - m$ sunt variabile de „control"), o soluţie unică există atunci şi numai atunci când exact m rădăcini (valori proprii) ale matricei de tranziţie pentru acest sistem se regăsesc în interiorul unui cerc unitar. Dacă mai multe rădăcini se regăsesc în interiorul cercului, apare situaţia de „instabilitate"[10]: nu există nici un fel de echilibru stabil, aproape ca acel din exemplu descris mai sus cu $\lambda_s > 1$. Este imposibilă soluţionarea unor ecuaţii cu întîrzieri prin metoda "înapoi". Dacă "prea multe" rădăcini se află în interiorul cercului unitar, atunci este cazul "echilibrului nedeterminat": nu este posibilă soluţionarea unei ecuaţii de tip înainte prin metoda de "înaintare". Pentru o excelentă tratare a acestei probleme (şi nu numai) insistent se va recomanda cartea Roger Farmer: "Macroeconomia profeţiilor auto-îndeplinite" publicată de MIT Press.

Vom încerca să înţelegem acest fenomen mai bine prin revizuirea exemplului simplu cu două variante examinat. Ceea ce într-adevăr e greşit în soluţionarea întregului sistem prin metoda "înapoi" constă în faptul că consumul este variabilă de control privită înainte. Şi acesta nu e numai un ataşament tehnic, este o percepere economică: la miezul acestui model (şi a multor modele, care cercetează ciclurile de afaceri) stă ipoteza venitului permanent; consumul depinde de valoarea prezentă discontată a profitului viitor, şi anume de resursele pe durata vieţii. Din altă parte, capitalul este o variabilă de stare: ea încorporează evoluţia economică, şi anume, toate schimbările precedente privind consumul vizavi de investiţii. Deci, este necesar de soluţionat două ecuaţii, una dintre care înainte iar alta înapoi.

---

[8] Să ne amintim că această ecuaţie poate fi soluţionată iterativ "înapoi" sau prin operatorul cu întîrzieri: $s_{t+1} = \frac{1}{1-\lambda_s L} u_t$, şi să ne amintim că $\frac{1}{1-\lambda_s L} = 1 + \lambda_s L + (\lambda_s L)^2 + \ldots + (\lambda_s L)^i + \ldots$ Puterea de λ_s tinde spre zero odată cu satisfacerea condiţiilor de stabilitate, în caz contrariu se produce o explozie şi ecuaţia devine instabilă.

[9] Soluţionând această ecuaţie prin iterarea înainte: $x_t = (\lambda_x)^{-1} E_t x_{t+1} - (\lambda_x)^{-1} u_t = (\lambda_x)^{-2} E_t x_{t+2} - (\lambda_x)^{-2} E_t u_{t+1} - (\lambda_x)^{-1} u_t$, şi aşa mai departe (folosind legea aşteptărilor iterative).

[10] Reamintim că primul vector propriu (prima coloană a lui P), l-om nota prin p_+, corespunde lui λ_+, şi se determină din: $\Gamma p_+ = \lambda_+ p_+$

Două ecuații nu sunt independende şi nu pot fi soluționate separat, în felul în care sunt prezentate acum, Oricum, este posibil de a le "desperechea" aplicând rezultatul din algebra liniară cu privire la descompunerea valorilor proprii ale matricei $\mathbf{\Gamma}$. În concordanță cu cele expuse mai sus (şi cu rezultatul Blanchard-Kahn) este necesar ca o valoare proprie a matricei $\mathbf{\Gamma}$să fie în interiorul cercului unitar iar alta în exteriorul lui. Să vedem, dacă anume acest caz este de referință. Valorile proprii pot fi determinate forțat (ce nu e recomandabil) sau să se demonstreze mult mai elegant, după cum va urma. În primul rând, se va menționa că determinantul lui $\mathbf{\Gamma}$este det$\mathbf{\Gamma}$=1+R>1. Şi determinantul este produsul valorilor proprii, una dintre care va fi întotdeauna în exteriorul cercului unitar; deci, nu se va regăsi "unele" rădăcinină explozive – modelul nu poate fi indeterminat. Rămîne să se demonstreze, că modelul nu posedă "unele" valori proprii explosive, şi anume, că există soluție locală stabilă.

Deci, polinomul characteristic al lui $\mathbf{\Gamma}$are ca rădăcini valorile sale proprii $\lambda_{1,2}$, care sunt:

$J(\lambda) = \lambda^2 - trace(\Gamma)\lambda + \det\Gamma$,

aici *trace* este:

$$trace(\Gamma) = 2 + R + \frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R}\left(\frac{R+\delta}{\alpha} - \delta\right).$$

Existența echilibrului RE unic necesită: $J(-1)J(1) < 0$. Deoarece $J(1) = 1 - trace(\Gamma) + \det\Gamma$, imediat primim că $J(1) = -\frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R}\left(\frac{R+\delta}{\alpha} - \delta\right) < 0$ şi $J(-1) = 4 + 2R + \frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{1+R}\left(\frac{R+\delta}{\alpha} - \delta\right) > 0$. Întrucât $J(0) > 0$, ambele rădăcini sunt pozitive (nu există dinamică oscilatorie)-

Rădăcinile le obținem prin soluționarea

$$J(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{trace(\Gamma) \pm \sqrt{(trace(\Gamma))^2 - 4\det(\Gamma)}}{2}.$$

Vom menționa, că rădăcina ceea mai mică $\lambda_{-} \in (0,1)$ este stabilă iar rădăcina ceea mai mare λ_{+} nu e stabilă.

Din algebra liniară este cunoscut, că o matrice pătrată ne singulară $\mathbf{\Gamma}$poate fi descompusă prin: $\Gamma = P\Lambda P^{-1}$, $\mathbf{\Lambda}$este o matrice diagonală cu valorile proprii λ_{+}şi λ_{-}plasate pe diagonala picipală iar P este matricea constituită din vectorii proprii corespuzători acestor valor proprii.[11] Înlocuim descompunerea în sistemul nostrum şi obținem:

$E_t x_{t+1} = P\Lambda P^{-1} x_t + \Psi a_t$,

înmulțim ecuația obținută cu P^{-1} şi definim o variabilă nouă $z_t = P^{-1}x_t$, ca apoi să primim:

$E_t z_{t+1} = \Lambda z_t + P^{-1}\Psi a_t$.

Acum aceste ecuații ARE sunt decuplate şi pot fi soluționate separat. Prima dintre ele este privită înainte şi are o rădăcină „explozivă" $\lambda_{+} > 1$, notăm primul element al lui z prin z^c, (indicîndă provinienţa de la consum):

$$z_t^c = \lambda_{+}^{-1} E_t z_{t+1}^c - \lambda_{+}^{-1} \left[P^{-1}\Psi\right]_{1.} a_t,$$

aici pentru orice matrice G ,$[G]_{i.}$ denotă linia i . Soluția este:

$$z_t^c = -\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_{+})^{-i-1} \left[P^{-1}\Psi\right] 1.E_t a_{t+i}.$$

Pentru a_t putem folosi orice proces care dorim. Oricum tehnicia de liniarizare logaritmică aplicată, redirecționează atenția spre şocuri „mici". De exemplu, pentru procesul AR(1), $E_t a_{t+1} = \rho^i a_t$ avem că:

---

[11] Să ne amintim, că primul vector propriu (prima coloană a matricei P), o vom numi-o p_{+}care corespunde λ_{+}, se determină din: $\Gamma p_{+} = \lambda_{+} p_{+}$

$z_t^c = -(\lambda_+)^{-1}\left[P^{-1}\Psi\right]1.a_t \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\lambda_+}\right)^i$ şi deoarece $\rho < 1 < \lambda_+$, $z_t^c = -\frac{1}{\lambda_+ - \rho}\left[P^{-1}\Psi\right]_{1.} a_t$.

A doua ecuaţie este privită înainte:

$z_{t+1}^k = \lambda_- z_t^k + \left[P^{-1}\Psi\right]_{2.} a_t$

şi poate fi soluţionată într-un mod standard (reprezentarea de medie schimbătoare poate fi uşor depistată însă nu este informativă). Pentru a determina evoluţia consumului şi a capitalului este necesar de calculat

$$x_t = \begin{pmatrix} c_t \\ k_t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_t^c \\ z_t^k \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina evoluţia investiţiilor şi a outputului, pur si simplu, se foloseşte funcţia de producere (reamintim că $l_t = 0$): $y_t = a_t + \alpha k_t$ şi restricţiile asupra resurselor.

Exerciţiul 12 *Pentru a se încredinţa, că această metodă de soluţionare este percepută, să se încerce soluţionarea modelului (2.30), înscris sub forma „înainte", şi să se demonstreze că soluţia obţinută este aceiaşi.*

2.9.2 Forţa de muncă elastică

Se va examina un caz mai general, pentru care $\varphi < \infty$, eliminând orele lucrate, se va reuşi totuşi de a prezinta modelul prin două ecuaţii:

$$k_{t+1} = \left(1 + R + \frac{(R+\delta)(1-\alpha)}{\alpha+\varphi}\right)k_t + \frac{R+\delta}{\alpha}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}a_t - \left(\frac{R+\delta}{\alpha}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi} - \delta\right)c_t \tag{2.31}$$

$$\left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\frac{R+\delta}{1+R}\right)E_t c_{t+1} = c_t - \frac{R+\delta}{1+R}\frac{\varphi(1+\alpha)}{\alpha+\varphi}k_{t+1} + \frac{R+\delta}{1+R}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}E_t a_{t+1} =$$

Fie că $\gamma = \frac{R+\delta}{1+R}\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}$; $\chi = \frac{R+\delta}{\alpha}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}$, atunci modelul devine:

$$k_{t+1} = (1+\gamma)(1+R)k_t + \chi a_t - (\chi - \delta)c_t \tag{2.32}$$

$$E_t c_{t+1} = \frac{1+\varphi\gamma(\varphi-\delta)}{1+\gamma}c_t - \varphi\gamma(1+R)k_t - \frac{\varphi\gamma\chi}{1+\gamma}a_t + \frac{\chi}{1+\gamma}a_t + \frac{\chi}{1+\gamma}E_t a_{t+1}$$

Acest sistem încorporează cazul muncii inelastice (verificați aceasta!). Menționăm că $\varphi \to \infty$ conduce la $\gamma \to 0;\ \varphi\gamma \to \frac{R+\delta}{1+R}(1+\alpha)$ şi $\chi \to \frac{R+\delta}{\alpha}$) , prin urmare, acest sistem poate fi soluționat în acelaşi mod ca şi anterior.

2.9.3 Examinarea soluției pentru cazul general.

Metoda de soluționare descrisă anterior se bazează pe decompoziția Jardan a matricei de tranziție. În modele mai complicate matricea de tranziție poate fi singulară şi decompoziția nu va avea loc. Metodele de soluționare uşor se aplică în cazurile, bazate pe decompoziția Generalizată Schur, decompoziția generalizată Jordan însă, în majoritatea cazurilor, este necesară aplicarea analizei numerice (prin urmare, utilizarea calculatorului)[12]. Pentru acei cointeresați în efectuarea macromodelării, insistent se recomandă de a face cunoştință cu articolul „Calcularea ecilibrului stocastic în modelele cu aşteptări raționale”, autori Lubik şi Schofheide, Journal of Economic Dynamics and Control, 2004. Nu contează metoda de soluționare utilizată pentru modelele geanerale mult mai mari, soluția în condițiile echilibrului determinat este, de regulă, o ecuație recursivă de forma:

$$x_t = M_x x_{t-1} + M_e e_t \ . \qquad (2.23)$$

Această ecuație are loc pentru vectorul x (vom nota prin x procese exogene, ca de pildă a în cazul de mai sus) şi şocul e fiind zgomot-alb.

