Universitatea Academiei de Ştiinţe a Moldovei

A. Corlat

# CURS DE TEORIA MĂSURII

*Note de curs*

Chişinău – 2015

# INTRODUCERE

Sunt prezentate ideile de bază ale cursului "Teoria măsurii şi integrala Lebesgue" ţinut studenţilor anului III, facultatea Ştiinţe Exacte, specialităţile "Matematică", "Informatică". În mare măsură cursul se sprijină pe manualele [1], [2], [10], [11].

CAPITOLUL 1

# MĂSURĂ

## 1. Algebre şi $\sigma$-algebre

Fie $X$ – o mulţime abstractă, numită în continuare spaţiu. Vom nota cu $\mathcal{P}(X)$ – mulţimea tuturor submulţimilor (părţilor) spaţiului $X$, $\varnothing$ – mulţimea vidă.

**Definiţie 1.1.1.** *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte inel (clan), dacă ea este închisă în raport ce operaţiile de reuniune şi diferenţă a două mulţimi, adică:*

$$\forall \{A, B\} \subset \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{K},\ A \setminus B \in \mathcal{K}.$$

**Observaţie 1.1.1.** Fie $\mathcal{K}$ – inel. Cum pentru orice $A, B \in \mathcal{K}$:

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \bigtriangleup B),$$

rezultă, că inelul $\mathcal{K}$ este închis şi în raport cu operaţiile de diferenţă simetrică şi intersecţie a două mulţimi. Totodată

$$A \cup B = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup (A \cap B), \quad A \setminus B = (A \bigtriangleup B) \cap A,$$

adică putem defini inelul şi în felul următor.

**Definiţie 1.1.2.** *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte inel, dacă ea este închisă în raport ce operaţiile de intersecţie şi diferenţă simetrică a două mulţimi.*

**Observaţie 1.1.2.** Fie $\mathcal{K}$ – inel. Din definiţia lui rezultă nemijlocit următoarele proprietăţi:

1. $\varnothing \in \mathcal{K}$;

2. $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathcal{K},\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K},\ \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}.$

**Exemplul 1.1.1. a)** Fie $A \subset X,\ A \neq \varnothing,$ atunci $\mathcal{K} = \{\varnothing, A\}$ – inel (cel mai "sărac" inel).

**b)** $\mathcal{K} = \mathcal{P}(X)$ – inel (cel mai "bogat" inel).

**c)** Fie $X = \mathbb{R}$. $\mathcal{K} = \{A \subset X \mid cardA < \infty\}$ – inel.

**d)** Fie $X = \{a, b, c\}$, atunci $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ – inel.

**Teorema 1.1.1.** *Orice intersecţie de inele este un inel.*

**Demonstraţie.** Fie $\{\mathcal{K}_i\}_{i \in I}$ o familie de inele, şi $\mathcal{K} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{K}_i$. Fie $A \in \mathcal{K}$ si $B \in \mathcal{K}$. Atunci $A \in \mathcal{K}_i$ şi $B \in \mathcal{K}_i$ oricare ar fi $i \in I$. Cum pentru orice $i \in I$, $\mathcal{K}_i$ – inel, rezultă că odată cu $A$ şi $B$ avem $A \bigcup B \in \mathcal{K}_i$, $A \setminus B \in \mathcal{K}_i$ oricare ar fi $i \in I$. Prin urmare, $A \bigcup B \in \mathcal{K}$, $A \setminus B \in \mathcal{K}$ şi $\mathcal{K}$ este inel.

**Teorema 1.1.2.** *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unic un inel $\mathcal{K}(S)$ cu următoarele proprietăţi:*

*1. $S \subset \mathcal{K}(S)$;*

*2. dacă $\mathcal{B}$ – inel şi $S \subset \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{K}(S) \subset \mathcal{B}$.*

**Demonstraţie.** Există inele, ce conţin $S$, de exemplu, $\mathcal{P}(X)$. Considerem intersecţia tuturor inelelor, ce conţin $S$:

$$\mathcal{K}(S) = \bigcap_{K \in \Sigma} \mathcal{K}, \tag{1}$$

unde $\Sigma$ – mulţimea tuturor inelelor ce conţin familia $S$. Conform teoremei 1.1.1, $\mathcal{K}(S)$ este inel şi conţine familia $S$. Cum $\mathcal{K}(S)$ este intersecţia tuturor inelelor ce conţin $S$, $\mathcal{K}(S)$ se conţine în fiecare dintre aceste inele. Din (1) rezultă şi unicitatea lui $\mathcal{K}(S)$.

**Observaţie 1.1.3.** 1. Inelul (1) se numeşte inel generat de familia $S$.

2. Demonstraţia teoremei 1.1.2 nu este constructivă. Totodată indicăm următorul procedeu de obţinere a inelului generat de $S$: $\mathcal{K}(S)$ este familia de mulţimi, ce se obţine din mulţimile familiei S ca rezultat al aplicării unui număr finit de operaţii de reuniune şi diferenţa (toate posibile). De exemplu, fie $X = \{a, b, c\}, S = \{\{a\}, \{b\}\}$. Atunci $\mathcal{K}(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

În continuare vom folosi adesea următoarea lema:

**Lema 1.1.1.** *Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ un şir arbitrar de mulţimi din inelul $\mathcal{K}$. Atunci există mulţimile $B_1, B_2, ..., B_n, ...,$ $\forall i \in N$ $B_i \in K$ ce posedă proprietăţile:*

*1. $B_i \subset A_i, \forall i \in \mathbb{N}$;*

*2. $B_i \cap B_j = \varnothing, \quad i \neq j$;*

*3. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.*

**Demonstraţie.** Şirul de mulţimi $(B_n)_n$ va fi construit astfel:

$B_1 = A_1$,

$B_2 = A_2 \setminus A_1$,

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$,

...

$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j\right)$,

...

Din modul de definire a şirului $(B_n)_n$ rezultă nemijlocit că: a) $\forall i \in \mathbb{N} : B_j \in \mathcal{K}$ şi b) $\forall i \in \mathbb{N} : B_j \subset A_j$.

Să demonstrăm 2. Fie $B_j = A_j \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} A_i\right)$, $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i\right)$ şi $j < k$. Cum $B_k = A_k \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_j} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}}$ si $B_k \cap B_j \subset B_k \cap A_j$, rezultă $B_k \cap B_j = \varnothing$.

Să demonstrăm 3. Cum $A_j \supset B_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j. \tag{2}$$

Fie $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Atunci $\exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n$. Notăm cu $n_0$ cel mai mic număr natural cu proprietatea: $x \in A_{n_0}$ şi $x \notin A_1, x \notin A_2, ..., x \notin A_{n_0-1},$. Rezultă $x \in B_{n_0}$ şi prin urmare $x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Din faptul că $n_0 = 1$, rezultă $x \in B_1$ şi iar $x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Aşadar

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j$.

**Definiţie 1.1.3.** *Inelul de mulţimi $\mathcal{K}$ se numeşte $\sigma$-inel (clan borelian de mulţimi) dacă împreună cu orice şir de mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ el contine şi reuniunea lor, adică*

$$\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

**Definiţie 1.1.4.** *Inelul de mulţimi $\mathcal{K}$ se numeşte $\delta$-inel, dacă împreună cu orice şir de mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ el conţine şi intersecţia lor, adică*

$$\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

**Teorema 1.1.3.** *Orice $\sigma$-inel este şi $\delta$-inel.*

**Observaţie 1.1.4.** Afirmaţia reciprocă nu este justă.

**Exemplul 1.1.2. a)** $\mathcal{P}(X)$ atât $\sigma$-inel cât şi $\delta$-inel.

**b)** Familia tuturor mulţimilor mărginite ale spaţiului euclidian $n$-dimensional este $\delta$-inel, dar nu este $\sigma$-inel (reuniunea numărabilă de mulţimi mărginite nu numaidecât este o mulţime mărginită).

**c)** Familia formată din submulţimile cel mult numărabile ale spaţiului $X$ şi din complementarele lor constituie un $\sigma$-inel.

**Teorema 1.1.4.** *Orice intersecţie de $\sigma$-inele este $\sigma$-inel.*

**Teorema 1.1.5.** *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unic $\sigma$-inelul $\sigma$-$\mathcal{K}(S)$ cu următoarele proprietăţi:*

*1. $S \subset \sigma$-$\mathcal{K}(S)$;*

*2. dacă $B$ – $\sigma$-inel şi $S \subset B$, atunci $\sigma$-$\mathcal{K}(S) \subset B$.*

$\sigma$-$\mathcal{K}(S)$ se numeşte $\sigma$-inel denerat de familia $S$.

Demonstraţiile teoremelor 1.1.4 şi 1.1.5 sunt similare demonstraţiilor teoremelor 1.1.1 şi 1.1.2 respectiv.

**Definiţie 1.1.5.** *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte algebră (corp) dacă ea este închisă în raport cu operaţiile de reuniune a două mulţimi şi complementară a mulţimii, adică*

*1. $\forall\{A, B\} \subset \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{A}$;*

*2. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathfrak{A}$.*

Din definiţie rezultă următoarele consecinţe:

1. $X \in \mathfrak{A}$;

2. $\forall\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$ (prin inducţie);

3. $\forall\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$ (în adevăr, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}}$);

4. $\forall\{A, B\} \subset \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$.

**Exemplul 1.1.3. a)** Familiile $\{\varnothing, X\}$ şi $\mathcal{P}(X)$ sunt cele mai simple exemple de algebre.

**b)** Fie $X = \{a, b, c\}$. $\mathfrak{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ – algebră.

**c)** Orice inel $\mathcal{K}$ cu proprietatea $X \in \mathcal{K}$ este algebră.

**Teorema 1.1.6.** *Orice intersecţie de algebre este algebră.*

**Teorema 1.1.7.** *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unică algebra $\mathfrak{A}(S)$ cu următoarele proprietăţi:*

*1. $S \subset \mathfrak{A}(S)$;*

*2. dacă $\mathfrak{A}$ – algebră şi $S \subset \mathfrak{A}$, atunci $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}$.*

Algebra $\mathfrak{A}(S)$ se numeşte algebră generată de familia $S$.