2.10 Analiza de bunăstare – exemplu

Un alt avantaj la utilizarea modlelor fundamentate la nivel micro constă în faptul că discuțiile pot fi purtate în termeni de bunăstare. Iar bunăstarea unui agent economic reprezentativ în economia examinată rezumă în valoarea funcției de producere $Z(K_t, A_t)$. Din ecuația lui Bellman, estimată în punctul optim, (când deja este recunoscut că ne aflăm pe traiectoria optimală şi „max” este omis[13]): $V(K_t, A_t) = U(C_t) + \beta E_t V(K_{t+1}, A_{t+1})$.

Pentru a fi mai uşor de interpretat, se va examina transformare monotonă a funcției de valoare şi se va conveni la o funcție de bunăstare, măsurată în unități de consum, defenind implicit o variabilă nouă V_t din: $U(V_t) = Z(K_t A_t)$.

Deaceea: $U(V_t) = U(C_t) + \beta E_t U(V_{t+1})$ (2.34)

Pentru a uşura interperetarea se va examina transformarea monotonă a funcției de valoare şi se va încerca, definind o nouă formă implicită de variabila $V(t)$, interpretarea bunăstării printr-o variabilă evaluată în unități de consum:

$U(V(t)) = Z(K_t, A_t)$

Deaceea:

$U(V(t)) = \beta E_t U(V_{t+1})$

În starea de stabilitate avem $(1-\beta)U(C)$, deoarece U este bijectivă $(1+\beta)V = C$. Aproxirmarea liniară în logaritmi a expresiei (2.34) ne oferă (folosind al „treilea truc”):

---

[12] Ca exemplu de utilizare a acestor metode vedeți codurile de program Matlab şi explicațiile/exemplele propuse de Roland Meeks în clasa de calcul, folosind metoda de soluționare propusă de Paul Klein şi Ben McCollumn.

[13] Ecuația Bellman care nu este supusă optimalității este $V(K_t, A_t) = \max[U(C_t) + \beta E_t V(K_{t+1}, A_{t+1})]$, însă dacă ne axăm pe traiectoria optimă pentru consum (şi implicit pe stocul de capital pentru perioada următoare), putem omite operația de luare a max.

$$U(V)\left(1+\frac{U'(V)V}{U(V)}v_t\right)=U(C)\left(1+\frac{U'(C)C}{U(C)}v_t\right)+\beta U(V)\left(1+\frac{U'(V)V}{U(V)}E_t v_{t+1}\right)\rightarrow$$

$$\frac{U'(V)V}{U(V)}v_t=(1+\beta)\frac{U'(C)C}{U(C)}c_t+\beta\frac{U'(V)V}{U(V)}E_t v_{t+1}$$

În presupunerea că elasticitatea funcției de utilitate $U'(X)X/U(X)$ în raport cu argumentul ei este independentă de valoarea argumentului X (care are loc pentru majoritatea funcțiilor de utilitate, aflate în uz, şi anume, pentru CRRA, log, etc) obținem:

$v_t=(1-\beta)c_t+\beta E_t v_{t+1}$.

În baza ecuației date, traiectoria v_t poate fi simulată şi pentru alte variabile, în scopul evaluării efectului şocurilor de ordinul unu asupra bunăstării unui agent reprezentativ. În continuare perceperea poate fi cîştigată prin soluționarea ecuației „înainte” pentru a obține:

$$v_t=(1-\beta)E_t\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i c_{t+i} \qquad (2.35)$$

Deaceea, efectul de ordinul al oricărui şoc întâi asupra bunăstării unui agent reprezentativ impune consumul să se deplaseze de la trendul de lungă durată (valoarea în starea de stabilitate) şi este măsurat prin valoarea aşteptată prezentă discontată a acestor devieri înmulțită la $(1-\beta)$. Vom menționa, că $1-\beta$ este un număr foarte mic întrucât β este foarte apropiat de 1.

Exercițiul 13 *Care este costul fluctuațiilor din contul bunăstării în economia examinată? Sugestie: dați răspunsul la întrebare într-un mod complet diferit: „Care este prețul eliminării ciclurilor de afaceri”? Justificați răspunsul Dvs printr-o singură propoziție.*

2.11 Evaluarea performanțelor economice

Determinarea variabilelor endogene în funcție de forțele de control exogene permite evaluarea modelului prin compararea previziunilor cu datele existente. Ceea ce ține de calcularea momentelor *variabilelor teoretice* (în model ele reprezintă devierile în logaritmi de la starea de stabilitate sau de la traiectoria de creştere balansată), fiind comparate cu momentele cunoscute ale acestor *variabile prestabilite*, ele, la rîndul său, exprimate în devieri logaritmice de la trendul componentelor. Ceea ce poate fi efectuat prin examinarea a două probleme: a). măsurarea şocului tehnologic, b). calcularea momentelor relevante.

2.11.1 Măsurarea impactului tehnoloic

Ce reprezintă şocul tehnologic? Există o teorie carea tratează acest şoc ca baza fluctuațiilor ciclurilor de afaceri. Atunci, de ce nu există date care să confirme acest fenomen. Orice efort a se conecta la sursele de date cum ar fi Datastream sau căutarea unor similarități (date proxy) ete inutil şi ne întemeiat. La fel, puteți citi FT şi/sau Economist regular (probabil că şi citiți), însă nu cunoaşteți nimic din literatura de specialitate ce să se asemene cu acest şoc, ce pesupune generarea unor fluctuații macroeconomice observabile mari. [14] Ce putem face în acest sens? (şi ce au avut de făcut oamenii în trecut?).

Răspunsul cu care se vine este acel, care deja s-a observat în literatura de Creştere Economică, extragerea componentei stocastice ai productivității din reziduurile Sollow, care este diferența dintre schimbările în intrările (outputul) şi schimbările în ieşirele (inputul) evaluat. Detaliile privind această metodă variază mult în diferite cercetări, însă în esență metoda este aceea care urmează:

[14] Deşi, ca să fim oneşti, lucrurile s-au schimbat recent – a se vedea articolul lui Martin Wolf din Viner, 9 noiembrie privind productivitatea TF în Regatul Unit al Marei Britanie.

$$\ln A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t - (1-\alpha)\ln L_t \quad (2.36)$$

La estimarea acestei ecuații pot fi folosite datele privind outputul total evaluat trimestrial, orele lucrate (sau datele instituționale, sau datele gospodăriilor casnice) pentru a calcula $\ln A_t$. Din cauza problemei de măsurare, nu e atât de trivială după cum se pare. Spre exemplu, nu există o măsurare universală acceptată a stocurilor de capital, tehnologia poate să conțină un trend de timp în date etc. Se vor aduce două exemple remarcabile din literatura existentă privind faptul cum se tratează unele din aceste probleme.

1. Cooley şi Prescott (1995) au reuşit să obțină primele diferențe din (2.36) (să menționăm că $\ln A_t - \ln A_{t+1} = a_t - a_{t-1}$)

$$a_t - a_{t-1} = (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) - \alpha(\ln K_t - \ln K_{t-1}) - (1-\alpha)(\ln L_t - \ln L_{t-1}) \quad (2.37)$$

Ei presupun că variația trimestrială a stocului de capital este zero ($\ln K_t - \ln K_{t-1} = 0$), deoarece aceste serii sunt raportate numai anual şi orice metodă de interpolare a seriilor trimestriale va fi arbitrară şi va produce „zgomot" atât în output cât şi în tehnologie. Ei folosesc datele pentru PNB în termeni reali Y_t şi convin că şocurile sunt bine descrise de AR(1), cum şi s-a presupus anterior, cu $\rho = 0.95$ iar $\sigma_\varepsilon = 0.007$.

2. Metoda King şi Rebello (1999) de măsurare a componentei stocastice în tehnologie diferă sub două aspecte. Primul, se lucrează cu funcția de producere cu includerea progresului tehnologic, argumentat prin muncă H_t, care creşte exogen (ce poate fi regăsit în lecturile privind creşterea economică) pentru a obține o versiune modificată a ecuației (2.36):

$$\ln SR_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t - (1-\alpha)\ln L_t \text{ unde} \quad (2.38)$$

$$\ln SR_t = \ln A_t - (1-\alpha)\ln H_t \quad (2.39)$$

Doi, pentru capital se folosesc serii trimestriale, determinate (urmând articolul Stock şi Watson din Manualul cu acelaşi nume) prin metoda de „invenții permanente"), şi anume, generarea din seriile pentru investiții folosind ecuația de acumulare a capitalului.

Folosind estimarea empirică care se regăseşte în (2.36) şi ecuația deterministă pentru $H: \ln H_t = \ln H_{t-1} + \ln g$, unde g este rata exogenă de creştere, poate fi estimată ecuația pentru $\ln A_t$, pur şi simplu estimăm un trend liniar pentru SR_t pentru a găsi g şi utilizăm riziduurile pentru a estima $\rho = 0.979$ şi $\sigma\varepsilon = 0.0072$. Eliminarea unui trend este consistentă cu exprimarea modelului în devieri logaritmice de la starea de stabilitate, si deaceea fiind staționar (de la început la introducerea progresului tehnologic argumentat prin muncă, cazul în care va fi necesară liniarizarea în regiunea creşterii balansate dar nu în starea de stabilitate constantă – a se vedea King şi Rebello pentru atare modele).

2.12 Reacțiile la impuls şi intuiția

Acest compartiment reprezintă o analiză a reacției la impuls şi o discuție la nivel intuitiv. În primul rând, să stabilim ce funcție de răspuns la impuls avem la moment. Să luăm cel mai simplu proces AR(1) care în cazul nostru descrie productivitatea:

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.40)$$

unde ε_t este distribuit identic independent *iid* $N(0, \sigma_e^2)$. Fie că suntem la momentul de timp t şi începem din satarea de stabilitate ($a_{t-1} = 0$), când apare un şoc neaşteptat ε_t şi fie că $\varepsilon_t = 1$. Reacția lui a_t la ε_t este, pur şi simplu, unitară (1). Pentru a afla ce se va întîmpla la momentul de timp $t+1$, extrapolăm (2.40) pentru o perioadă înainte:

$$a_{t+1} = \rho a_t + \varepsilon_{t+1} = \rho^2 a_{t-1} + \rho\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} = \rho, \quad (2.41)$$

ultima ecuație urmează din $a_{t-1} = 0$ (am pornit de la starea de stabilitate) şi $\varepsilon_{t+1} = 0$ (şocul este unitar)). În mod similar se va afla reacția lui a la impuls pe orizontul $t + j, a_{t+j}$ la şocul unitar ε_t în momentul de timp t, dat fiind ca:

$a_{t+j} = \rho^j$, $\forall j \geq 0$.

Aceasta este o funcție de reacție la impuls pentru un proces de şoc productiv foarte simplu AR(1). De menționat, că funcția de răspuns la impuls este dată de coeficienții în reprezentarea de mişcare medie; să luăm ecuația (2.40) şi s-o inversăm cu ajutorul operatorului de lag (sau să efectuăm substituții repetate), atunci:

$$a_t = \frac{1}{1-\rho L}\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i} . \qquad (2.42)$$

Reacția a_t la un şoc unitar produs cu i perioade în urmă este dată de către coeficienții corespunzători ρ^i în reprezentarea MA.

Să ne concentrăm asupra variabilelor endogene şi să găsim reacția lor la şocul tehnologic unitar. Lucrurile stau tot atât de simplu ca şi în cazul procesului de productivitate cum numai ne amintim că sistemul de ecuații liniare cu aşteptări raționale în cel mai general caz poate fi prezentat ca un proces din (2.33) sub forma de VAR(1) restabilit aici:

$x_t = M_x x_{t-1} + M_\varepsilon \varepsilon_t$, unde x_t este un vector care conține toate variabilele, inclusiv şi a_t. Reacția la mpact este dată de vectorul M_ε deoarece pornim din starea de stabilitate, în care $x_{t-1} = 0$. Ca şi anterior putem inversa (2.33) şi obținem:

$x_t = (I - M_x L)^{-1} M_\varepsilon \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} (M_x)^i M_\varepsilon \varepsilon_{t-i}$, unde I este o matrice identică de dimensiuni respective. Deci, reacția la şocul unitar care a avut loc i perioade în urmă asupra variabilelor actuale se află prin: $(M_x)^i M_\varepsilon$.