**Definiţie 1.1.6.** *Algebra de mulţimi $\mathfrak{A}$ se numeşte $\sigma$-algebră, dacă ea este $\sigma$-inel, adică împreună cu orice şir de mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{A}$ se conţine şi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*

**Definiţie 1.1.7.** *Algebra de mulţimi $\mathfrak{A}$ se numeşte $\delta$-algebră, dacă este $\delta$-unel.*

**Observaţie 1.1.5.** Orice $\sigma$-algebră este $\delta$-algebră si orice $\delta$-algebră este $\sigma$-algebră.

**Teorema 1.1.8.** *Orice intersecţie de $\sigma$-algebre este $\sigma$-algebră.*

**Teorema 1.1.9.** *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unică $\sigma$-algebra $\sigma$-$\mathfrak{A}(S)$ cu proprietăţile:*

*1. $S \subset \sigma$-$\mathfrak{A}(S)$;*

*2. dacă $\mathfrak{A}$ – $\sigma$-algebră şi $S \subset \mathfrak{A}$, atunci $\sigma$-$\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}$.*

Sigma-algebra $\sigma$-$\mathfrak{A}(S)$ se numeşte $\sigma$-algebră generată de familia $S$.

**Exemplul 1.1.4. a)** $\mathcal{P}(X)$ – $\sigma$-algebră.

**b)** Fie $\mathfrak{A} = \{B \subset X \mid$ cel puţin una din multimile $B, \overline{B}$ este cel mult numarabilă$\}$. $\mathfrak{A}$ – $\sigma$-algebră.

**Definiţie 1.1.8.** *Şirul de mulţimi $\{A_n\}$ se numeşte crescător (descrescător), dacă $A_n \subset A_{n+1} \quad (A_n \supset A_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Prin definiţie limita unui şir crescător $\{A_n\}$ (descrescător $\{B_n\}$) este $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$. Şirurile crescătoare şi descrescătoare se numesc şiruri monotone.

**Definiţie 1.1.9.** *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte familie monotonă, dacă împreună cu orice şir monoton de mulţimi $\{A_n\}$ ea conţine şi $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.*

**Exemplul 1.1.5. a)** $\mathcal{P}(X)$ – familie monotonă de mulţimi.

**b)** Orice $\sigma$-inel $\mathfrak{M}$ este familie monotonă de mulţimi. În adevăr, odată cu orice şir de mulţimi (nu numaidecât monoton) $\sigma$-inelul $\mathfrak{M}$ conţine şi reuniunile şi intersecţiile numărabile ale lor.

**Teorema 1.1.10.** *Dacă inelul $\mathcal{K}$ este familie monotonă, atunci el este $\sigma$-inel.*

**Demonstraţie.** Fie $\{A_n\}$ un şir arbitrar de mulţimi din inelul $\mathcal{K}$, $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i,\ k \in \mathbb{N}$. Cum $\mathcal{K}$ – inel, rezultă $B_k \in \mathcal{K},\ \forall k \in \mathbb{N}$. Şirul $\{B_k\}$ este un şir crescător de mulţimi din $\mathcal{K}$ şi cum $\mathcal{K}$ – familie monotonă, rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} B_k \in \mathcal{K}$. Ramâne de observat că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k \in \mathcal{K}.$$

**Teorema 1.1.11.** *Fie $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ – inel. Atunci $\sigma$-inelul $\sigma(\mathcal{K})$ generat de inelul $\mathcal{K}$ şi familia monotonă $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ generată de inelul $\mathcal{K}$, coincid.*

**Demonstraţie.** Cum $\sigma$-inelul $\sigma(\mathcal{K})$ este familie monotonă (exemplul 1.1.5 b)) avem $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K})$.

Să demonstrăm că $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – inel, atunci comform teoremei precedente $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – $\sigma$-inel ce conţine $\mathcal{K}$ şi, prin urmare, $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ cu ce demonstraţia teoremei va fi încheiată.

Demonstraţia afirmaţiei $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – inel o vom petrece în câteva etape.

1. Fie $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ şi $L(B) = \{A \subset X \mid \{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})\}$. Din simetria condiţiilor impuse se observă echivalenţa $A \in L(B) \Leftrightarrow B \in L(A)$.

2. $L(B)$ – familie monotonă. În adevăr, fie $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ un şir crescător de mulţimi din $L(B)$ şi $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Cum

a) $A \cup B = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \bigcup B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \cup B) = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$, deoarece $\{A_j \cup B\}_{j\in\mathbb{N}}$ este un şir crescător de mulţimi din familia monotonă $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Similar

b) $A \setminus B = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \setminus B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus B) = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \setminus B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$;

c) $B \setminus A = B \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} (B \setminus A_j) = \lim\limits_{n\to\infty} (B \setminus A_n) \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$, deoarece $\{B \setminus A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător de mulţimi din familia monotonă $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Prin urmare, $A \in L(B)$.

Similar, dacă $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...,\quad A_j \in L(B) \quad \forall j \in \mathbb{N}$, atunci

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in L(B).$$

Aşadar $L(B)$ – clasă monotonă.

3. Fie $B \in \mathcal{K}$. Atunci $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$. În adevăr, cum $\mathcal{K} \subset L(B)$ (dacă $A \in \mathcal{K}$, atunci $\{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset \mathcal{K}$ şi cu atât mai mult $\{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})$) rezultă $L(B)$ – familie monotonă ce conţine $\mathcal{K}$ şi $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$.

4. Fie $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Atunci $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$. În adevăr, fie $A \in \mathcal{K}$. Conform p.3, $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(A)$. Cum $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ avem $B \in L(A)$ şi conform p.1 $A \in L(B)$. Aşadar $\mathcal{K} \subset L(B)$ şi, prin urmare, $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$.

5. $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – inel. Fie $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Cum $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ conform p.4 $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$ şi în particular, $A \in L(B)$.

## 2. Funcţii de mulţimi

Fie $X$ – spaţiu, $H \subset \mathcal{P}(X)$ – o colecţie nevidă de submulţimi.

**Definiţie 1.2.1.** *Aplicaţia* $\mu : H \to \mathbb{R}$ *se numeşte funcţie de mulţimi.*

**Definiţie 1.2.2.** *Funcţia de mulţimi* $\mu$ *se numeşte nenegativă, dacă* $\forall A \in H$ : $\mu(A) \geq 0$.

**Definiţie 1.2.3.** *Funcţia de mulţimi* $\mu$ *se numeşte monotonă, dacă* $\forall \{A, B\} \subset H$ *cu* $A \subset B$, *avem* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

**Definiţie 1.2.4.** *Funcţia de mulţimi* $\mu$ *se numeşte aditivă (finit aditivă), dacă* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset H$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in H$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ : $\mu\left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

**Definiţie 1.2.5.** *Funcţia de mulţimi* $\mu$ *se numeşte semiaditivă (finit semiaditivă), dacă* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset H$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in H$ : $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

**Definiţie 1.2.6.** *Funcţia de mulţimi* $\mu$ *se numeşte* $\sigma$*-aditivă (numărabil aditivă), dacă* $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset H$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in H$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ : $\mu\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

**Definiţie 1.2.7.** *Funcţia de mulţimi* $\mu$ *se numeşte* $\sigma$*-semiaditivă (numărabil semiaditivă), dacă* $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset H$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ : $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

**Definiţie 1.2.8.** *Funcţia de mulţimi* $\mu : H \to (-\infty; +\infty]$ *se numeşte finită, dacă* $\forall A \in H : \mu(A) < +\infty$.

**Definiţie 1.2.9.** *Funcţia de mulţimi* $\mu : H \to (-\infty; +\infty]$ *se numeşte* $\sigma$*-finită, dacă există* $\{A_n\} \subset H : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = H$ *şi* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(A_n) < +\infty$.

**Definiţie 1.2.10.** *Fie* $\mu : H \to \mathbb{R}$, $A \subset H$. *Funcţia de mulţimi* $\mu\big|_A : A \to \mathbb{R}$ *se numeşte restricţie a funcţiei* $\mu$ *pe* $A$ *(iar* $\mu$ *se numeşte prelungire a funcţiei* $\mu\big|_A$ *pe* $H$*), dacă* $\forall B \in A$ : $\mu(B) = \mu\big|_A(B)$.

## 3. Notiunea de măsură. Proprietăţi elementare

Fie $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ o algebră şi $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe algebră $\mathfrak{A}$.

**Definiţie 1.3.1.** *Funcţia* $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ *se numeşte măsură, dacă ea este nenegativă şi* $\sigma$*-aditivă.*

**Observaţie 1.3.1.** Din definiţia 1.3.1 rezultă:

1. măsura este o funcţie aditivă de mulţimi;

2. $\mu(\varnothing) = 0$.

**Exemplul 1.3.1.** Fie $X \neq \varnothing,\ x_0 \in X$. Aplicaţia $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$, definită astfel

$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A, \end{cases}$$

pentru $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, este o măsură (măsura Dirac).

**Exemplul 1.3.2.** Fie $X$ un spaţiu arbitrar, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – un şir fixat de puncte distincte din $X$, $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – un şir de numere nenegative cu $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j < +\infty$, $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ o funcţie de mulţimi definită pe $\sigma$-algebra $\mathcal{P}(X)$ în felul următor:

$$\mu(A) = \sum_{j:x_j\in A} \mu_j, \quad \forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu(\varnothing) = 0.$$

Funcţia $\mu$ este o măsură, ce se numeşte măsură discretă.

În adevăr: a) nenegativitatea este evidentă;

b) $\sigma$-aditivitatea: fie $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathcal{P}(X)$ cu $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$. Cum termenii unei serii absolut convergente pot fi grupaţi şi permutaţi:

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{k:x_k\in\bigcup\limits_j A_j} \mu_k = \sum_{\bigcup\limits_j\{k|x_k\in A_j\}} \mu_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k:x_k\in A_j} \mu_k = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

**Observaţie 1.3.2.** Sensul fizic al măsurii discrete este repartiţia punctuală a maselor.

**Exemplul 1.3.3.** Orice măsură $\mu$ cu $\mu(X) = 1$ se numeşte probabilistică. Măsura Dirac este o măsură probabilistică, măsura discretă este probabilistică, dacă $\sum\limits_i \mu_i = 1$.

**Proprietăţi 1.3.1.**

**1.** Măsura este o funcţie monotonă de mulţimi.

În adevăr, fie $\{A, B\} \subset \mathfrak{A}$ cu $A \subset B$. Cum $B = A \sqcup (B \setminus A)$,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

**2.** Măsură este o funcţie substractivă de mulţimi

$$\forall\{A, B\} \subset \mathfrak{A} \quad \text{cu } A \subset B \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

**3.** Măsură este o funcţie aditivă de mulţimi.

**4.** $\forall\{A, B\} \subset \mathfrak{A} \qquad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$

**5.** Formula lui Poincaré. Pentru orice $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathfrak{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{L\subset\{1,2,...,n\}} (-1)^{cardL+1}\mu\left(\bigcap_{i\in L} A_i\right).$$

**6.** Măsură este o funcţie $\sigma$-semiaditivă de mulţimi.

Fie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$. Aplicând lema 1.1.1 şi monotonia măsurii, se obţine

$$\mu\left(\bigcup_{n} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n} B_n\right) = \sum_{n} \mu(B_n) \leq \sum_{n} \mu(A_n).$$

## 4. Măsură exterioară

Fie $X$ – spaţiu, $\mathfrak{A}$ – algebră de mulţimi din $\mathcal{P}(X)$, $\mu$ – o măsură definită pe $\mathfrak{A}$.