2.12.1 Rolul elasticității ofertei de muncă

Figura 1 oglindeşte reacția la un şoc tehnologic unitar în baza a două scenarii privind elasticitatea ofertei de muncă vizavi de calibrarea de bază (s-a obținut prin elaborarea codului de program în Matlab, inclus în Anexa respectivă, accesibil pentru utilizatori). În primul rând, să se atragă atenția la linia albastră continuu, care reflectă cazul muncii inelastice. Tehnologia creşte şi această creştere este persistentă. Aceasta contribuie la creşterea productivității atât a muncii, cât şi a capitalului, prin urmare, şi a produselor la limită. De pe poziția consumătorilor casnici, această creştere în prețurile factorilor se transformă într-o creştere în dorința de a investi (deoarece munca este inelastică, curba ofertei de muncă se plasează vertical – toată creşterea în cererea de muncă este concordată cu creşterea salariului real). Concomitent, aceasta conduce la un consum sporit al gospodăriilor casnice. Oricum, deoarece rata dobînzii va diminua, consumătorii casnici vor socoti optimal de a acumula cîte ceva din creşterea de bunăstare atestată şi de a amîna consumul, ceea ce cauzează reliefarea curburii de reacție pentru consum la impuls. Începând cu a doua perioadă înainte, investițiile din economie încep să se adune la stocul de capital (deşi capitalul nu reacționează direct la impact, fiind o variabilă predeterminată) şi outputul se menține în dezvoltare. Vom atenționa, că reacția maximă a consumului este atinsă în perioadă în care rata dobînzii intersectă axa orizontală: atunci când rata dobînzii devine negativă, este optimal de a substitui consumul de mîine cu acel de azi.

În cazul muncii elastice, modificările în reacții vor fi acelea care urmează. Atunci când productivitatea creşte, firmele sporesc cererea pentru muncă. Ceea ce poate fi observat din „ecuația cererii pentru mincă" în cazul firmelor, şi nu e principial că capitalul nu reacționează la impact: $LD: w_t = a_t + \alpha k_t - \alpha l_t^d$.

Gospodăriile casnice doresc să concordeze o parte din creşterea atestată în cerere prin prestarea sporită de muncă în favoarea unui efect de venit (în cazul muncii inelastice, toată creşterea în cerere se transformă în creştere salarială): $LS: {}_t\varphi l_t^s = w_t - c_t$.

Echilibrul pe piaţa muncii asigugă creşterea salariului real într-o măsură mai mică decât în cazul muncii inelastice. Oricum, majorarea orelor lucrate conduce la o creştere mai mare în produsul de capital la limită, deci e optimal de a investi mai mult, sporind şi mai mult stocul de capital (şi asigurând în continuare expansiunea cererii de muncă pentru momentul de timp $t+1$ şi mai departe). Atât majorarea orelor lucrate, cât şi creşterea de capital asigură o creştere în output. Amintim, că şi φ determină elasticitatea intertemporală de substituție în oferta de muncă (ecuația poate fi obținută prin înlocuirea ofertei de muncă în ecuația Euler): $\varphi\left(l_t^s - E_t l_{t+1}^s\right) = \left(w_t - E_t w_{t+1}\right) + E_{t+1} r_{t+1}$

Din ea desprindem că în cazul, în care se aşteaptă majorarea slariului de mîine în comparație cu acel de azi, e de dorit ca o parte din muncă să fie amînată pentru mîine (mai mult decât atât, mai mic e φ, mai mare e elasticitatea). Acest efect intertemporal de substituție, de regulă, are lor în direcția opusă cu efectul de la venit, dacă salariul real se aşteaptă a fi în creştere (în cazul nostru, a se vedea linia roşie discontinuu). În orice caz, efectul de la orele lucrate este pozitiv (prin urmare, domină efectul de venit) întrucât creşterea salarială se aşteaptă a fi negativă pentru majoritatea paşilor de ajustare. Pe lîngă aceasta, deoarece rata dodînzii reală aşteptată este pozitivă, cel puțin în primul trimestru, există un efect de substituție intertemporală al ratei dobînzii care ne dă de înțeles că se va renunța la odihnă (se va lucra mai mult) astăzi. Toate aceste efecte dispar odată ce $\varphi \to \infty$.

Output Consum Investiții

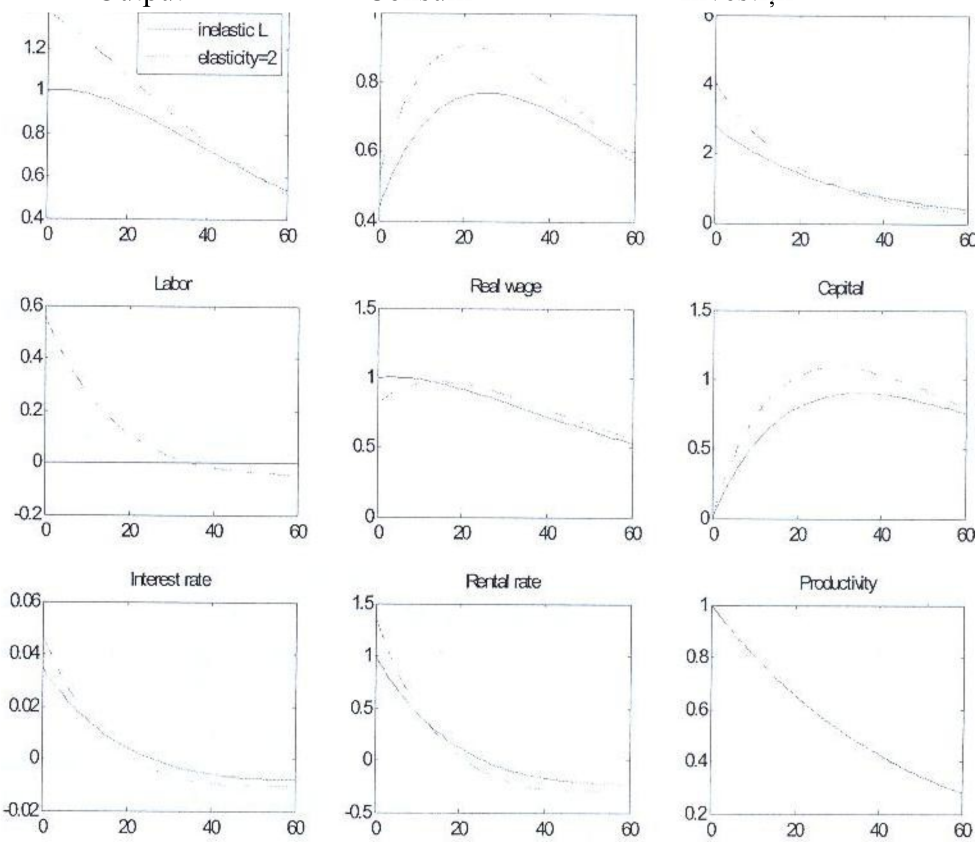


Figura 1. Răspunsul la şocul tehnologic unic, comparația elasticităților de mubncă

Figura 2 prezintă cazul extremal, pictând (linia albastră solidă) cazul în care oferta de muncă este inelastică, $\varphi = 0$ (cazul „muncii indivizibile"). Efectele descrise anterior se amplifică şi pe viitor. Se observă că consumul va urma salariul real, şi orele lucrate se vor ajusta complet întru asigurarea îndeplinirii condițiilor de optimalitate.

Este foarte important să menționăm, că deşi curba ofertei de muncă este orizontală când $\varphi=0$, curba salariului real totuşi e în mişcare! Ceea ce se datorează substituției intertemporale în consum: în situația de impact agenții consumă o parte din majorarea productivității, ceva acumulează (la moment rata reală a dobînzii este înaltă) , în timp ce lucrează atîtea ore cîte le solicită firmele. Salariul real, care curăță piața muncii este $w_t = c_t$, fiind egal cu productivitatea muncii la limită.

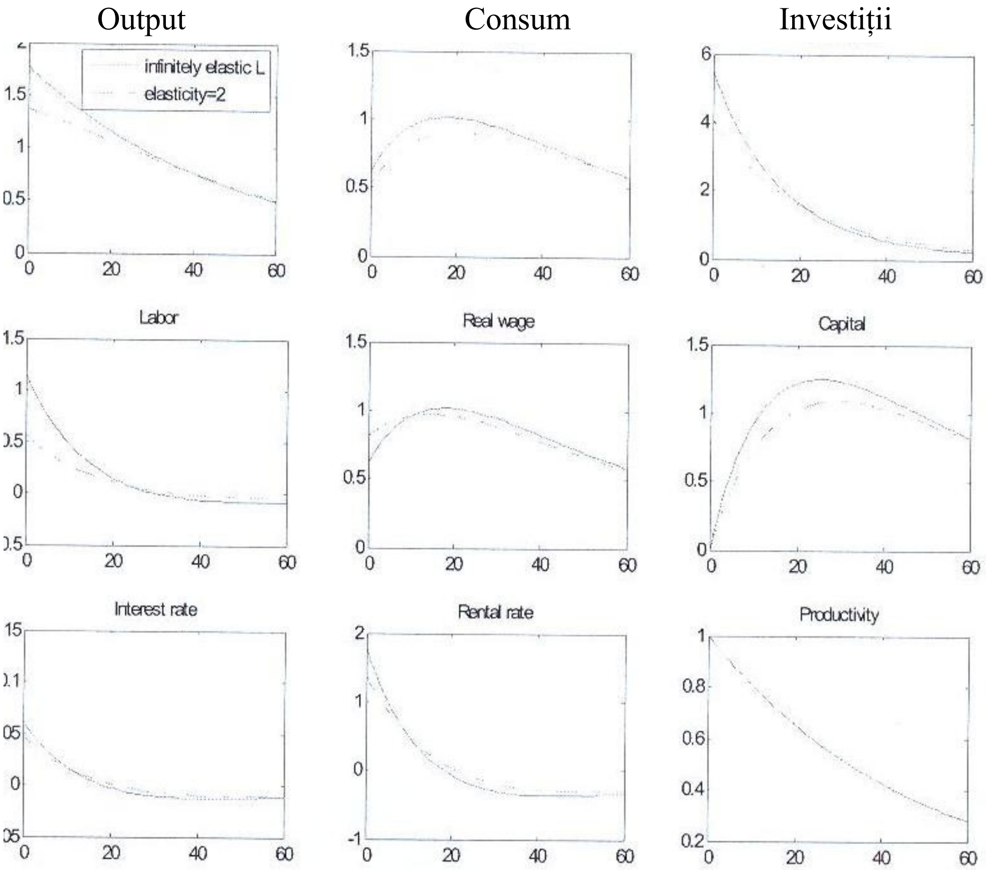


Figura 2. Răspunsul la şocul tehnologic unic, comparația elasticităților de mubncă

2.12.2. Rolul persistenței de şoc

În figura 3 se subliniază rolul persistenței şocului prin pictarea odată cu calibrarea de bază (linia roşie întreruptă; important, elasticitatea muncii este 2), cazul şocului de persistență zero (linia albastră neîntreruptă). Întrucât produsul muncii la limită creşte, gospodăriile casnice iarăşi percep că optimal e de a lucra mai multe ore astăzi: salariul real este foarte mare astăzi în comparație cu toate perioadele ce vor urma (gospodăriile casnice cunosc că acest şoc este temporar). Această creştere în orele lucrate sporeşte efectul direct de creştere în productivitate pentru a obține şi mai mare creştere în output. Iar sporul în output ei posibil de alocat pentru consum şi investiții. Deoarece rata dobînzii este mare azi în comparație cu toate perioadele ce vor urma, este optimal să se economisească şi să se investească mai mult din creşterea outputului (păstrând o parte din cîştig pentru consumul viitor), consumînd o mică parte azi. Investițiile cresc în cantități mari în urma impactului– aproximativ cu patru ori în raport cu creşterea outputului. Începând cu a doua perioadă înainte nu se înregistrează creştere în productivitate. Gospodăriile casnice atestă stocuri de capital mai mari (consecințele investițiilor precedente), care l-or consuma optimal, prin urmare, nu vor investi; ceea ce e optimal întrucât rata dobînzii la momentul actual este mai joasă ăn raport cu perioadele următoare. Atât consumul, cât si timpul liber sunt bunuri normale, şi gospodăriile casnice doresc să primească plăcere de la ambele (cantitățile lor relative fiind dictate de elasticitatea ofertei de muncă): deaceea, orele lucrate la fel diminuează sub nivelul în starea de stabilitate.

Această dinamică de tranziție confirmă punctul de vedere de prima dată exprimat de Coglez şi Nason (1995): în cadrul modelului RBC lipsseşte un mecanism puternic de propagare internă, ori particularitățile endogene deasemenea foarte puțin persistă. Perioadele de output înalt nu sunt sistematic urmate de perioade cu output la fel de înalt ca răspuns la şocurile complet tranzitorii. Ceea ce conduce că majoritatea cercetărilor se axează asupra modelelor în care persistența rezultă din procesele exogene (cum ar fi reacțiile, marcate cu linii roşii întrerupte); alte cercetări se concentrează asupra intensificării mecanismului de propagare.

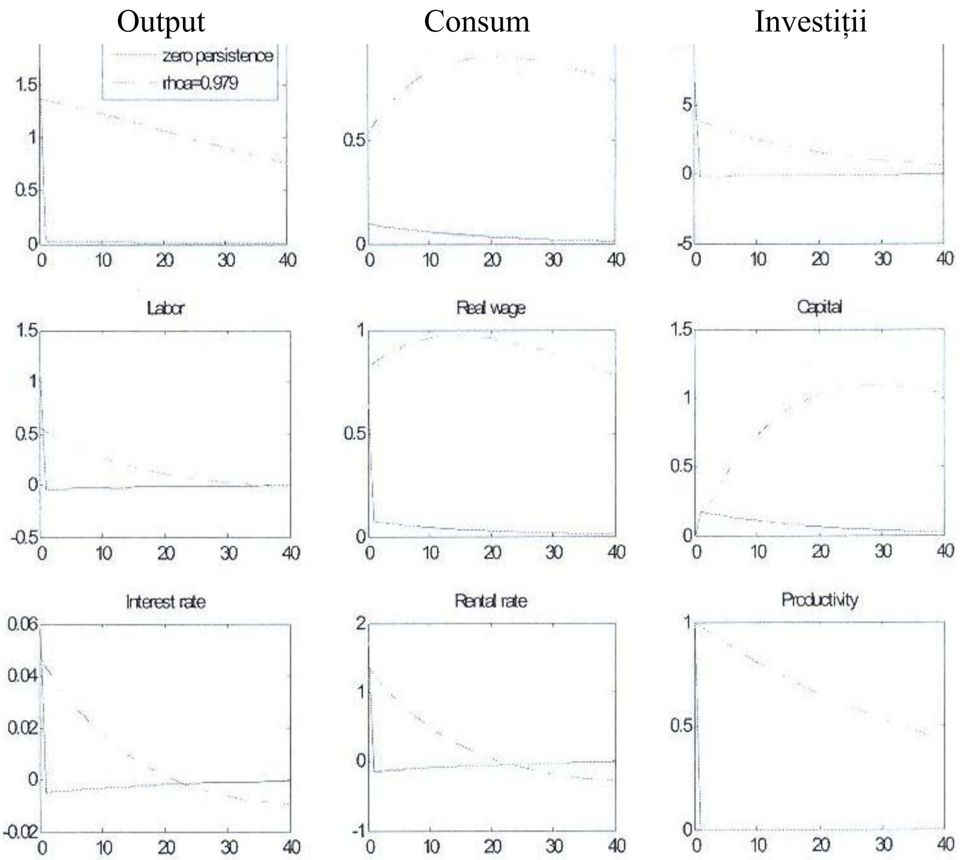


Figura 3. Răspunsul la şocul tehnologiv unic, rolul persistenței de şoc.

Şi în final, este greşit să se considere că schimbările în tehnologie sunt permanente, şi anume, că există elementul original în procesele tehnologice. Să comparăm acesata cu cazul cadru din figura 4. Există două diferențe principale. Prima, (una mai simplă) este că modificările permanente în tehnologie (vizavi de acelea temporale, deşi foarte persistente) au efect permanent asupra outputului, consumului, investițiilor, salariul real şi capital (nu asupra orelor lucrate!!!). Acest efect poate fi calculat analitic prin derivarea variabilelor în starea de stabilitate în raport cu A , precum a fost efectuat în compartimentul 2.5.

Doi, există diferențe importante cu privire la dinamicile de tranziție. Dacă tehnologia se află în permanenta creştere, atunci există *efectul de bunăstare* care lipseşte în caz contrar – gospodăriile casnice recunosc că vor fi în permanență mai bogate. Acest efect se combină cu efectul salarial: ca şi anterior gospodăriile casnice înțeleg că salariile, în ciuda creşterii, sunt mai joase decât în *toate* perioadele ce vor urma. Deaceea, supuse impactului, ele vor alege de a avea mai mult timp liber şi de a activa mai puțin decât în cazul unui „şoc persistent însă temporar”. Acelaşi efect conduce ca gospodăriile casnice să exprime dorința de a consuma mai mult, prin urmare, de a investi mai puțin. Aceste alternative se potrivesc cu evoluția ratei dobînzii, care descreşte monoton în timp după o reacție inițială pozitivă. Mai mult decât atât, întrucât diminuarea ratei dobînzii nu va depăşi valoarea sa în starea de stabilitate, consumul va creşte monoton în direcția valorii noi în starea de stabilitate (ea nu va fi „suprațintită”). Investițiile vor ținti cu siguranță mai departe decât valoarea în noua stare de stabilitate, deoarece produsul de capital la limită este mare în prima perioadă.

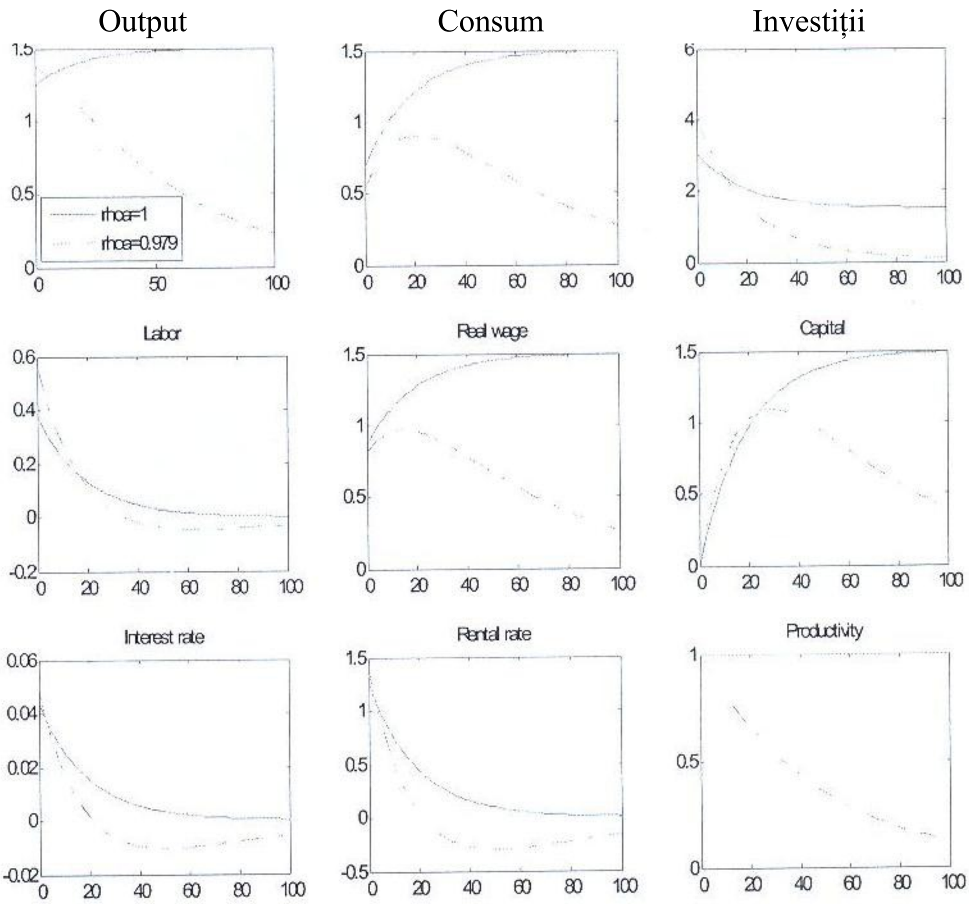


Figura 4. Răspunsul la şocul tehnologiv unic, rolul persistenței de şoc.

2.13. Momentele de ordinul doi

Calcularea momentelor de ordinul doi poate vi realizată cu ajutorul simulărilor Monte Carlo (ce e destul de anevoios) sau analitic. Să folosim (2.33) pentru a calcula matricea covariațiilor pentru $x_t, \sum_{xx} = E(x_t, x_t')$, puținul ce se cunoaşte despre matricea de covariații a şocurilor este $\sum_{ee} = E(e_t, e_t')$ (în cazul unui şoc simplu ea este varianța şocului în raport cu tehnologia).

Mai mult decât atât, se va considera numai reprezentarea staționară a economiei încât $\sum_{xx} = E(x_{t+j}, x_{t+j}')$ pentru orice j. Deci, avem

$$\sum_{xx} = M_x \sum_{xx} M_x' + M_x E(x_{t-1} e_t') M_e' + M_e E(e_t x_{t-1}') M_x' + M_e \sum_{ee} M_e'.$$

Să amintim că e_t sunt inovațiile, deci ele sunt ortogonale cu x_t, atunci termenul din mijloc este egal cu zero astfel expresia se reduce la: $\sum_{xx} = M_x \sum_{xx} M'_x + M_e \sum_{ee} M'_e$. Acesta este o ecuație matriceală care are următoarea soluție: $vec\left(\sum_{xx}\right) = (I - M_x \otimes M'_x) M_e \otimes M'_e vec\left(\sum_{ee}\right)$, aici pentru orice matrice $\sum_{s \times s}$, $vec\left(\sum\right)$ indică vectorul coloană obținut prin aranjarea vectorilor coloane ale ei unul după altul $\left(\sum_{\cdot 1} \vdots \sum_{\cdot 2} \vdots \cdots \sum_{\cdot i} \cdots \vdots \sum_{\cdot s}\right)'$, unde I este o matrice identitară de dimensiunea $s \times s$ şi $\otimes$ este produsul Kronecker.

Autocovarianțele $E\left(x_i x'_{t-j}\right)$ (întîetate/reținere) se calculează similar:

$$E\left(x_i x'_{t-j}\right) = M_x^j \sum_{xx} + M_e M_x^j \sum_{ee} M'_e .$$

Aceste formule pot fi uşor programate şi se folosesc pentru a obține cifrele care se vor regăsi în Tabele: devierea standard şi coeficienttii de autocorelare outputului, consumului, orelor lucrate, investițiilor, coeficienții de corelație al fiecărui agregat cu outputul (concomitente, de întîetete sau de reținere), şi aşa mai departe.