Oricare n-ar fi mulţimea $A \subset X$, există aşa mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $\mathfrak{A}$ astfel încât $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – de exemplu, $A_1 = X, A_2 = A_3 = ... = \varnothing$. Considerăm funcţia $\mu^*$, definită în felul următor:

$$\forall A \subset X : \mu^*(A) = \inf \sum_{j} \mu(A_j), \tag{4}$$

unde infimul se ia după toate acoperirile posibile ale mulţimii $A$ cu mulţimi $A_j$ din algebra $\mathfrak{A}$.

**Definiţie 1.4.1.** *Funcţia $\mu^*$ definită în (2) se numeşte măsură exterioară.*

**Observaţie 1.4.1.** $\mu^*$ nu este măsură ($\mu^*$ nu este $\sigma$-aditivă).

**Definiţie 1.4.2.** *Se numeste măsură interioară a mulţimii $A \subset X$ numărul $\mu_*(A)$:*

$$\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A). \tag{5}$$

**Proprietăţi 1.4.1.**

**1.** $\mu_*(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \subset X.$

**2.** $\forall A \in \mathfrak{A} \ : \ \mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A).$

În adevăr, avem $A \in \mathfrak{A}$, printre toate acoperirile posibile ale lui $A$ cu mulţimi din algebra $\mathfrak{A}$ avem şi $A_1 = A,\ A_2 = A_3... = \varnothing$, astfel

$$\mu^*(A) \leq \mu(A). \tag{6}$$

Pe de altă parte, conform definiţiei infimumului, pentru orice $\varepsilon > 0$ există aşa o acoperire $\{A_j\}_j$ a mulţimii $A$ cu mulţimi $A_j \in \mathfrak{A}, \ \forall j \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sum_j \mu(A_j) < \mu^*(A) + \varepsilon. \tag{7}$$

Cum

$$A = A \cap \left(\bigcup_j A_j\right) = \bigcup_j (A \cap A_j),$$

ţinând seamă de monotonia şi $\sigma$-aditivitatea măsurii se obţine

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_j (A \cap A_j)) \leq \sum_j \mu(A \cap A_j) \leq \sum_j \mu(A_j)$$

şi utilizând (7) $\quad \mu(A) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Cum $\varepsilon$ este ales arbitrar, de aici rezultă

$$\mu(A) \leq \mu^*(A). \tag{8}$$

Din (6) şi (8) rezultă $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Conform definiţiei măsurii interioare

$$\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(X \setminus A) = \mu(A).$$

**3.** Măsura exterioară este o funcţie nenegativă şi $\mu^*(\varnothing) = 0$.

**4.** Măsura exterioară este o funcţie monotonă.

**5.** Măsura exterioară este o funcţie semiaditivă.

**6.** Măsura exterioară este o funcţie $\sigma$-semiaditivă, adica pentru orice $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $X$ are loc inegalitatea

$$\mu^*(\bigcup_j A_j) \leq \sum_j \mu^*(A_j). \tag{9}$$

Dacă seria din (9) este divergentă, inegalitatea este demonstrată. Fie ea converge. Conform definiţiei măsurii exterioare, oricare n-ar fi $\varepsilon > 0$ şi $j$ fixat se va găsi aşa un şir de mulţimi $\{A_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ astfel încât $A_{j_k} \in \mathfrak{A}, \ \bigcup_k A_{j_k} \supset A$ şi

$$\sum_k \mu(A_{j_k}) < \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{10}$$

Însumând (10) după $j$ de la 1 la $\infty$ se obţine

$$\sum_j \sum_k \mu(A_{j_k}) < \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon. \tag{11}$$

În plus, $\bigcup_j \bigcup_k A_{j_k} \supset \bigcup_j A_j$ si conform definitiei $\mu^*$:

$$\mu^*\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j \sum_k \mu(A_{j_k}). \tag{12}$$

Din (11) şi (12) se obţine

$$\mu^*\left(\bigcup_j A_j\right) < \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon,$$

de unde, $\varepsilon$ fiind arbitrar, obţinem $\sigma$-aditivitatea măsurii exterioare.

**7.** $\forall\{A, B, C\} \subset X \ : \ \mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B)$.

**8.** $\forall\{A, B\} \subset X \ : \ | \mu^*(A) - \mu^*(B) | \leq \mu^*(A \triangle B)$.

**9.** Măsura interioară este o funcţie nenegativă, monotonă şi $\sigma$-semiaditivă de mulţimi.

**Observaţie 1.4.2.** Uneori este comod de a defini măsura exterioară axiomatic:

**Definiţie 1.4.3.** *Funcţia de mulţimi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ se numeşte măsură exterioară, dacă*

*1.* $\forall A \in \mathcal{P}(X) \ : \ \mu^*(A) \geq 0;\ \mu^*(\varnothing) = 0;$

*2. $\mu^*$ este funcţie monotonă;*

*3. $\mu^*$ este o funcţie $\sigma$-semiaditivă.*

## 5. Mulţimi măsurabile. Extinderea măsurii

Fie $\mathfrak{A}_1$ o algebră şi $\mu_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathbb{R}$ o masură, $\mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}$ – de asemenea o algebră şi $\mu_2 : \mathfrak{A}_2 \to \mathbb{R}$ – măsură. Dacă $A \in \mathfrak{A}_1$ implică $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, se spune că $\mu_2$ constituie o prelungire (extensiune) a măsurii $\mu_1$ la algebra $\mathfrak{A}_2$.

În acest paragraf vom arăta cum cu ajutorul noţiunii de măsură exterioară poate fi prelingită măsura definită pe algebra $\mathfrak{A}$ pe o $\sigma$-algebră ce conţine $\mathfrak{A}$.

Fie $X$ – spaţiu, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ – o algebră de mulţimi, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură, $\mu^*$ – măsura exterioară definită de (2) §4 pentru $\forall A \subset X$.

**Definiţie 1.5.1.** *Mulţimea $A \subset X$ se numeşte măsurabilă ($\mu^*$-măsurabilă, măsurabilă în sens Carathéodory), dacă pentru $\forall E \subset X$ are loc egalitatea*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}). \tag{13}$$

**Observaţie 1.5.1.** Deoarece măsura exterioară este o funcţie semiaditivă şi $E = (E \cap A) \bigsqcup (E \cap \overline{A})$, avem

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \qquad \forall E \subset X,$$

de aceea, pentru a verifica dacă mulţimea $E$ e măsurabilă sau ba, este suficient de a verifica inegalitatea opusa.

Vom nota totalitatea mulţimilor măsurabile a $\widetilde{\mathfrak{A}}$, iar restrictia masurii exterioare $\mu^*$ pe $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ca $\widetilde{\mu}$:

$$\widetilde{\mu} = \mu^* \mid_{\widetilde{\mathfrak{A}}} .$$

**Teorema 1.5.1.** $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – *$\sigma$-algebră ce conţine algebra* $\mathfrak{A}$.

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema în câteva etape.

**I.** $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – algebră.

a) Fie $\forall\{A_1, A_2\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$. Să arătăm că $A_1 \cup A_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Cum $A_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, conform definiţiei 1.5.1

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap \overline{A_2}), \qquad \forall E \subset X,$$

de unde

$$\mu^*(E \cap A_1) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \overline{A_2}), \qquad \forall E \subset X, \tag{14}$$

$$\mu^*(E \cap \overline{A_1}) = \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap A_2) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}), \qquad \forall E \subset X. \tag{15}$$

Însumând (14) cu (15) şi ţinând seama că $A_1 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ se obţine

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \overline{A_2}) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap A_2) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}), \ \forall E \subset X. \tag{16}$$

Înlocuim în această ultimă egalitate mulţimea $E$ prin mulţimea $E \cap (A_1 \cup A_2)$ şi obţinem

$$\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \overline{A_2}) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap A_2), \qquad \forall E \subset X. \tag{17}$$

Din (16) şi (17) rezultă

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \cap (\overline{A_1 \cup A_2})), \qquad \forall E \subset X,$$

adică $A_1 \cup A_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

b) Fie $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci $\overline{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ (rezultă imediat din simetria egalităţii (13) în raport cu $A$ şi $\overline{A}$).

Aşadar, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – algebră.

**Observaţie 1.5.2.** Daca $\{A_1, A_2\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ din (17) rezultă

$$\mu^*(E \cap (A_1 \sqcup A_2)) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2), \quad \forall E \subset X. \tag{18}$$

Prin inducţie, daca $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j$

$$\mu^* \left( E \cap \left( \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \right) \right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j), \quad \forall E \subset X. \tag{19}$$

**II.** $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – $\sigma$-algebră. Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ mulţimi măsurabile. Să arătăm ca $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Vom considera că $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$ (pentru cazul general se utilizează Lema 1 §1). Conform observaţiei la definiţia 1.5.1 este suficient să stabilim inegalitatea

$$\mu^*(E) \geq \mu^* \left( E \cap \left( \bigsqcup_j A_j \right) \right) + \mu^* \left( E \cap \overline{\left( \bigsqcup_j A_j \right)} \right), \forall E \subset X. \tag{20}$$

Cum $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – algebră, $\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi, prin urmare,

$$\mu^*(E) = \mu^* \left( E \cap \left( \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \right) \right) + \mu^* \left( E \cap \overline{\left( \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \right)} \right), \forall E \subset X,$$

de unde untilizând (19) şi monotonia măsurii exterioare se obţine

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^* \left( E \cap \overline{\left( \bigsqcup_j A_j \right)} \right), \forall E \subset X.$$

Trecând în ultima inegalitate la limită cu $n \to \infty$, se obţine

$$\mu^*(E) \geq \sum_j \mu^*(E \cap A_j) + \mu^* \left( E \cap \overline{\left( \bigsqcup_j A_j \right)} \right), \forall E \subset X. \tag{21}$$

Cum măsura exterioară este $\sigma$-semiaditivă

$$\mu^* \left( E \cap \left( \bigsqcup_j A_j \right) \right) = \mu^* \left( \bigsqcup_j (E \cap A_j) \right) \leq \sum_j \mu^*(E \cap A_j)$$

şi ţinând seamă de (21) se obţine

$$\mu^*(E) \geq \mu^* \left( E \cap \left( \bigsqcup_j A_j \right) \right) + \mu^* \left( E \cap \overline{\left( \bigsqcup_j A_j \right)} \right), \forall E \subset X,$$

adica $\bigsqcup_j A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi, prin urmare, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – $\sigma$-algebră.