Tabelul 2: Momentele pentru modelul de Bază RBC

Variabile x V	σ_x	σ_x / σ_y	$E[x_t x_{t-1}]$	$corr(x, y)$
y	*1.39*	*1.00*	*0.72*	*1.00*
c	*0.61*	*0.44*	*0.79*	*0.94*
i	*4.09*	*2.95*	*0.71*	*0.99*
l	*0.67*	*0.48*	*0.71*	*0.97*
Y/L	*0.75*	*0.54*	*0.76*	*0.98*
w	*0.75*	*0.54*	*0.76*	*0.98*
r	*0.05*	*0.04*	*0.71*	*0.95*
A	*0.04*	*0.68*	*0.72*	*1.00*

Sursa: King ți Rebello, 1999

De a face cunoştință cu King and Rebello, compartimentul 4.3

Momentele de interes vor fi separate în două categorii:

1. **volatile**

- Primul test pentru model este „raportul variantelor" de Kydland-Prescott

$$\frac{\text{var}^{model}(y)}{\text{var}^{data}(y)} = \left(\frac{1.39}{1.81}\right)^2 = 0.77 .$$

- Investițiile sunt aproape de trei ori mai volatile decât outputul.
- Consumul este mai neted decât outputul atât conform datelor observate, cât şi calculate după model.
- Volatilitatea muncii în raport cu outputul este prea mică în comparație cu datele observate (în ceea mai mare măsură din cauza că capitalul nu este suficient de volatil).

2. **persistența şi corelarea**

Modelul generează persistențe, însă: (i) această persistență este mai mică decât în datele observate şi (ii) întrucât procesele exogene sunt foarte persistente (problema la care se va revini ulterior), este clar că particularitățile modelului reprezintă *un mecanism intern de propagare foarte slab.* Modelul generează *persistență endogenă slabă* (chestiunea de prima dată menționată de Coglez şi Nason (1995, AER)).

În acelaşi timp modelul generează *co-mişcare* suficientă a agregatelor macroeconomice în raport cu outputul (precum e adjudecat de corelațiile concomitente), parțial coerente cu datele observate. În orice caz, există careva discrepanțe: corelarea prezisă de model pentru investiții, muncă, capital şi productivitate este mai mare decât aceea regăsită în datele observate. Pe lîngă aceasta, modelul generează salariu real de o prociclitate înaltă (pe când în datele observate salariile sunt în linii mari aciclice) şi rata dobînzii de o prociclitate înaltă (pe când în datele observate ratele dobînzii sunt contraciclice).

2.14 Ce am avut de învățat?

Multe. S-a reuşit construirea modelului care se bazează pe maximizare şi aşteptări raționale ale tuturor agenților pentru analiza fluctuațiilor în seriile macroeconomice de timp. S-a cunoscut cum de soluționat acest model pas cu pas, cum se să înțelegă transmisia şocului tehnologic şi cum să se evalueze performanțele modelului prin comparația previziunilor cu datele observate. Ve-ți fi îngroziți de insistența asupra şocurilor „tehnologice”, fiind principala sursă de fluctuații (întradevăr, multă lume va spune că sunteți). Însă, importanța acestui cadru se extinde nu se concentrează numai pe tehnologie, cum a fost accentuat în introducere.

CITIȚI King and Rebelo – compartimentul 4.5

2.14.1 Parametrii critici

1. Şoc tehnologic extrem de persistent şi volatil. Să atragem atenția că $E(a_t, a_{t-1}) = \frac{\rho^j}{1-\rho^2}\operatorname{var}(\varepsilon)$.

   Deci, varianța productivității este $\frac{\operatorname{var}(\varepsilon)}{1-\rho^2}$, care manifestă creştere atât în $\operatorname{var}(\varepsilon)$ cât şi în ρ. Pe lîngă aceasta, creşterea varianței de productivitate şi creşterea de ρ conduce la creşterea persistenței de productivitate şi, prin urmare, a productivității totale.

Rolul crucial al persistenței de productivitate poate fi mai bine perceput prin executarea experimentelor ce vor urma.

2. Munca suficient de elastică (fie intertemporară, fie intratemporară – Greenwood, Hercowitz şi Hufman) – **compartimentul 6.1 din KR.** Aceasta implică ca efortul de muncă să fie foarte receptiv la schimbările în salariul real. Ceea ce generează atât deplasări în orele lucrate, cât şi deplasări mici în salariul real. Asumarea unei oferte de muncă extrem de elastică nu este consistentă cu evidența la nivelul micro; în orice caz, pot fi construite modelele care să împace elasticitatea joasă la nivel micro cu elasticitate înaltă la nivel macro. Un exemplu remarcabil este „modelul cu muncă indivizibilă” Hansen şi Rogerson – de a face cunoştință **KR, compartimentul 6.1** (şi referințele din el) în cazul în care se doreşte de a cunoaşte mai mult.
3. Cotele consumului C şi investițiilor I în Y (I/Y sunt mici, în timp ce volatilitatea lui I converge spre volatilitatea lui Y).

2.14.2 **Rezidurile lui Solow**

Reprezintă oare rezidurile Solow o măsurare corectă a şocurilor tehnologice? Există trei cauze principale de ce răspunsul e posibil a fi „nu”:

1. Rezidurile Solow pot fi prognozate, folosind variabile care cu mare probabilitate pot fi ortogonale cu productivitatea: cheltuieli pentru apărare, agregate monetare, etc.
2. Rezidurile Solow conduc la o probabilitate înaltă a regresului tehnologic (circa 0.4 – Burnside, Eichenbaum şi Rebello, 1996).
3. Utilizarea factorilor variabili (folosirea capitalului şi acumulărilor de muncă) contaminează rezidurile Solow. La mod general, în cazul în care există variații neobservabile la utilizarea factorilior de producere, rezidurile Solow ironat le atribuie acestea „tehnologiei” întrucât ele sunt măsurate, folosind variațiile observate în factorii de producere. Ceea ce poate fi interperetat ca „abateri endogene”.

Există două căi posibile de a corecta utilizarea variabilelor, şi anume de a apela la punctului 3 de mai sus şi de a proceda în aşa mod ca el să influențeze punctele 1 şi 2. În primul rând, pentru variațiile neobservabile pot fi utilizate variabile proxy în vederea recalculării rezidurilor Solow. Drept exemplu de atare variabile proxy pot servu: (i) numărul accidentelor de muncă ca variabilă proxy pentru un efort de muncă neobservat (deoarece munca grea sporeşte probabilitatea accidentelor, cel puțin, în industrie); (ii) folosirea electricității în calitate de variabilă proxy pentru variația neobservată în utilizarea de capital. A doua posibilitate constă în construirea modelului care să încorporeze factorul variațiilor neobservate în calitate de variabilă endogenă, exprimînd-ul ca funcție de variabile endogene observabile, apoi calcularea seriilor de productivitate implicate în model (drept exemplu a se vedea compartimentul ce urmează).

Măsurarea corectă a rezidurilor Solow care ține cont de utilizarea variabilelor (a se vedea Burnside, Eichenbaum şi Rebello, 1996) implică:

1. Şocurile de productivitate sunt mai puțin volatile;
2. Probabilitatea regresului tehnologic scade dramatic.

Aceste constatări sugerează necesitatea unui mecanism mai peternic de amplificare decât acel din modelul RBC pentru a explica fluctuațiile observate. Din fericire, tocmai aceiaşi cauză care deplasează măsurările rezidurilor Solow, furnizează în acelaşi timp extra amplificări. Modelul RBC cu incorporarea de utilizări variabile implică că şocurile mici în productivitate produc unele efecte agregate mari.

2.14.3 Intensificarea mecanismului de propagare/amplificare

În cursul ținut de profesorul Muellbauer, sunt prezentate două specificări de alternativă pentru preferințe şi tehnologie respectiv. În prima, funcția de utilitate nu este separabilă în timp ce datorează *obiceilor*: utilitatea depinde de consumul din ultima perioadă. În a doua, investițiile sunt supuse *costurilor de ajustare*. Odată cunoscând acest material, apare dorința de a incorpora aceste particularități în modelul RBC de bază. Fiind incorporate în modelul examinat, ambele particularități produc o sursă suplementară de generare a persistențelor endogene.

În cele din urmă, la nivel intuitiv se va discuta introducerea variabilei de utilizare a capitalului, sugerată anterior. În prezența variabilei de utilizare funcția de producere devine:

$$Y_t = F(Z_t K_t, L_t) = A_t (Z_t K_t)^{\alpha} L_t^{1-\alpha},$$

Z_t fiind rata de utilizare. Folosirea intensivă s stocului de capital afectează rata de depreciere a capitalului, şi ecuația de acumulare a capitalului devine:

$$K_{t+1} = (1 - \delta(Z_t))K_t + L_t, \tag{2.43}$$

unde $\delta(Z_t)$ îndestulează condițiile $\delta(Z_t) > 0, \delta_{ZZ}(Z_t) > 0$: rata de depreciere creştere dacă capitalul este folosit mai intensiv, aceeaşi se referă şi la rata de creştere a capitalului. S-a introdus o variabilă adițională, Z_t, deci este necesară o ecuație suplimentară care ar guverna alegerea ratei de utilizare în scopul de a determina echilibru. Un beneficiu suplimentar, în funcție de creşterea ratei de utilizare, se obține din outputul suplimentar creat, $F_Z(.,.) = \alpha A_t Z_t^{\alpha-1} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} = \delta_Z(Z_t)K_t \to \alpha \frac{Y_t}{Z_t} = \delta_Z(Z_t)K_t$.

Să logaritmăm funcția de producere şi condițiile de eficiență. Funcția de producere devine:

$$y_t = a_t + \alpha k_t + \alpha z_t + (1-\alpha)l_t \tag{2.44}$$

Condițiile de eficiență devin (se va folosi „trucul trei" pentru liniariazarea logaritmică $\delta_Z(Z_t)$, exact aşa cum s-a procedat în cazul de dizutilitate la limită a muncii $v_L(L_t)$:

$$y_t - z_t = k_t + \frac{\delta_{ZZ}(Z)Z}{\delta_Z(Z)} z_t \to y_t = k_t + (1-\xi)z_t, \tag{2.45}$$

aici ξ denotă elasticitatea ratei de depreciere la limită, determinată de folosirea adițională a ratei de utilizare, $\xi \equiv \delta_{ZZ}(Z)Z / \delta_Z(Z)$. Dacă elasticitatea dată tinde spre ∞, rvenim la modelul standard ((2.45) care implică $z_t = 0$): observăm că $\xi \to \infty$ dacă $\delta_Z(Z) \to 0$ care, la rîndul său, implică că rata de depreciere să nu fie afectată de utilizare.

Înlocuind condițiile de eficiență (2.45) în expresia pentru funcția de producere (2.44), eliminând z_t, obținem „forma redusă" a funcției de producere:

$$y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{1+\xi-\alpha}\right)a_t + \frac{\alpha\xi}{1+\xi-\alpha}k_t + \left(1 - \frac{\alpha\xi}{1+\xi-\alpha}\right)l_t \tag{2.46}$$

Pornind de la expresia obținută, pot fi menționate două lucruri comparabile cu modelul cadru. Primul, elasticitatea parțială a outputului în raport cu tehnologie este în creştere - şi, cu cât mai mic va fi ξ, cu atât mai mult ne departăm de la modelul cadru. Ceea ce determină amplificarea şocurilor tehnologice. Doi, elasticitatea parțială a outputului în raport cu forța de muncă este mai mare (deci, elasticitatea parțială a outputului în raport cu capitalul este mai mică) decât în cazul cadru deoarece $\frac{\alpha\xi}{1+\xi-\alpha} < \alpha$. Aceasta întăreşte legătura dintre output şi fluctuațiile în muncă şi, în perspectivă, poate genera o volatilitate mai mare a muncii.

În comun cu aceasta: utilizarea variabilă la fel afectează ciclicitatea salariului. Salariile rămîn determinate de productivitatea la limită a muncii, deci:

$$w_t = y_t - l_t = \left(1 + \frac{\alpha}{1+\xi-\alpha}\right)a_t + \frac{\alpha\xi}{1+\xi-\alpha}k_t - \frac{\alpha\xi}{1+\xi-\alpha}l_t .$$

Deoarece $\frac{\alpha\xi}{1+\xi-\alpha}$ este crescătoare în raport cu ξ, un ξ mai mic implică ca curba „cererii pentru muncă" să fie mai plată, la rândul său implicând: pentru o scimbare în oferta de muncă salariul va reacționa mai puțin iar orele de lucru mai mult decât în modelul cadru. În orice caz, schimbarea în cererea pentru muncă va creşte, cu certitudine, odată cu utilizarea variabilă, deoarece $\frac{\alpha}{1+\xi-\alpha} > 0$. Acesta explică de ce în simulările din Figura 5 reacția salariului real este mai mare, cel puțin, în primele trimestre.