**III.** $\mathfrak{A} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$, adica orice mulţime $A \in \mathfrak{A}$ este măsurabilă. Conform observaţiei 1.5.1 este suficient să arătăm ca pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap \overline{A}\right), \quad \forall E \subset X. \tag{22}$$

Conform definiţiei infimumului pentru $\forall \varepsilon > 0$ există mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $\mathfrak{A}$ astfel încât $E \subset \bigcup\limits_n A_n$

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_j \mu(A_j). \tag{23}$$

Cum $A_j = (A_j \cap A) \sqcup (A_j \cap \overline{A}), \quad \mu(A_j) = \mu(A_j \cap A) + \mu(A_j \cap \overline{A})$, şi (23) se scrie

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_j \mu(A_j \cap A) + \sum_j \mu(A_j \cap \overline{A}). \tag{24}$$

În plus

$$E \cap A \subset \left(\bigcup_j A_j\right) \cap A = \bigcup_j (A_j \cap A),$$

$$E \cap \overline{A} \subset \left(\bigcup_j A_j\right) \cap \overline{A} = \bigcup_j (A_j \cap \overline{A}),$$

de unde rezultă (a se vedea definiţia măsurii exterioare)

$$\sum_j \mu(A_j \cap A) \geq \mu^*(E \cap A), \qquad \sum_j \mu(A_j \cap \overline{A}) \geq \mu^*(E \cap \overline{A})$$

şi, prin urmare, din (24) se obţine

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \quad \forall E \subset X. \tag{25}$$

Cum $\varepsilon$ este arbitrar, din (25) rezultă (22).

**Teorema 1.5.2.** *Restricţia* $\widetilde{\mu} = \mu^* |_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ *este măsură.*

**Demonstraţie.** Nenegativitatea $\widetilde{\mu}$ este clară. Rămâne să demonstrăm $\sigma$-aditivitatea funcţiei $\widetilde{\mu}$, pentru ce este suficient să arătăm că măsura exterioară este $\sigma$-aditivă pe $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ... \subset \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$. Înlocuind în (21) $E = \bigsqcup\limits_j A_j$ se obţine

$$\mu^*(\bigsqcup_j A_j) \geq \sum_j \mu^*(A_j). \tag{26}$$

Cum măsura exterioară este o funcţie $\sigma$-semiaditivă

$$\mu^*(\bigsqcup_j A_j) \leq \sum_j \mu^*(A_j). \tag{27}$$

Din (26) şi (27) rezultă $\mu^*(\bigsqcup_j A_j) = \sum_j \mu^*(A_j)$.

**Teorema 1.5.3.** *(Existenţa prelungirii măsurii). Fie $\mu$ o măsură definită pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Atunci există o $\sigma$-algebră $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}$ şi o măsură $\mu_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathbb{R}$ astfel încât $\mu_1 |_{\mathfrak{A}} = \mu$.*

**Demonstraţie.** Demonstraţia rezultă din teoremele 1.5.1 şi 1.5.2. În adevăr, construim măsura exterioară $\mu^*$ după măsura $\mu$, în calitate de $\mathfrak{A}_1$ considerăm $\sigma$-algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$ mulţimilor $\mu^*$-măsurabile, iar în calitate de $\mu_1$ – măsura $\widetilde{\mu}$. Astfel se obţine prelungirea măsurii $\mu$ pe $\sigma$-algebră.

**Observaţie 1.5.3.** Fie $\mu$ o măsură pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathfrak{A})$ – $\sigma$-algebra generată de algebra $\mathfrak{A}$. Prelungirea masurii $\mu$ pe $\sigma(\mathfrak{A}), \mu_\sigma$ se numeşte prelungire minimală a măsurii $\mu$. Cum $\widetilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$, $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$, prin urmare, putem defini $\mu_\sigma$ astfel: $\mu_\sigma = \widetilde{\mu} |_{\sigma(\mathfrak{A})}$. Este clar, că $\mu_\sigma$ – măsură şi, în plus, $\mu_\sigma |_{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mu} |_{\mathfrak{A}} = \mu$, adică $\mu_\sigma$ – prelungire minimală a măsurii $\mu$.

**Teorema 1.5.4.** *(Unicitatea prelungirii măsurii). Fie $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ – algebră, $\sigma(\mathfrak{A})$ – $\sigma$-algebra generată de $\mathfrak{A}$, $\mu, \nu$ – măsuri definite pe $\sigma(\mathfrak{A})$. Dacă $\mu(A) = \nu(A)$ pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$, atunci $\mu = \nu$.*

## 6. Proprietăţile mulţimilor măsurabile şi măsurii

**Definiţie 1.6.1.** *Măsura $\mu$ definită pe algebra $\mathfrak{A}$ se numeşte completă, dacă $A \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$ şi $\mu(A) = 0$ implică $B \in \mathfrak{A}$.*

**Teorema 1.6.1.** *Fie $\mu$ o masură definită pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mu^*$ – masura exterioară respectivă. Dacă $\mu^*(A) = 0$ pentru un careva $A \subset X$, atunci $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $\widetilde{\mu}(A) = 0$.*

**Demonstraţie.** Pentru demonstra că $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ este suficient să stabilim inegalitatea

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \quad \forall E \subset X.$$

Cum $E \cap A \subset A$ utilizând monotonia şi nenegativitatea măsurii exterioare, se obţine

$$0 \leq \mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = 0,$$

adică $\mu^*(E \cap A) = 0$.

În plus, $E \cap \overline{A} \subset E$ şi cum măsura exterioară e monotonă

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \overline{A}) = \mu^*(E \cap \overline{A}) + \mu^*(E \cap A),$$

rezultă $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci $\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A) = 0$.

**Teorema 1.6.2.** *Măsura $\widetilde{\mu}$ este o măsură completă.*

**Demonstraţie.** Fie $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, $B \subset A$ şi $\widetilde{\mu}(A) = 0$. Atunci $\mu^*(A) = 0$ şi cum măsura exterioară este monotonă, $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$, de unde $\mu^*(B) = 0$. Conform teoremei precedente $B \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $\widetilde{\mu}(B) = 0$.

**Teorema 1.6.3.** *(Continuitatea măsurii în raport cu reuniunile). Fie $\mu$ – măsură definită pe $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X), \{A_n\}$ – un şir crescător de mulţimi din $\mathfrak{A}$. Atunci*

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

**Demonstraţie.** Cum

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \sqcup ...$$

utilizând $\sigma$-aditivitatea şi subtractivitatea măsurii se obţine

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A_1) + \sum_{j=2}^{n} (\mu(A_j) - \mu(A_{j-1}))\right] = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

**Teorema 1.6.4.** *(Continuitatea măsurii în raport cu intersecţiile). Fie $\mu$ – măsură definită pe $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X), \{A_n\}$ – un şir descrescător de mulţimi din $\mathfrak{A}$. Atunci*

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

**Demonstraţie.** Considerând $A_1$ ca spaţiu ce conţine toate mulţimile $A_j$, conform legilor De Morgan

$$A_1 \setminus \bigcap_j A_j = \bigcup_j (A_1 \setminus A_j)$$

de unde

$$\bigcap_j A_j = A_1 \setminus \bigcup_j (A_1 \setminus A_j)$$

şi cum măsura $\mu$ e substractivă

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_j (A_1 \setminus A_j)\right).$$

Dar şirul de mulţimi $\{A_1 \setminus A_j\}_j$ este crescător şi conform teoremei precedente

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

**Observaţie 1.6.1.** Teoremele 1.6.3 şi 1.6.4 pot fi formulate ca o singură teoremă, şi anume

**Teorema 1.6.5.** *(Continuitatea măsurii). Fie $\mu$ – măsură definită pe $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X), \{A_n\}_n$ un şir monoton de mulţimi din $\mathfrak{A}$. Atunci*

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

**Teorema 1.6.6.** *(Condiţie necesară de măsurabilitate). Fie $\mu$ – măsură definită pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\widetilde{\mu}$ – prelungirea măsurii $\mu$ pe $\sigma$-algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$ mulţimilor măsurabile. Atunci pentru $\forall A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ astfel încât*

$$\widetilde{\mu}(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{28}$$

**Demonstraţie.** Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Conform definiţiei măsurii exterioare pentru $\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A)$ şi numărul $\dfrac{\varepsilon}{2}$ se va găsi aşa o acoperire $\{A_j\}_j$ a mulţimii $A$ cu mulţimi $A_j \in \mathfrak{A}$

$$\widetilde{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_j \widetilde{\mu}(A_j). \tag{29}$$

Din (29), tinând seamă de monotonia şi $\sigma$-aditivitatea măsurii $\widetilde{\mu}$ se obţine pentru fiecare $n \geq 1$

$$\widetilde{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right) \geq \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right). \tag{30}$$

Cum $\bigcup\limits_j A_j = A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup ...$, conform teoremei 1.6.3

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right).$$

Prin urmare, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{n_0} A_j\right) + \frac{\varepsilon}{2} > \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right). \tag{31}$$

Fie $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{n_0} A_j$. Atunci din (30) şi (31) se obţine

$$\widetilde{\mu}(A_\varepsilon \setminus A) \leq \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j \setminus A\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\widetilde{\mu}(A \setminus A_\varepsilon) \leq \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde rezultă

$$\widetilde{\mu}(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

## 7. Măsuri $\sigma$-finite

Definiţia măsurii dată în §3 presupunea $\mu(A) < +\infty$ pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$. În acelaşi timp se consideră şi măsuri ce pot lua valori infinite. Măsurile considerate până acum se numesc *finite*.

**Definiţie 1.7.1.** *Fie $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ o algebră de mulţimi. Funcţie $\mu$, definită pe $\mathfrak{A}$ se numeşte măsura, dacă*

*1. $\forall A \in \mathfrak{A}: \quad 0 \leq \mu(A) \leq +\infty, \quad \mu(\varnothing) = 0$;*

*2. $\mu$ este o funcţie $\sigma$-aditivă de mulţimi.*

**Observaţie 1.7.1.** Rămân valabile afirmaţiile §3 şi §4 şi teoremele 1.6.1-1.6.5 din §6, atât cât în teorema 1.6.4 este necesar de a adăuga condiţia: $\exists j \in \mathbb{N} : \mu(A_j) < +\infty$. Pentru valabilitatea celorlalte afirmaţii este necesar de a considera măsurii $\sigma$-finite.

**Definiţie 1.7.2.** *Măsura $\mu : \mathfrak{A} \to [0; +\infty]$ se numeşte $\sigma$-finită, dacă există un şir ascendent de mulţimi $\{A_n\}_n$ din algebra $\mathfrak{A}$ astfel încât $\mu(A_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $X = \bigcup\limits_n A_n$.*

**Observaţie 1.7.2.** Condiţia $\{A_n\}_n$ – şir ascendent în definiţia 1.7.2 poate fi omisă.

**Exemplul 1.7.1.** **a)** Fie $X = \mathbb{N}$, $\quad \mathfrak{A} = \sigma(\mathbb{N})$, $\quad \mu : \sigma(\mathbb{N}) \to [0; +\infty]$ :

$$\mu(A) = \begin{cases} cardA, & \text{dacă } A \text{ este mulţime finită;} \\ \infty, & \text{dacă } A \text{ este mulţime infinită.} \end{cases}$$

$\mu$ – măsură $\sigma$-finită.

**b)** Dacă în cazul măsurii discrete se omite condiţia $\sum\limits_j \mu_j < +\infty$, se obţine o masură discretă $\sigma$-finită.

## 8. Măsura Lebesgue

Un exemplu important de măsură este măsura Lebesgue, întrodusă în tendinţa de a extinde noţiunea de integrală.

Fie $X = [a, b)$, unde $-\infty < a < b < +\infty$, un interval fixat al axei reale, $\mathfrak{A}$ – algebra generată de familia semiintervalelor $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$. Fiecare element al algebrei $\mathfrak{A}$ se reprezintă ca

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i). \tag{32}$$

Lungimea semiintervalului $[\alpha, \beta)$ (segmentului $[\alpha, \beta]$, intervalului $(\alpha, \beta)$) este egală cu $\beta - \alpha$. Lungimea elementului (32) se defineşte astfel:

$$l(A) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i). \tag{33}$$

Considerăm funcţia $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$\mu(A) = l(A), \quad A \in \mathfrak{A}, \quad A \neq \varnothing, \quad \mu(\varnothing) = 0. \tag{34}$$

**Teorema 1.8.1.** *Funcţia $\mu$, definită de (34) este măsură.*

**Definiţie 1.8.1.** *Fie $\mu^*$ – măsura exterioară indusă de măsură $\mu$ din teorema 1.8.1. Mulţimile $\mu^*$-măsurabile se numesc măsurabile în sens Lebesgue, iar prelungirea $m$ a măsurii $\mu$ pe $\sigma$-algebra $\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}([a, b))$ a mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue se numeşte măsura Lebesgue.*

**Observaţie 1.8.1.** Măsura Lebesgue a mulţimii mărginite $A$ nu depinde de alegerea semiintervalului $[a, b)$, în sens că dacă $A \subset [a, b)$ şi $A \subset [a_1, b_1)$, $m$ şi $m_1$ – măsurile Lebesgue construite pentru $[a, b)$ respectiv $[a_1, b_1)$, $A$ măsurabilă după măsura $m$, atunci $A$ este masurabilă după $m_1$ şi $m(A) = m_1(A)$.

**Proprietăţi 1.8.1.**

**1.** Mulţimea ce constă dintr-un singur punct este măsurabilă în sens Lebesgue şi are măsura Lebesgue egală cu zero.

Fie $A = \{x\}$. Este suficient să arătăm că $m^*(A) = 0$, unde $m^*$ – măsura exterioară, după care e construită măsura Lebesgue.

Conform definiţiei măsurii exterioare

$$0 \leq m^*(\{x\}) \leq \inf \sum_{j} m(A_j), \quad A_j \in \mathfrak{A}, \ \forall j : \bigcup_{j} A_j \supset \{x\},$$

dar în calitate de acoperire a mulţimii $\{x\}$ poate fi luat orice semiinterval $[\alpha, \beta)$ ce conţine acest punct. Prin urmare,

$$0 \leq m^*(\{x\}) \leq \inf_{x \in [\alpha,\beta)} m([\alpha,\beta)) = \inf_{x \in [\alpha,\beta)} (\beta - \alpha) = 0,$$

de unde $m^*(\{x\}) = 0$. Aşadar $\{x\} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $m(\{x\}) = 0$.

**2.** Orice mulţime mărginită, cel mult numărabilă de puncte ale axei reale, este măsurabilă şi măsura ei este egală cu zero.

**Observaţie 1.8.2.** Măsura punctelor raţionale de pe segmentul [0,1] este egală cu zero.

**3.** Orice interval (deschis, semideschis, închis) este măsurabil în sens Lebesgue şi măsura lui coincide cu lungimea lui.

$$m([\alpha,\beta)) = m([\alpha,\beta]) = m((\alpha,\beta)) = m((\alpha,\beta]) = \beta - \alpha.$$

**4.** Orice mulţime mărginită, deschisă sau închisă este măsurabilă în sens Lebesgue.

**Definiţie 1.8.2.** *Fie $X$ – un spaţiu topologic arbitrar. $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(X)$ generată de familia tuturor mulţimilor deschise din $X$ se numeşte $\sigma$-algebră boreliană, iar elementele ei – mulţimi boreliene.*

Mulţimi boreliene sunt, în particular, toate mulţimile deschise, închise, mulţimile de tip $F_\sigma$ (reuniuni numărabile de mulţimi închise), $G_\delta$ (intersecţii numărabile de mulţimi deschise), $F_{\sigma\delta}$ (intersecţii numărabile de mulţimi $F_\sigma$), $G_{\delta\sigma}$ (reuniuni numărabile de mulţimi $G_\delta$) etc.

În particular, dacă $X = [a, b)$ se obţine $\mathcal{B}([a, b))$. Mulţimea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ se numeşte mulţime boreliană mărginită, dacă ea se conţine într-o careva $\sigma$-algebră boreliană $\mathcal{B}([a, b))$.

**5.** Orice mulţime boreliană mărginită de pe dreaptă este măsurabilă în sens Lebesgue.

**6.** Fie $A$ – o mulţime măsurabilă, mărginită a dreptei reale. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există aşa o mulţime deschisă, mărginită $G \subset \mathbb{R}$ astfel încât $G \supset A$ şi $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

**7.** Fie $A$ – o mulţime măsurabilă, mărginită a dreptei reale. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există aşa o mulţime închisă $F$ astfel încât $F \subset A$ şi $m(A \setminus F) < \varepsilon$.

**Observaţie 1.8.3.** Am construit măsura Lebesgue pentru mulţimile mărginite de pe axa reală, însă familia tuturor mulţimilor măsurabile mărginite pe axă nu formează o $\sigma$-algebră, chiar nici $\sigma$-inel. Vom construi măsura Lebesgue pentru mulţimi arbitrare ale axei reale. Această măsură ce poate primi şi valoarea $+\infty$ este $\sigma$-finită, iar familia mulţimilor măsurabile este $\sigma$-algebră.

**Definiţie 1.8.3.** *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte măsurabilă în sens Lebesgue, dacă pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ este măsurabilă Lebesgue mulţimea mărginită $A \cap [-n, n)$.*

Vom nota cu $\widetilde{\mathfrak{A}}$ familia tuturor mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue.

**Teorema 1.8.2.** $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – *$\sigma$-algebră.*

**Demonstraţie.** a) $\mathbb{R} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. În adevăr, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ mulţimea $\mathbb{R} \cap [-n, n) = [-n, n)$ este o mulţime măsurabilă mărginită.

b) Fie $\{A, B\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ mulţimea

$$(A \setminus B) \cap [-n, n) = (A \cap [-n, n)) \setminus (B \cap [-n, n))$$

este o mulţime măsurabilă mărginită ca diferenţa a două astfel de mulţimi. Prin urmare, $A \setminus B \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

c) Fie $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci mulţimea

$$\left(\bigcup_j A_j\right) \cap [-n, n) = \bigcup_j (A_j \cap [-n, n))$$

este o mulţime măsurabilă mărginită, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă $\bigcup\limits_j A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Din a)-c) rezultă că $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – $\sigma$-algebră.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime arbitrară. Considerăm şirul numeric $m_n(A) = m(A \cap [-n, n))$. Şirul numeric cu termeni pozitivi $m_n(A)$ fiind crescător ($A \cap [-n, n) \subset A \cap [-(n+1), n+1)$) are limită (finită sau infinită).

**Definiţie 1.8.4.** *Fie $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Măsură Lebesgue a mulţimii $A$ se numeşte limita*

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A \cap [-n, n)). \tag{35}$$

**Teorema 1.8.3.** *Funcţia de mulţimi* (35) *este o măsură $\sigma$-finită definită pe $\sigma$-algebra* $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

**Demonstraţie.** 1. $m$-măsură. În adevăr, din definiţie rezultă $m(A) \geq 0$ şi $m(\varnothing) = 0$. Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ mulţimi măsurabile $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$. Atunci

$$m\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\left(\bigsqcup_j A_j\right) \cap [-n, n)\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigsqcup_j (A_j \cap [-n, n))\right),$$

de unde tinând seamă de $\sigma$-aditivitatea măsurii Lebesgue a mulţimilor mărginite din intervalul $[-n, n)$

$$m\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_j m\left(A_j \cap [-n, n)\right).$$

Trecând la limită termen cu termen (termenii seriei sunt nenegativi) se obţine

$$m\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \sum_j \lim_{n\to\infty} m\left(A_j \cap [-n, n)\right) = \sum_j m(A_j),$$

adică $m$ – funcţie $\sigma$-aditivă de mulţimi. Prin urmare, $m$ – măsură.

2. $m$-măsură $\sigma$-finită. Cum $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-n, n)$ şi $\forall n \in \mathbb{N} \quad m([-n, n)) < +\infty$, $m$ – măsură $\sigma$-finită.

**Observaţie 1.8.4.** Măsurabilitatea mulţimii $A$ şi valoarea măsurii ei Lebesgue nu depind de alegerea sistemului ascendent de semiintervale, adică dacă în definiţiile 1.8.3 şi 1.8.4 de înlocuit semiintervalele $[-n, n)$ cu orice sistem de semiintervale $[\alpha_n, \beta_n)$ cu

$$[\alpha_1, \beta_1) \subset [\alpha_2, \beta_2) \subset ... \subset [\alpha_n, \beta_n) \subset ...$$

şi $\bigcup\limits_n [\alpha_n, \beta_n) = \mathbb{R}$, totalitatea mulţimilor măsurabile şi măsura lor Lebesgue nu se schimbă.