2.14.4 **Rolul utilizării variabile de capital**

Şi pe final, Figura 5 demonstrează efectul de la utilizarea variabilă, supusă parametrizării de cadru. Valoarea parametrului ξ în cazul de utilizare variabilă s-a stabilit de 0.1 (valoarea este împrumutată din King şi Rebello) şi o valoare foarte mare în cazul „de utilizare fixă”. Graficele confirmă discuţiile ce au avut loc anterior şi demonstrează că utilizarea variabilă conduce la amplificarea şocului tehnologic dat. Deaceea şocurile mici sunt suficiente pentru a explica fluctuaţiile observate. Menţionăm, că oferta de muncă a fost stabilită la nivelul de 2 în figura examinată. Amplificarea indusă de utilizarea variabilă este în creştere în raport cu elasticitatea ofertei de muncă – cazul elasticităţii de muncă infinită, se va sfârşi „cu o economie de înaltă substituţie” ca în King şi Rebello.

Output Consum Investiţii

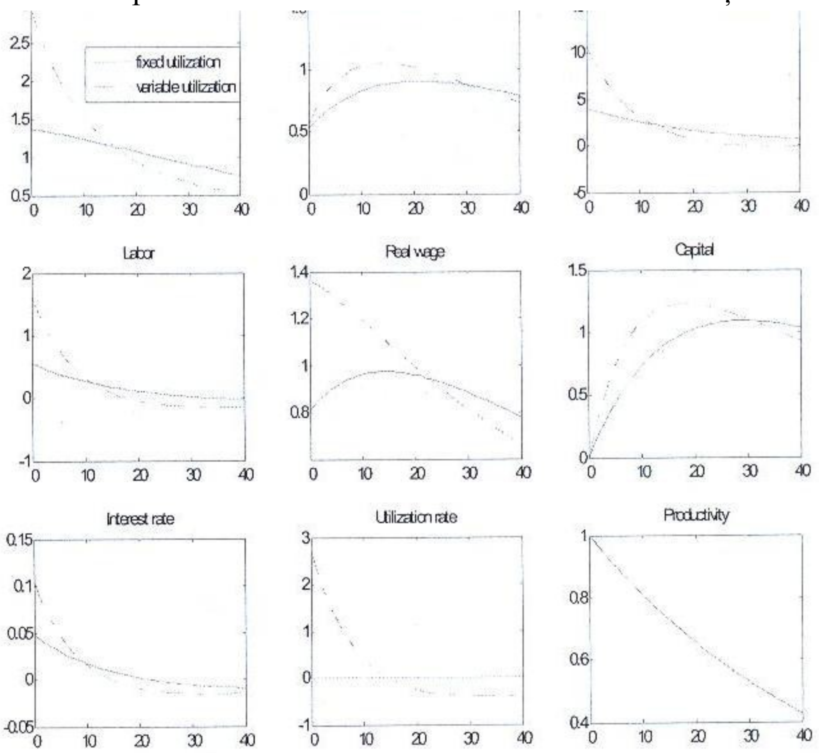


Figura 5. Răspunsul la şocul tehnologic unic, rolul utilizării variabile.

Graficele de mai sus reprezintă o abstracţie de la re-măsurarea rezidurilor Solow, una din cauzele de a considera această extensiune în primul rând. Urmând discuţia privind rezidurile Solow, menţionăm două modalităţi de re-măsurare a productivităţii cu ajutorul modelului. Prima, ar putea fi folosită expresia (2.44) întru a găsi variabila proxy pentru z_t, să zicem $\tilde{z}_t$ (şi anume, folosirea de electricitate) şi de a calcula a_t^* din:

$$a_t^* = y_t - \alpha k_t - \alpha \tilde{z}_t - (1-\alpha) l_t \qquad (2.47)$$

În caz contrar, poate fi folosită structura modelului în a reveni la forma redusă pentru producere (deci eliminând variabila neobservată z_t) şi de a calcula:

$$a_t^{**} = \left(1 - \frac{\alpha}{1+\xi}\right) y_t - \frac{\xi}{1+\xi} \alpha k_t - (1-\alpha) l_t \qquad (2.48)$$

Cum a fost menţionat anterior, după examinarea utilizării variabile, varianţa şocurilor de productivitate calculată, în linii mari, este mult mai joasă, totuşi modelul este în stare să reproducă fluctuaţiile, deoarece aceste extra particularităţi produc amplificări suplimentare, ceea ce s-a demonstrat grafic în Figura 5 şi în discuţia precedentă.

2.14.5 **Unde se va ajunge?**

În timp ce modelul RBC explică unele particularități ale datelor, acesta este destul de rezervat în explicarea altora. Ceea confirmă că cercetările în acest domeniu au avansat pe parcursul ultimilor cîteva decenii, şi continuă să se extindă prin incorporarea competiției imperfecte, prețurilor imperfecte sau ajustărilor de salarii, de costuri, de investiții, de munca sau examinarea piețelor financiare imperfecte etc . În orice caz, achizițiile care vor urma (mai mult din) se referă la faptul că literatura macroeconomică foloseşte acest cadru ca un punct de pornire în scopul examinării a unei varietăți incredibile de probleme. Un simplu exemplu, deloc deranjant, analiza politicilor monetare moderne foloseşte modelul RBC de bază ca un cadru general, ca apoi să introducă ajustarea de prețuri cu scopul examinării efectelor în urma discrepanțelor nominale şi politicii monetare optimale. A se vedea Woodford (2003) în cazul în care sunteți interesați de problemele enunțate. Articolele recente privind efectele discrepanțelor nominale şi modului de calculare ale lor a se vedea în Cristiano, Eichenbaum şi Evans 82005).

2.14.6 Şocurile cheltuielilor Guvernamentale

Pornind de la dificultățile de calcul legate de unele particularități de date aparente în şocurile tehnologice, unii autori eventual se îndreaptă spre examinarea altor şocuri, de exemplu şocurile de cheltuieli guvernamentale. Christiano şi Eichenbaum (AER, 1992) au demonstrat că introducerea acestei surse de fluctuații stocastice ajută la soluționarea unei enigme importante, şi anume, discrepanței dintre prociclitatea înaltă a salariului real, sugerată de modelul RBC de bază, şi aciclitatea relativă observată în date.

În orice caz, şocurile cheltuielilor guvernamentale au alte proprietăți ne dorite: ele, de regulă, duc la consum contraciclic, complet contradictorie cu datele observate. Consumul diminuează în reacție la şocurile de cheltuieli guvernamentale în funcție de **efectul negativ de bunăstare**: cheltuielile guvernamentale absorbă resursele şi face ca agenții să se simtă săraci prin prezența valorii discontate ai impozitelor care sunt folosite pentru a finanța cheltuielile. Aceasta îi face pe agenți să consume mai puțin şi să muncească mai mult pentru un salariu real dat; efectul ce va urma, contribuind la creşterea outputului. Deaceea, consumul, condiționat de şocurile cheltuielilor guvernamentale, va fi contraciclic – în contrazicere puternică cu ceea ce se observă în date.

Dacă se doreşte de a afla mai mult referitor la aceste probleme, se recomandă de a face cunoştință cu Baxter şi King (AER, 1993) şi Christiano şi Eichenbaum (AER, 1992). Unele elaborări curente asupra acestor probleme pot fi găsite în Gali, Lopey-Salido şi Valles (2005) şi în unele referințe din ele. (Citiți aceste articole recente după ce ve-ți parcurge prțurile fixe şi problemele de politică monetară).

2.15. Unica cea mai încurcată previziune a modelului fără conflicte: Enigma Premiului la Acțiuni (Înapoi la Evaluarea Activelor).

Se doreşte de a finisa acest curs de lecții cu un exemplu al unei enigme, cunoscute de circa 20 de ani, care pină la momentul actual nu este soluționată într-un mod satisfăcător. Acesta este un exemplu de „veşti bune„ pentru persoanele care doresc să facă Macro/Finanțe – un domeniu, în care este încă mult de lucru. Acestă enigmă este „Enigma Premiului pe Acțiuni" (contribuția originală datorează savanților Mehra şi Prescott, 1985).

În mod empiric calculată, rata medie a beneficiului pe acțiuni, adjudecată prin beneficiul la S&P500, din economia SUA în ultimii50 de ani, a fost de circa 8.1% rata anuală. Rata fără de risc, adjudecată ca beneficiu la Cambii de trezorerie, este mult mai joasă, de circa 0.9%. Deaceea Premiul pe acțiuni este de circa 7.2%! Mărimea premiului variază în dependență de perioada considerată, definiția de beneficiu, etc., însă ideea principală este de fiecare dată următoare: stocurile oferă un beneficiu mult mai mare decât obligațiunile. Cum vine aceasta? Este posibilă o concordare ăn acest sens prin intermediul modelului examinat?

Să ne amintim ecuația pentru stocul de acțiuni şi obligații de risc respectiv (în cazul dat se va opera cu cotele părți iar beneficiul se va nota prin $1+R_{t+1}^{S}\equiv\frac{P_{t+1}+D_{t+1}}{P_t}$, dar să nu uităm că acelaşi procedeu poate fi aplicat şi asupra capitalului fizic):

$$1=E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\left(1+R_{t+1}^{S}\right)\right]$$

$$1=\left(1+R_{t+1}\right)E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\right]$$

Cu indicele $t+1$ a fost notat beneficiul de la obligațiuni, deşi el este cunoscut la momentul de timp t, pentru a sublinia că el va fi achitat la momentul de timp $t+1$. Pentru a percepe ideea de bază, presupunem că beneficiile şi factorul stocastic de discont sunt normali în logaritmi şi homoschedactici, exact în acelaşi mod în care s-a procedat la liniarizarea logaritmică a ecuației Euler în modelul RBC. Cunoaştem că pentru variabilele lognormale:

$$\ln E_t X_{t+1}=E_t\ln X_{t+1}+\frac{1}{2}\mathrm{var}_t\ln X_{t+1}\ .$$

În cazul în care X este homoschedastic, momentele de ordinul doi condiționate sunt egale cu momentele de ordinul doi necondiționate, deci indicele de timp poate fi omis la momentele de ordinul doi:

$$\ln E_t X_{t+1}=E_t\ln X_{t+1}+\frac{1}{2}\mathrm{var}\ln X_{t+1}\,.$$

Logaritmînd ecuația pentru prețuri în cote părți, obținem (ca şi anterior, se va folosi egalitatea $\ln(1+a)=a$):

$$0=\ln E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\left(1+R_{t+1}^{S}\right)\right]=E_t\lambda_{t,t+1}+E_tR_{t+1}^{S}+\frac{1}{2}\sigma_{\lambda}^2+\frac{1}{2}\sigma_S^2+\sigma_{\lambda S}$$

(2.49)

aici $\lambda_{t,t+1}=\ln\Lambda_{t,t+1}$, $\sigma_x^2=\mathrm{var}\left[\ln X_{t+1}-E_t\ln X_{t+1}\right]$, şi anume, variația inovațiilor în raport cu variabila $X=R_{t+1}^{S}$, $\Lambda_{t,t+1}$ şi $\sigma_{\lambda S}$ este similară cu covariația necondiționată dintre inovații în raport cu beneficiu şi factorul stocastic de discont.