## 9. Măsura Lebesgue-Stieltjes

Fie $X = [a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$ un semiinterval fixat al axei reale, $\mathfrak{A}$ – algebră generată de familia tuturor semiintervalelor $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$, adică algebra mulţimilor

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j), \tag{36}$$

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$, o funcţie crescătoare, mărginită şi continuă la stânga, $\mu_f : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie de mulţimi, definită în felul următor

$$\mu_f(\varnothing) = 0, \quad \mu_f(A) = \sum_{j=1}^{n}(f(\beta_j) - f(\alpha_j)), \quad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{37}$$

**Teorema 1.9.1.** *Funcţia de mulţimi $\mu_f$ definită de (37) este o măsură finită pe $\mathfrak{A}$.*

**Demonstraţie.** Cum funcţia $f$ este crescătoare, $\mu_f$ – funcţie nenegativă şi monotonă. Fie $A = [\alpha, \beta) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k)$. Atunci $\alpha = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \beta_2 = \alpha_3 < ... < \beta_n = \beta$ şi, prin urmare,

$$\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) = f(\beta_n) - f(\alpha_n) + f(\beta_{n-1}) - f(\alpha_{n-1}) + ... + f(\beta_1) - f(\alpha_1) = \sum_{k=1}^{n} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)),$$

adică $\mu_1$ este o funcţie aditivă de mulţimi. Pentru a demonstra $\sigma$-aditivitatea funcţiei $\mu_f$ vom stabili iniţial $\sigma$-semiaditivitatea ei.

Fie $[\alpha, \beta) \subset \bigsqcup_k [\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b)$. Cum $\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha)$ şi funcţia $f$ este continuă la stânga, pentru $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ astfel încât

$$f(\beta) - f(\beta - \delta) < \varepsilon, \tag{38}$$

şi pentru fiecare $k \in \mathbb{N} \quad \exists \delta_k > 0$ încât

$$f(\alpha_k) - f(\alpha_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{39}$$

Pentru intervalele noi are loc incluziunea

$$[\alpha, \beta - \delta] \subset \bigcup_k (\alpha_k - \delta_k, \beta_k).$$

Conform lemei Borel-Lebesgue $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$[\alpha, \beta - \delta] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k - \delta_k, \beta_k).$$

Din ultima incluziune rezultă

$$[\alpha, \beta - \delta) \subset \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k - \delta_k, \beta_k).$$

Alegem $\delta_k$ suficient de mici pentru ca semiintervalele $[\alpha_k - \delta_k, \beta_k),\ k = \overline{1, n}$ să nu se intersecteze. Atunci, cum $\mu_f$ – monotonă şi finit aditivă, se obţine

$$f(\beta - \delta) - f(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{n} (f(\beta_k) - f(\alpha_k - \delta_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (f(\beta_k) - f(\alpha_k - \delta_k)),$$

de unde, ţinând seamă de (38) şi (39) avem

$$\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) + 2\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)) + 2\varepsilon.$$

Trecând în ultima inegalitate la limită cu $\varepsilon \to 0+$ se obţine

$$\mu_f([\alpha, \beta)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)). \tag{40}$$

adică $\mu_f$ – $\sigma$-semiaditivă.

Demonstram $\sigma$-aditivitatea. Fie $[\alpha, \beta) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k)$, unde $[\alpha_k, \beta_k) \cap [\alpha_j, \beta_j) = \varnothing, \ j \neq k$. Atunci pentru $n \in \mathbb{N}$ arbitrar: $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k) \subset [\alpha, \beta)$ de unde rezultă

$$\mu_f([\alpha, \beta)) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)). \tag{41}$$

Trecem în (41) la limită cu $n \to \infty$ şi obţinem

$$\mu_f([\alpha, \beta)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)). \tag{42}$$

Din (40) şi (42) rezultă $\mu_f \left( \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k) \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k, \beta_k))$, adică $\mu_f$ – $\sigma$-aditivă şi deci măsura.

**Definiţie 1.9.1.** *Fie $\mu_f^*$ – măsura exterioară generată de măsura $\mu_f$. Prelungirea măsurii $\mu_f$ pe $\sigma$-algebra mulţimilor $\mu_f^*$-măsurabile se numeşte măsură Lebesgue-Stieltjes generată de funcţia $f$.*

**Observaţie 1.9.1.** 1. $\mu_f$ – măsură completă.

2. Pentru $f(x) = x$ măsura Lebesgue-Stieltjes coincide cu măsura Lebesgue.

**Proprietăţi 1.9.1.**

**1.** Orice mulţime ce constă dintr-un singur punct este măsurabilă în sens Lebesgue-Stieltjes şi

$$\mu_f(\{x\}) = f(x+0) - f(x).$$

În adevăr, cum

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[ x, \ x + \frac{1}{k} \right) \tag{43}$$

unde $k$ este ales aşa ca $x + \dfrac{1}{k} \leq b$, $\{x\}$ este măsurabilă. Cum seminitervalele din (43) formează un şir descendent, conform proprietăţii de continuitate a măsurii

$$\mu_f(\{x\}) = \lim_{n \to \infty} \mu_f \left( \left[ x, \ x + \frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \to \infty} \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) = f(x+0) - f(x).$$

**2.** Orice interval (deschis, semideschis, închis) din $[a, b)$ este măsurabil şi

$$\mu_f((\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha + 0),$$

$$\mu_f([\alpha, \beta]) = f(\beta + 0) - f(\alpha),$$

$$\mu_f((\alpha, \beta]) = f(\beta + 0) - f(\alpha + 0).$$

În adevăr, $[\alpha, \beta)$ – mulţime măsurabilă conform definiţiei; oricare alt interval se reprezintă ca diferenţa sau reuniune de mulţimi măsurabile:

$$(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta) \setminus \{\alpha\}, \qquad [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta) \setminus \{\beta\}, \qquad (\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha\}.$$

În plus

$$\mu_f((\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) - f(\alpha + 0) + f(\alpha) = f(\beta) - f(\alpha + 0),$$

$$\mu_f([\alpha, \beta]) = f(\beta) - f(\alpha) + f(\beta + 0) - f(\beta) = f(\beta + 0) - f(\alpha),$$

$$\mu_f((\alpha, \beta]) = f(\beta + 0) - f(\alpha) - f(\alpha + 0) + f(\alpha) = f(\beta + 0) - f(\alpha + 0).$$

**3.** Orice mulţime boreliană din $[a, b)$ este măsurabilă.

**Observaţie 1.9.2.** Fie $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ – algebra generată de familia semiintervalelor $[\alpha, \beta)$, $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie crescătoare, mărginită şi continuă la stângă (în aşa caz există $f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ şi $f(+\infty) \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$). Repetând raţionamentele precedente vom obţine o măsură Lebesgue-Stieltjes finită pe $\mathbb{R}$.

**Observaţie 1.9.3.** Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi $\lim\limits_{x \to -b} f(x) = +\infty$. Şi în acest caz funcţie $f$ generată o măsură Lebesgue-Stieltjes, care însă nu va fi finită. Pentru a construi măsura în acest caz, observăm, că pentru orice $\varepsilon > 0$ funcţia $f$ pe $X_\varepsilon = [a, b - \varepsilon)$ este mărginită şi generează o măsură Lebesgue-Stieltjes $\mu_f$ pe $X_\varepsilon$. Vom numi mulţimea $A \subset [a, b)$ măsurabilă dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ mulţimea $A \subset [a, b - \varepsilon)$ este măsurabilă în spaţiul $X_\varepsilon$. În aşa caz definim

$$\mu_f(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_f(A \cap [a, b - \varepsilon)). \tag{44}$$

Cum măsura $\mu_f(A \cap [a, b - \varepsilon))$ este monotonă, limita (44) există (finită sau infinită). Măsura generată de funcţia $f$ pe $[a, b)$ este $\sigma$-finită, deoarece $[a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right)$ şi $\mu_f\left(\left[a, b - \frac{1}{n}\right)\right) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Observaţie 1.9.4.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi nemărginită. Şi în acest caz ea generează o măsură Lebesgue-Stieltjes $\sigma$-finită. Construcţia este similară cu construcţia măsurii Lebesgue pe axa reală (se utilizează un sistem de intervale ascendent).

Aşadar, orice funcţie crescătoare, continuă la stânga generează pe axă o măsură Lebesgue-Stieltjes finită sau $\sigma$-finită.

**Teorema 1.9.2.** *Fie $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură $\sigma$-finită pe $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$ de mulţimi din $\mathbb{R}$, ce conţine $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – tuturor mulţimilor boreliene de pe axă. Atunci exisă aşa o funcţie crescătoare, continuă la stânga $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ încât măsura $\mu$ coincide pe $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ cu măsura Lebesgue-Stieltjes $\mu_f$ generată de funcţia $f$.*

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema pentru cazul $\mu$ – măsură finită. Fie

$$f(x) = \mu((-\infty, x)), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

şi vom arăta că $f$ verifică condiţiile teoremei.

1. $f$ – funcţie crescătoare. În adevăr, cum $x_1 < x_2$ implică $(-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2)$ şi $\mu$-monotona

$$f(x_1) = \mu((-\infty, x_1)) \leq \mu((-\infty, x_2)) = f(x_2).$$

2. $f$ – continuă la stânga, adică $f(x-0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Fie $(x_n)$ un şir numeric crescător, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Atunci $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n) = (-\infty, x)$ şi utilizând continuitatea măsurii în raport cu reuniunile se obţine

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_n)) = \mu((-\infty, x)) = f(x)$$

adică $f(x-0) = f(x)$.

3. Fie $\mu_f$ – măsura Lebesgue-Stieltjes, generată de funcţia $f$. Atunci $\mu_f = \mu$ pe $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. În adevăr, fie $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ un semiinterval arbitrar, conform definiţiei măsurii Lebesgue-Stieltjes şi substractivităţii măsurii $\mu$

$$\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) = \mu((-\infty, \beta)) - \mu((-\infty, \alpha)) = \mu((-\infty, \beta) \setminus (-\infty, \alpha)) = \mu([\alpha, \beta)),$$

adică pentru orice semiintervalele $[\alpha, \beta)$ măsurile $\mu_f$ şi $\mu$ coincid. Rezultă ca $\mu_f = \mu$ şi pe algebra $\mathfrak{A}$ generată de familia tuturor semiintervalelor $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Atunci conform teoremei despre unicitatea prelungirii minimale, rezultă $\mu_f(A) = \mu(A)$ pentru $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**Observaţie 1.9.5.** Pentru a demonstra teorema în cazul măsurii $\sigma$-finite $\mu$, funcţia $f$ se defineşte, de exemplu, astfel

$$f(x) = \begin{cases} \mu([0, x)), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -\mu([x, 0)), & x < 0. \end{cases}$$

## 10. Măsuri cu semn

Fie $X$ – spaţiu, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ o $\sigma$-algebră de mulţimi, $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie de mulţimi.

**Definiţie 1.10.1.** *Funcţia de mulţimi $\omega$ se numeşte măsură cu semn dacă a) $\omega(\varnothing) = 0$ şi b) $\omega$ este o funcţie $\sigma$-aditivă.*

**Observaţie 1.10.1.** a) Vom considera doar măsuri cu semn finite.

b) Din definiţia măsurii cu semn rezultă următoarele proprietăţi ale ei: aditivitate, subtractivitate şi continuitate în raport cu reuniunile (intersecţiile).

c) Orice măsură cu semn este mărginită.

**Exemplul 1.10.1.** Fie $\mu$ şi $\nu$ două măsuri finite definite pe $\sigma$-algebra $\mathfrak{A}$ şi $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, $\omega(A) = \mu(A) - \nu(A)$, $\forall A \in \mathfrak{A}$. $\omega$ – măsură cu semn.

În adevăr, $\omega(\varnothing) = \mu(\varnothing) - \nu(\varnothing) = 0$ şi $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathfrak{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ avem $\omega\left(\bigsqcup\limits_j A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup\limits_j A_j\right) - \nu\left(\bigsqcup\limits_j A_j\right) = \sum\limits_j \mu(A_j) - \sum\limits_j \nu(A_j) = \sum\limits_j (\mu(A_j) - \nu(A_j)) = $
$= \sum\limits_j \omega(A_j)$.

**Definiţie 1.10.2.** *Mulţimea $A \in \mathfrak{A}$ se numeşte pozitivă (negativă, nulă) în raport cu măsura cu semn $\omega$ (sau $\omega$-pozitivă, $\omega$-negativă, $\omega$-nulă), dacă $\omega(B) \geq 0$, $\forall B \subset A$, $B \in \mathfrak{A}$ ($\omega(B) \leq 0$, $\forall B \subset A$, $B \in \mathfrak{A}$, respectiv $\omega(B) = 0$, $\forall B \subset A$, $B \in \mathfrak{A}$).*

**Teorema 1.10.1.** *(Descompunerea lui Hahn) Fie $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură cu semn. Atunci există aşa două mulţimi disjuncte $X_+$ şi $X_-$ astfel încât $X = X_+ \sqcup X_-$, $X_+$ – mulţime $\omega$-pozitivă, $X_-$ – mulţime $\omega$-negativă.*

**Observaţie 1.10.2.** a) Se spune că mulţimile $X_+$ şi $X_-$ formează o descompunere în sens Hahn a spaţiului $X$ în raport cu măsura cu semn $\omega$.

b) Descompunerea lui Hahn este unică cu exactitate de mulţimi $\omega$-nule.

Fie $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură cu semn definită pe $\sigma$-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $X = X_+ \sqcup X_-$ – descompunerea Hahn a spaţiului $X$. Pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$ definim $\omega_+(A) = \omega(A \cap X_+)$ şi $\omega_-(A) = -\omega(A \cap X_-)$

**Definiţie 1.10.3.** *Funcţiile de mulţimi $\omega_+$ şi $\omega_-$ se numesc variaţie pozitivă şi respectiv variaţie negativă a măsurii cu semn $\omega$. Funcţia de mulţimi*

$$|\omega|(A) = \omega_+(A) + \omega_-(A), \qquad \forall A \in \mathfrak{A}$$

*se numeşte variaţie totală a măsurii cu semn $\omega$.*

**Observaţie 1.10.3.** Din definiţie rezultă că $\omega_+, \omega_-$ şi $|\omega|$ sunt măsuri finite.

**Teorema 1.10.2.** *(Descompunerea lui Jordan) Orice măsură cu semn poate fi reprezentată ca diferenţă a două măsuri finite:* $\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A), \ \ \forall A \in \mathfrak{A}.$

**Demonstraţie.** Utilizând descompunerea Hahn se obţine:

$$\omega(A) = \omega(A \cap X_+) + \omega(A \cap X_-) = \omega_+(A) - \omega_-(A).$$

**Observaţie 1.10.4.** a) Descompunerea lui Jordan nu este unică. În adevăr, fie $\omega = \omega_+ - \omega_-$ o descompunere în sens Jordan, $\mu$ – o măsură finită arbitrară. Atunci $\omega = (\omega_+ + \mu) - (\omega_- + \mu)$ la fel este o reprezentare a măsurii cu semn $\omega$ ca diferenţă a două măsuri.

b) Descompunerea Jordan este minimală în următorul sens: dacă $\omega = \omega_+ - \omega_-$ este descompunerea Jordan, $\omega = \mu - \nu$ – o altă reprezentare a măsurii cu semn $\omega$ ca diferenţă a două măsuri finite, atunci $\omega_+(A) \leq \mu(A), \quad \omega_-(A) \leq \nu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$

În adevăr,

$$\omega_+(A) = \omega(A \cap X_+) = \mu(A \cap X_+) - \nu(A \cap X_+) \leq \mu(A \cap X_+) \leq \mu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Similar se arată şi $\omega_-(A) \leq \nu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$

c) Analog se consideră şi măsuri cu semn ce primesc doar una din valorile $+\infty$ sau $-\infty$.

d) Uneori se consideră şi măsuri cu semn complexe: $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, unde $\omega_1, \omega_2$ – măsuri cu semn.

## 11. Funcţii cu variaţie mărginită

**Definiţie 1.11.1.** *Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie cu variaţie mărginită, dacă $\exists L \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice deviziune $\lambda$ a segmentului $[a,b], \lambda = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ avem*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq L.$$

*Se notează $f \in BV([a,b])$.*

**Definiţie 1.11.2.** *Fie $f \in BV([a,b])$. Numărul*

$$V(f;[a,b]) = \sup_{\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \right\},$$

*unde supremul se ia după toate diviziunile posibile se numeşte variaţie a funcţiei $f$.*

**Exemplul 1.11.1.** 1. Fie $f$ – funcţie monotonă pe $[a,b]$. Atunci $f \in BV([a,b])$ şi $V(f;[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.

2. Funcţiile ce verifică condiţia Lipschitz sunt funcţii cu variaţie mărginită, în particular $f \in C^{(1)}([a,b]) \;\; \Rightarrow \;\; f \in BV([a,b])$.

3. $f \in C([a,b]) \;\; \not\Rightarrow \;\; f \in BV([a,b])$, dar

$$(f \in C([a,b]) \;\; \wedge \;\; |f| \in BV([a,b])) \;\; \Rightarrow \;\; f \in BV([a,b]).$$

**Proprietăţi 1.11.1.**

**1.** $V(f;[a,b]) \geq 0$.

**2.** $V(f;[a,b]) \geq |f(b) - f(a)|$.

**3.** $f \in BV([a,b]) \;\; \Rightarrow \;\; f$ – mărginită pe $[a,b]$.

În adevăr, $\forall x \in [a,b]$ : $\quad |f(x)| = |f(a) + f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq$ $\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V(f;[a,b])$.

**4.** Fie $\{f, g\} \subset BV([a,b])$. Atunci

**a)** $\forall c \in \mathbb{R} : (cf) \in BV([a,b])$;

**b)** $(f \pm g) \in BV([a,b]), \quad (f \cdot g) \in BV([a,b])$;

**c)** dacă, în plus, $\exists \alpha > 0$ astfel încât $\forall x \in [a,b] \quad |g(x)| \geq \alpha$, atunci $\dfrac{f}{g} \in BV([a,b])$.

Demonstraţiile a)-c) sunt similare şi rezultă din definiţia 1.11.1. De exemplu, pentru c): $\forall x_1, x_2 \subset [a,b]$ :

$$\left|\frac{f(x_2)}{g(x_2)} - \frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right| = \left|\frac{f(x_2)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)}{g(x_1)g(x_2)}\right| \leq \frac{1}{\alpha^2}\{|f(x_2)g(x_1) - f(x_1)g(x_1) + f(x_1)g(x_1) -$$

$$- f(x_1)g(x_2)|\} \leq \frac{1}{\alpha^2}\left\{\sup_{[a,b]}|g| \cdot |f(x_2) - f(x_1)| + \sup_{[a,b]}|f| \cdot |g(x_2) - g(x_1)|\right\},$$

de unde, pentru orice diviziune $\lambda$ a sedmentului $[a,b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})} - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{1}{\alpha^2}\left\{\sup_{[a,b]}|g| \cdot V(f;[a,b]) + \sup_{[a,b]}|f| \cdot V(g;[a,b])\right\}.$$

**5.** Fie $f \in BV([a,b])$, $c \in (a,b)$. Atunci $f \in BV([a,c])$, $f \in BV([c,b])$ şi $V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$.

**Demonstraţie.** Fie $\lambda_1 = \lambda_1([a,c]) = \{u_0, u_1, ..., u_{n(1)}\}$, $\lambda_2 = \lambda_2([c,b]) = \{v_0, v_1, ..., v_{n(2)}\}$, $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Cum

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| + \sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leq V(f;[a,b]) \tag{46}$$

rezultă

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| \leq V(f;[a,b]),$$

$$\sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leq V(f;[a,b]),$$

adică $f \in BV([a,c])$ şi $f \in BV([a,b])$ şi în plus din (46) rezultă

$$V(f;[a,c]) + V(f;[c,b]) \leq V(f;[a,b]). \tag{47}$$

Demonstrăm inegalitatea opusă. Fie $\lambda^* = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ şi $c \in (x_j, x_{j+1}]$. Atunci $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum\limits_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_{j+1}) - f(c) + f(c) - f(x_j)| + + \sum\limits_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum\limits_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)| + + \sum\limits_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$,
de unde

$$V(f;[a,b]) \leq V(f;[a,c]) + V(f;[c,b]). \tag{48}$$

Din (47)-(48) rezultă $V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$.

**6. Teorema Jordan.** $f \in BV([a,b]) \Leftrightarrow f$ se reprezintă ca diferenţă a două funcţii crescătoare pe $[a,b]$.

**Demonstraţie.** *Suficienţa.* Fie $g, h$ – funcţii crescătoare, monotone pe $[a,b]$. Atunci (exemplul 1.11.1) $\{g,h\} \subset BV([a,b])$ şi conform proprietăţii 3 $(g-h) \in BV([a,b])$.