Să procedăm la fel şi cu acțiunile ne supuse riscului – acțiunile beneficiul cărora este cunoscut cu certitudine şi nu este corelat cu factorul stocastic de discont:

$$0=\ln(1+R_{t+1})E_t\left[\Lambda_{t,t+1}\right]=E_t\lambda_{t,t+1}+R_{t+1}+\frac{1}{2}\sigma_{\lambda}^2 \qquad (2.50)$$

Vom extrage (2.50) din (2.49) pentru a obține:

$$\mathrm{Pr}\,emiul\ pentru\ actiuni=E_tR_{t+1}^{S}-R_{t+1}+\frac{1}{2}\sigma_S^2=-\sigma_{\lambda S} \qquad (2.51)$$

Această ecuație deja explică premiul pentru acțiuni. Termenul din stânga este premiul pe acțiuni, corectat la măsura riscului pentru stocuri, $\frac{1}{2}\sigma_S^2$ care, pur şi simplu, vine din inegalitatea Jensen (nu vă creați o impresie greşită în acest sens; termenul dat va dispărea în cazul, în care premiul se va înscrie, folosind aşteptările în logaritmi de la cotele beneficiului brut, încât partea stîngă al expresiei devine $E_t\ln\left(1+R_{t+1}^{S}\right)-\ln\left(1+R_{t+1}\right)$).

Partea dreaptă a expresiei afirmă că în acest model premiul pentru acțiuni este dat de covariația (negativă) factorului stocastic de discont şi beneficiul, exprimat în cote. Consumatorii revendică premiul mare în scopul de a menține aceste acțiuni atunci, când beneficiul de la acțiuni covariază negativ în raport cu factorul stocastic de discont pentru un simplu motiv: acțiunile tind spre un beneficiu scăzut şi, prin urmare, cu siguranță diminuează bunăstarea atunci, când consumatorii au nevoie de ea cel mai mult (când utilitatea la limită a consumului este inferioară acelei din viitor, şi anume, când factorul stocastic de discont este mare: ne amintim că $\Lambda_{t,t+1} = \beta \frac{U_C(C_{t+1})}{U_C(C_t)}$ este mare atunci când utilitatea la limită a consumului de azi este mai mică în comparație cu acea viitoare).

O formă funcțională simplă pentru funcția de utilitate reprezintă aceasta într-un mod mai transparent. Vom considera o funcție de utilitate de tip CRRA (şi fie că oferta de muncă este neelastică): $U(C) = (C^{1-\gamma} - 1)(1-\gamma)$, unde γ parametrizează atât coeficientul de relativă aversiune de risc cât şi (invers la) elasticitatea de substituție intertemporală. (Când $\gamma \rightarrow 1$ ne întoarcem la cazul $\ln C$). În acest caz factorul de stocastic discont este $\Lambda_{t,t+1} = \beta\left({C_{t+1}}/{C_t} \right)^{-\gamma}$, deci (prin litere mici se vor nota expresiile în logaritmi): $\lambda_{t,t+1} = \ln\beta - \gamma\Delta c_{t+1}$.

Premiul pentru acțiuni devine:

$$\Pr emiul\ pentru\ actiuni = E_t R_{t+1}^S - R_{t+1} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 = \lambda\sigma_{CS} \tag{2.52}$$

Şi anume, produsul dintre coeficientul aversiunii relative de risc şi covariația dintre inovare în raport cu consumul şi beneficiul de la acțiuni. Intuitiv, un premiu pentru acțiuni mai mare este solicitat atunci, când (pentru aversiunea de risc cunoscută) există o covariație înaltă dintre beneficiu şi consum, deoarece în acest caz acțiunile furnizează beneficii pentru un consum mic (când utilitatea la limită a consumului este înaltă).

Ecuația obținută poate fi privită sub două aspecte. În primul rând, premiul pentru acțiuni ca atare prezintă un subiect interesant pentru examinare. S-a construit un model de echilibru general în care beneficiul şi consumul se determină endogen şi este calculată covariația „artificială" dintre consum şi beneficiu, parametrizată aversiunea riscului în încercarea de a înțelege care trebuie să fie aversiunea de risc ca premiul acțiunilor observat să fie în jurul de 6.9%. Doi, poate fi folosită informația observată, şi anume, datele privind covariația dintre consum şi beneficiu pntre a găsi coeficientul aversiunii de risk implicat, după ce se va constata că numerele obținute sunt „rezonabile".

Majoritatea cercetărilor, independent de abordarea utilizată şi tipul de date elaborate, constată că aversiunea de risc de ordinul **30** este necesară pentru a explica premiul acțiunilor. Aceasta e mare, mult mai mare decât orice estimare empirică verosimilă; în acelaşi rând acest rezultat are implicații extrem de nerealistice pentru comportamentul indivizilor. În realitate, macro şi microeconomiştii îşi închipuie acest număr dat fiind nu mai mare decât 2 sau 3.

Enigma relatată devine cunoscută ca „enigma ratei lipsite de risc" (Weil 1989). Să cercetăm ecuația pentru beneficiu de la obligațiuni, substituind expresia pentru funcția de utilitate CRRA:

$$R_{t+1} = -\ln\beta + \gamma\Delta E_t c_{t+1} - \frac{\gamma^2}{2}\sigma_C^2 .$$

Să facem abstracție de ultimul termen. Stabilind creşterea pozitivă a consumului observat dată, să zicem la nivel de $\Delta c = \Delta E_t c_{t+1}$, parametrul aversiunii de risc înalte γ poate fi concordat numai cu rata fără de risc joasă, după cum se observă din date, când $\beta \geq 1$. Aceasta implică preferințe negative, ceea ce, cu siguranță, este consideră neverosimil de majoritatea cercetătorilor. Funcția de utilitate CRRA leagă aversiunea de risc cu substituția intertemporală: aversiunea de risc înaltă automat înseamnă dorința joasă pentru substituția intertemporală de consum. Consumatorul care nu are dorință de a substitui intertemporal, când se confruntă cu rata dobînzii joasă şi creşterea pozitivă de consum va prefera să determine consumul prezent, şi anume, să împrumute. Rata dobînzii joasă poate fi numai în echilibru în cazul, în care rata preferinţelor în timp este foarte joasă sau chiar negativă.

Ultimul termen $-\frac{\gamma^2}{2}\sigma_C^2$ este în ajutor, deoarece pentru valori mari ai parametrului γ rata care nu este supusă riscului se dărîmă (termenul de variaţiăe este totdeauna pozitiv). Acest termen apare din motive de precauţie: agenţii doresc să economisească pentru a se proteja de incertitudinea privind variabilitatea consumului viitor. Aceştea decid să economisească lucrând contraposibilităţii de a împrumuta.

În viitor se vor cerceta diferite încercări pentru a se ocupa de enigmele, bazate pe ne separabilittatea funcţiei de utilitate, pe preferinţele care desprind aversiunile de risc de substituţiile intertemporale, pe agenţii eterogeni, pe pieţele de acţiuni limitate, etc.

Bibliografie

1. Baxter, M., and R. G. King (1993): "Fiscal Policy in General Equilibrium," American Economic Review 83: 315-334.
2. Bilbiie, F. O., F. Ghironi, and M. J. Melitz (2006): "Endogenous Entry, Product Variety and Business Cycles," manuscript, Oxford University, Boston College, and Harvard University.
3. Blanchard, O. J. and C. M. Kahn, (1980), "The solution of linear difference models under rational expectations," Econometrica, 48, 5, 1305-12
4. Campbell, J. Y., (1994): "Inspecting the Mechanism: An Analytical Approach to the Stochastic Growth Model," Journal of Monetary Economics 33: 463-506.
5. Christiano, L., and M. Eichenbaum (1992): "Current Real-Business-Cycle Theories and Aggregate Labor-Market Fluctuations," American Economic Review 82: 430-450
6. Christiano, L., M. Eichenbaum and Evans (2005): ”Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy“, Journal of Political Economy, vol. 113, no. 1, 1-46
7. Cochrane, J, 2004, 'Money as Stock', Forthcoming in Journal of Monetary Economics
8. Cogley, T., and J. M. Nason (1995): "Output Dynamics in Real-Business-Cycle Models," American Economic Review 85: 492-511.
9. *Cooley, T. F. and E. Prescott, 'Economic growth and business cycles', Chapter 2 in Cooley, T.F. (Ed.), 1995. Frontiers of Business Cycle Research. Princeton Univ. Press, Princeton.
10. Farmer, R. (1999) 'The macroeconomics of self-fulfilling prophecies', MIT Press, Cambridge, MA.
11. Galí, J., J. D. López-Salido, and J. Vallés (2002): "Understanding the Effects of Government Spending on Consumption," mimeo, CREI. 5354 BIBLIOGRAPHY
12. *King, R. and Rebelo, S. (2000) 'Resuscitating Real Business Cycles', in Taylor J. and M. Woodford, eds, Handbook of Macroeconomics, North-Holland
13. Kydland, F.E., Prescott, E.C., (1982). Time to build and aggregate fluctuations. Econometrica 50, 1345—1370.
14. Ljungquist, L. and T. Sargent (2004), Recursive Macroeconomic Theory, 2nd Edition, MIT Press, Cambridge, MA.
15. Lubik, T. and Schorfheide F. (2003) "Computing Sunspot Equilibria in Linear Rational Expectations Models" Journal of Economic Dynamics and Control, 28(2), pp. 273-285.
16. Lucas, Jr. R. E., (2005) , 'Present at the creation: Reflections on the 2004 Nobel Prize to Finn Kydland and Edward Prescott', Review of Economic Dynamics 8 (2005) 777—779
17. Lucas, Jr. R. E., (1981) , Studies in Business-Cycle Theory, MIT Press, Cambridge, MA.
18. Lucas, Jr. R. E., (1985), Models of Business Cycles, Yrjö Jahnsson Lectures, Basil Blackwell, Oxford.

19. Prescott, E., (1986) ’Theory ahead of business cycle measurement’, Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review 10.
20. Stokey, N.; R. Lucas with E. Prescott, (1989) ’Recursive Methods for Macroeconomic Dynamics’, Harvard University Press, Cambridge, MA.
21. Woodford, M., (2003), Interest and prices: foundations of a theory of monetary policy, Princeton University Press, Princeton, NJ.

ANEXA A.

PRODUSE-PROGRAM MATLAB

A.1 CODUL MATLAB PENTU MODELUL DE BAZĂ, MUNCĂ- ELASTICĂ

Codul de program ce va urma prestează soluția modelului RBC de bază şi imagini grafice privind răspunsul la impulsuri. Un ciclu pentru parametrii examinați inclus permite obținerea pe un singur desen a mai multor grafice pentru diferite configurații de parameter. Este necesar să aveți modulul solvek.m, care déjà a fost prezentat de Dr. Meeks (clasa de calculatoare). În realitate codul prezentat utilizează aceiaşi metodă de soluționare. La fel, este necesar să fie modulul dimpulse.m, care déjà este în Toolbox. Asigurați-vă că ele sînt în acelaşi director ca şi codul pentru model.

Notă: *mu* în the codul de program este elasticitatea ofertei de muncă, deci $\phi-1$.

```
clear all;
%Numărul Variabilelor nx este numărul variabilelor în întregul sistem, nz este numărul variabilelor ne-
predeterminate
nx = 11; nz = 2; nu = nz;
%/**************************************************/
% @ Parameterii modelului;@
%/**************************************************/
% Parametrii esențiali
loop=1; %ciclul peste parametri; aici ciclul peste L elasticitate şi A persistență
for loop =1:2
if loop==1
mu=0; % elasticitatea muncii
phia=1;
else
mu=0; % elasticitatea muncii
phia=0.979;
end
r=0.01;
delta=0.025;
alfa=1/3;
% RATELE ÎN STAREA DE STABILITATE
si=(alfa*delta)/(r+delta);
sc=1-si;
% Condițiile de Echilibru
A = zeros(nx,nx); B = zeros(nx,nx); C = zeros(nx,nu);
phi = zeros(nu,nu); % procesele exogene de şoc
cpos = 1; %c(t)
hpos = 2; %l(t)
ypos = 3; %y(t)
ipos = 4; %i(t)
rpos = 5; %r(t)
rkpos = 6; %rk(t)
wpos = 7; %w(t)
ec1pos=8;
er1pos=9;
ek1pos=10;
```

```
% Variabile Predeterminate
nk =1;
kpos = 11; %K(t)
%Shocks
apos = 1;
gpos = 2;
%Definiția de variabile
%Ecuația 1:  ecuația Euler
B(1,cpos) = -1;
%A(1,cpos) = 1;
%A(1,rpos) = -1;
B(1,ec1pos) =1;
B(1,er1pos)=-1;
%@ Ecuația 2: optimalitatea intratemporală @
B(2,hpos)=1;
B(2,wpos) = -mu;
B(2,cpos)= mu;
%@ Ecuația 5: accumularea de  capital @
 A(3,kpos)=1;
 B(3,ipos)=delta;
 B(3,kpos)=(1-delta);
%@ Ecuația 8:  funcția de producere @
B(4,ypos)=1;
C(4,apos)=-1;
B(4,hpos)=-(1-alfa);
B(4,kpos)=-alfa;
%@ definiția ratei reale ai dobînzii @
B(5,rpos)=-1;
B(5,rkpos)=(r+delta)/(1+r);
%@ Ecuația 10:  salariul @
B(6,wpos)=1;
B(6,ypos)=-1;
B(6,hpos)=1;
%@ Rata de rentă @
B(7,rkpos)=1;
B(7,ypos)=-1;
B(7,kpos)=1;
%@ Restricții asupra resurselor (pot fi înlocuite prin HH restricții budgetare) @
B(8,ypos)=1;
B(8,ipos)=-si;
B(8,cpos)=-sc;
%Determinarea E(t)cs(t+1)
A(9,cpos) = 1;
B(9,ec1pos) = 1;
% Determinarea E(t)r(t+1)
A(10,rpos) = 1;
B(10,er1pos) = 1;
% Determinarea E(t)k(t+1)
A(11,kpos) = 1;
B(11,ek1pos) = 1;
phi(apos,apos) = phia; %aici se introduce procesul tehnologic
phi(gpos,gpos) = 0;
[m,n,p,q,z22h,s,t,lambda] = solvek(A,B,C,phi,nk);
bigmn = [m n];
bigpq = [p q];
bigp = phi;
bigpsi = eye(nz,nu);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%% IRF analiza %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Se specifică ires şi ishock, valoarea indicilor pentru
% variabilile de răspuns şi de şoc
% Folosind soluţia modelului în starea de stabilitate se formează
% x(t+1) = Ax(t) + Bu(t+1)
% y(t) = Cx(t) + Du(t)
ishock = 1;
npts = 100; % nu se pictează nici un punct
% Ciclul peste parametrii modelului, atribuie soluţia calculată pentru fiecare din IRF
if loop ==1
A1 = [p q;zeros(nz,nk) phi];
C1 = [m n];
D1 = zeros(nx-nk,nu);
B1 = [zeros(nk,nu);bigpsi];
%[Y,X]=dimpulse(A,B,C,D,ishock,npts+1);
%aceasta nu e funcţională cînd capitalul este definit ca aici
[Y1,X1]=dimpulse(A1,B1,C1,D1,ishock,npts+2);
YP1=Y1(2:npts+2,:);
XP1=X1(2:npts+2,:);
else
A2 = [p q;zeros(nz,nk) phi];
C2 = [m n];
D2 = zeros(nx-nk,nu);
B2 = [zeros(nk,nu);bigpsi];
%[Y,X]=dimpulse(A,B,C,D,ishock,npts+1);
%taceasta nu e funcţională cînd capitalul este definit ca aici    [Y2,X2]=dimpulse(A2,B2,C2,D2,ishock,npts+2);
YP2=Y2(2:npts+2,:);
XP2=X2(2:npts+2,:);
end %finisează daca e veridic statement
%se deplasează mai departe după primul caz:
loop = loop+1;
end %sfîrşit 'pentru' statement
jj=[0:npts];
%i1 = Y(:,ires); % indicele de coloană este un element din y solicitat
subplot(3,3,1)
plot(jj,YP1(:,ypos), jj,YP2(:,ypos),'-.r')
title('Output')
%axa([0 20 -.5 .5])
legend('rhoa=1','rhoa=0.979')
text(0,YP1(1,ypos)+0.7,'FIGURE 4:  Răspunsul la şocul technologic unitar, rolul
persistenţei de şoc')
subplot(3,3,2)
plot(jj,YP1(:,cpos),jj,YP2(:,cpos),'-.r')
title('Consumul')
%axa([0 20 -.25 .25])

subplot(3,3,3)
plot(jj,YP1(:,ipos),jj,YP2(:,ipos),'-.r')
title('Investiţiile')
%axa([0 20 -.5 .5])

subplot(3,3,4)
plot(jj,YP1(:,hpos),jj,YP2(:,hpos),'-.r')
title('Munca')
%axa([0 20 -1.5 1.5])

subplot(3,3,5)
```

```
plot(jj,YP1(:,wpos),jj,YP2(:,wpos),'-.r')
title('Salariul real')
%axa([0 20 -.5 .5])

subplot(3,3,6)
%plot(jj,YP(:,ek1pos))
plot(jj,XP1(:,1),jj,XP2(:,1),'-.r')

title('Capital')
%axis([0 20 -1.5 1.5])
subplot(3,3,7)
plot(jj,YP1(:,rpos),jj,YP2(:,rpos),'-.r')
title('Rata dobînzii')
%axa([0 20 -1.5 1.5])

subplot(3,3,8)
plot(jj,YP1(:,rkpos),jj,YP2(:,rkpos),'-.r')
title('Rata de rentă')
%axa([0 20 -.5 .5])

subplot(3,3,9)
plot(jj,XP1(:,2),jj,XP2(:,2),'-.r')
title('Productivitatea')
%axa([0 20 -1.5 1.5])
```

A.2. CODUL MATLAB PENTRU MODELUL DE UTILIZARE VARIABILĂ

Codul de program ce va urma soluționează şi pictează răspunsul la impulsuri - pentru model ' de utilizare variabilă'.

```
clear all;
%Numărul de of Variabile nx este numărul de variabile în întregul sistem, nz este
numărul de variabile ne-predeterminate
nx = 12; nz = 2; nu = nz;
%/*************************************************/
% @ Parametrii modelului;@
%/*************************************************/
% Parametrii Esențiali
loop=1; %ciclul peste parametrii modelului; aici ciclu peste L elasticitate şi A persistență
for loop =1:2
if loop==1
mu=2; % elasticitatea muncii
phia=0.979;
csi=5000; %aceasta asigură (aproape) consecvența prin elasdelta=0
elasdelta=0;% aceasta asigură că deriv. de la delta wrt z este zero
delta=0.025;
else
mu=2; % elasticitatea muncii
phia=0.979;
csi=0.1;
elasdelta=1+csi; %e veridic pentru delta=Z^(1+csi)/(1+csi)
delta=0.025;
end
r=0.01;

%@ definiția ratei reale ai dobînzii@
B(5,rpos)=-1;
B(5,rkpos)=(r+delta)/(1+r);
```

```
%@ Ecuația 10:  wage @
B(6,wpos)=1;
B(6,ypos)=-1;
B(6,hpos)=1;
%@ Rental rate @
B(7,rkpos)=1;
B(7,ypos)=-1;
B(7,kpos)=1;
%@ Restricțiile asupra resurselor (pot fi înlocuite prin HH restricții budgetare) @
B(8,ypos)=1;
B(8,ipos)=-si;
B(8,cpos)=-sc;
%Determinarea E(t)cs(t+1)
A(9,cpos) = 1;
B(9,ec1pos) = 1;
% Determinarea E(t)r(t+1)
A(10,rpos) = 1;
B(10,er1pos) = 1;
% Determinarea E(t)k(t+1)
A(11,kpos) = 1;
B(11,ek1pos) = 1;
% utilizarea  eficientă
B(12,ypos) = 1;
B(12,kpos) = -1;
B(12,zpos) = -(1+csi);
phi(apos,apos) = phia; % procesul technologic este introdus aici
phi(gpos,gpos) = 0;
[m,n,p,q,z22h,s,t,lambda] = solvek(A,B,C,phi,nk);
bigmn = [m n];
bigpq = [p q];
bigp = phi;
bigpsi = eye(nz,nu);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%% IRF analysis %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Se specifică valorile indicilor ires şi ishock, pentru
% variabilile de  răspuns şi de şoc
% Utilizarea soluției modelului în starea de stabilitate se formează prin
% x(t+1) = Ax(t) + Bu(t+1)
% y(t) = Cx(t) + Du(t)
ishock = 1;
npts = 40; % nu se pictează nici un punct
% Ciclu peste  parametrii modelului, atribuie soluția calculată pentru fiecare caz  din IRF
if loop ==1

A1 = [p q;zeros(nz,nk) phi];
C1 = [m n];
D1 = zeros(nx-nk,nu);
B1 = [zeros(nk,nu);bigpsi];
%[Y,X]=dimpulse(A,B,C,D,ishock,npts+1);
%aceasta nu funcționează cînd  capitalul este  definit ca aici
[Y1,X1]=dimpulse(A1,B1,C1,D1,ishock,npts+2);
YP1=Y1(2:npts+2,:);
XP1=X1(2:npts+2,:);
else
A2 = [p q;zeros(nz,nk) phi];
C2 = [m n];
D2 = zeros(nx-nk,nu);
B2 = [zeros(nk,nu);bigpsi];
```

```
%[Y,X]=dimpulse(A,B,C,D,ishock,npts+1);
% aceasta nu funcționează cînd  capitalul este  definit ca aici
[Y2,X2]=dimpulse(A2,B2,C2,D2,ishock,npts+2);
YP2=Y2(2:npts+2,:);
XP2=X2(2:npts+2,:);
end %sfîrşitul  'if' statement
%deplasarea mai departe după primul caz:
loop = loop+1;
end %sfîrşitul 'for' statement
jj=[0:npts];
%i1 = Y(:,ires); % indicile de coloană este elementul  y solicitat

subplot(3,3,1)
plot(jj,YP1(:,ypos), jj,YP2(:,ypos),'-.r')
title('Output')
%axa([0 20 -.5 .5])
legenda(' utilizare fixă',' utilizare variabilă')
text(0,YP2(1,ypos)+0.6,'FIGURE 5:  Răspunsul la şocul technologic unitar,  rolul
utilizării variabile')
subplot(3,3,2)
plot(jj,YP1(:,cpos),jj,YP2(:,cpos),'-.r')
title('Consumul')
%axa([0 20 -.25 .25])

subplot(3,3,3)
plot(jj,YP1(:,ipos),jj,YP2(:,ipos),'-.r')
title('Investițiile')
%axa([0 20 -.5 .5])

subplot(3,3,4)
plot(jj,YP1(:,hpos),jj,YP2(:,hpos),'-.r')
title('Munca')
%axa' ([0 20 -1.5 1.5])

subplot(3,3,5)
plot(jj,YP1(:,wpos),jj,YP2(:,wpos),'-.r')
title('Salariul real')
%axa([0 20 -.5 .5])

subplot(3,3,6)
%plot(jj,YP(:,ek1pos))
plot(jj,XP1(:,1),jj,XP2(:,1),'-.r')
title('Capital')
%axa([0 20 -1.5 1.5])
subplot(3,3,7)
plot(jj,YP1(:,rpos),jj,YP2(:,rpos),'-.r')
title('Rata dobînzii')
%axa([0 20 -1.5 1.5])

subplot(3,3,8)
plot(jj,YP1(:,zpos),jj,YP2(:,zpos),'-.r')
title('Rata de Utilizare')
%axa([0 20 -.5 .5])

subplot(3,3,9)
plot(jj,XP1(:,2),jj,XP2(:,2),'-.r')
title('Productivitate')
```

```
%axa([0 20 -1.5 1.5])
```