*Necesitatea.* Fie $f \in BV([a,b])$. Definim funcţiile $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel:

$$g(a) = 0, \quad \forall x \in (a,b], \quad g(x) = V(f;[a,x]),$$

$$h(x) = g(x) - f(x), \quad \forall x \in (a,b].$$

Funcţiile $g$ şi $h$ sunt crescătoare. În adevăr, pentru $\forall\{x_1, x_2\} \subset [a,b]$ cu $x_1 < x_2$ avem:

$$g(x_1) = V(f;[a,x_1]) \leq V(f;[a,x_1]) + V(f;[x_1,x_2]) = V(f;[a,x_2]) = g(x_2);$$

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - g(x_1) + f(x_1) = V(f; [x_1, x_2]) - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0.$$

**7.** Mulţimea punctelor de discontinuitate a unei funcţii cu variaţie finită este cel mult numărabilă.

**8.** Orice funcţie cu variaţie mărginită determină o măsura cu semn.
În adevăr, fie $f \in BV([a, b])$ – continuă la stânga pe $[a, b]$. Conform teoremei Jordan

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \tag{49}$$

unde $\varphi$ şi $\psi$ sunt funcţii crescătoare, continue la stânga şi mărginite pe $[a, b]$. Fie $\mu_\varphi$ şi $\mu_\psi$ – măsurile Lebesgue-Stieltjes generate de $\varphi$ şi $\psi$ şi definite cel puţin pe $\sigma$-algebra mulţimilor boreliene $\mathcal{B}([a, b])$ şi

$$\omega_f(A) = \mu_\varphi(A) - \mu_\psi(A), \qquad \forall A \in \mathcal{B}([a, b]). \tag{50}$$

Cum $\mu_\varphi$ şi $\mu_\psi$ sunt măsuri finite, $\omega_f$ – măsură cu semn. Să arătăm, că $\omega_f$ nu depinde de reprezentarea (49). În adevăr, dacă $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$, atunci
$\omega_f([\alpha, \beta)) = \mu_\varphi([\alpha, \beta)) - \mu_\psi([\alpha, \beta)) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - \psi(\beta) + \psi(\alpha) =$
$= (\varphi(\beta) - \psi(\beta)) - (\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)) = f(\beta) - f(\alpha),$
adică $\omega_f([\alpha, \beta))$ nu depinde de reprezentarea (49). Rezultă, că şi pentru $\forall A \in \mathcal{B}([a, b])$ valoarea $\omega_f(A)$ nu depinde de $\varphi$ şi $\psi$ în (49).

**9.** Fie $f \in BV([a, b])$, $\omega_f$ – măsură cu semn, generată de funcţia $f$, $|\omega_f|$ – variaţia totală a măsurii cu semn $\omega_f$. Atunci

$$|\omega_f([a, b))| = V(f; [a, b]).$$

CAPITOLUL 2

# FUNCŢII MĂSURABILE

## 1. Funcţii măsurabile

Funcţii măsurabile ocupă un rol important în teoria măsurii şi integrării. Ele sunt definite pe spaţii măsurabile.

**Definiţie 2.1.1.** *Vom numi spaţiu măsurabil perechea* $(X, \mathfrak{A})$*, unde* $X$ *– spaţiu,* $\mathfrak{A}$ *– o* $\sigma$*-algebră de mulţimi din* $\mathcal{P}(X)$*. Multimea* $A \in X$ *cu* $A \in \mathfrak{A}$ *se numeşte mulţime măsurabilă sau* $\mathfrak{A}$*-măsurabilă.*

**Exemplul 2.1.1.** Fie $A = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – $\sigma$-algebra tuturor mulţimilor boreliene de pe axa reală. În spaţiul măsurabil $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mulţimi măsurabile sunt mulţimi boreliene din $\mathbb{R}$, aceste mulţimi se mai numesc măsurabile în sens Borel.

**Definiţie 2.1.2.** *Vom numi spaţiu cu măsură tripletul* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$*, unde* $X$ *– spaţiu,* $\mathfrak{A}$ *– o* $\sigma$*-algebră de mulţimi din* $\mathcal{P}(X)$ *şi* $\mu$ *– măsură definită pe* $\sigma$*-algebra* $\mathfrak{A}$*.*

**Exemplul 2.1.2.** Fie $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ – spaţiul măsurabil definit în exemplul 2.1.1, $m$ – măsura Lebesgue pe axa reală. Atunci $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ – spaţiu cu măsură completă şi $\sigma$-finită.

**Definiţie 2.1.3.** *Fie* $(X, \mathfrak{A})$ *şi* $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ *spaţii măsurabile şi* $f : X \to X_1$ *o funcţie. Vom spune că funcţia* $f$ *este măsurabilă, dacă proimaginea oricărei mulţimi* $\mathfrak{A}_1$*-măsurabile este o mulţime* $\mathfrak{A}$*-măsurabilă, adică pentru* $\forall A_1 \in \mathfrak{A}_1$ *avem* $f^{-1}(A_1) \in \mathfrak{A}$*.*

**Observaţie 2.1.1.** Vom considera în continuare funcţii numerice $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, unde $(X, \mathfrak{A})$ spaţiu cu măsură, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – dreapta reală încheiată. Mulţimi măsurabile în $\overline{\mathbb{R}}$ se consideră mulţimile boreliene. Prin urmare, o funcţie numerică este măsurabilă, daca proimaginea oricărei mulţimi boreliene $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ este o mulţime măsurabilă, adică $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$.

În cazul unei funcţii numerice definiţia funcţiei măsurabile poate fi dată mai simplu. Vom nota $\{f < c\}$ mulţimea $X_c = \{x \in X \mid f(x) < c\}, Y_c = \{f \geq c\} = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$, $Z_c = \{f > c\} = \{x \in X \mid f(x) > c\}, W_c = \{f \leq c\} = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$.

**Teorema 2.1.1.** *Funcţia numerică $f$, definită pe spaţiul măsurabil $(X, \mathfrak{A})$ este măsurabilă dacă şi numai dacă pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ mulţimea $\{f < c\}$ este măsurabilă.*

**Demonstraţie.** *Necesitatea.* Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ intervalul $I = (-\infty, c)$ este mulţime boreliană, rezultă $f^{-1}(I) = \{f < c\}$ este mulţime măsurabilă ($f$-măsurabilă).

*Suficienţa.* Cum pentru $\forall f : X \to X_1$ şi $\forall A, B, A_i \subset X_1$ au loc egalităţile:

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i), \tag{51}$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \tag{52}$$

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}. \tag{53}$$

Rezultă că pentru orice funcţie $f$ definită pe un spaţiu măsurabil, mulţimile, proimaginile cărora sunt măsurabile, formează o $\sigma$-algebră.

Fie $\{f < c\} \in \mathfrak{A}$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Vom arăta că $f$ – funcţie măsurabilă. Pentru $\forall \{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$ cu $c_1 < c_2$ din (52) rezultă:

$\{c_1 \leq f < c_2\} = f^{-1}([c_1, c_2)) = f^{-1}((-\infty, c_2) \setminus (-\infty, c_1)) = f^{-1}((-\infty, c_2)) \setminus f^{-1}((-\infty, c_1)) =$
$= \{f < c_2\} \setminus \{f < c_1\}$,
adică $\{c_1 \leq f < c_2\} \in \mathfrak{A}$.

Aşadar familia de submulţimi din $\mathbb{R}$, proimaginile cărora sunt măsurabile, este o $\sigma$-algebră ce conţine toate intervalele de forma $[c_1, c_2)$, şi, prin urmare, conţine toate mulţimile boreliene.

**Teorema 2.1.2.** *Afirmaţia teoremei 2.1.1 rămâne valabilă, dacă mulţimea $X_c$ se înlocuieşte cu oricare din mulţimile $Y_c$, $Z_c$ sau $W_c$.*

**Demonstraţie.** Fie pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ mulţimea $X_c$ este măsurabilă. Atunci $Y_c = X \setminus X_c$ este măsurabilă pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ ca diferenţă a două mulţimi măsurabile. Considerăm acum mulţimea $W_c$. Cum $W_c = \{f \leq c\} = \bigcap\limits_n \{f < c + \frac{1}{n}\}$, rezultă $W_c$ măsurabilă pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ ca intersecţie numărabilă de mulţimi măsurabile. Măsurabilitatea mulţimii $Z_c$ rezultă din egalitatea $Z_c = X \setminus W_c$.

**Teorema 2.1.3.** *Funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este măsurabilă atunci şi numai atunci când pentru $\forall r \in \mathbb{Q}$ mulţimea $\{f < r\}$ este măsurabilă.*

**Exemplul 2.1.3.** Fie $(X, \mathfrak{A})$ un spaţiu măsurabil, $A \subset X$,
$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in A, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \notin A, \end{cases}$ – indicatorul mulţimii $A$. Cum pentru $\forall c \in R$

$$\{I_A < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ A, & \text{dacă} \quad 0 < c \leq 1, \\ X, & \text{dacă} \quad c > 1, \end{cases}$$

rezultă că $I_A(x)$ este funcţie măsurabilă, dacă şi numai dacă $A$ este mulţime măsurabilă.

**Exemplul 2.1.4.** Fie $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} = \mathcal{B}([0,1))$, $D(x)$ – restricţia funcţiei Dirichlet pe [0,1], $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Cum

$$\{D < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ \mathbb{Q} \cap [0,1], & \text{dacă} \quad 0 < c \leq 1, \\ [0,1], & \text{dacă} \quad c > 1, \end{cases}$$

rezultă că $D(x)$ este funcţie măsurabilă.

## 2. Proprietăţile funcţiilor măsurabile

Fie $(X, \mathfrak{A})$ un spaţiu măsurabil. Vom nota prin $\mathcal{M}(X)$ mulţimea funcţiilor măsurabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Vom stabili în continuare proprietăţile funcţiilor măsurabile.

**Teorema 2.2.1.** *Fie $f \in \mathcal{M}(X)$, $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie măsurabilă în sens Borel. Atunci funcţia compusă $h(x) = g(f(x))$ este măsurabilă pe $X$.*

**Teorema 2.2.2.** *Dacă $f(x) = a = const$ pe $X$, atunci $f \in \mathcal{M}(X)$.*

**Teorema 2.2.3.** *Fie $\{f, g\} \subset \mathcal{M}(X), a \in \mathbb{R}$. Atunci*

*a)* $a \cdot f \in \mathcal{M}(X)$, *b)* $|f| \in \mathcal{M}(X)$, *c)* $f^2 \in \mathcal{M}(X)$, *d)* $f + g \in \mathcal{M}(X)$,
*e)* $f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$, *f)* $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$ *(în condiţia* $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$*)*,
*g)* $\max\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$, *h)* $\min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$.

**Demonstraţie.** a) Fie $a \neq 0$. Atunci, cum

$$\{a \cdot f < c\} = \begin{cases} \left\{f < \dfrac{c}{a}\right\}, & \text{dacă} \quad a > 0, \\ \left\{f > \dfrac{c}{a}\right\}, & \text{dacă} \quad a < 0, \end{cases}$$

rezultă $f \in \mathcal{M}(X)$. Dacă $a = 0$, în mod trivial, $f \in \mathcal{M}(X)$.

b) Măsurabilitatea funcţiei $|f|$ rezultă din relaţia

$$\{|f| < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ \{f < c\} \cap \{f > -c\}, & \text{dacă} \quad c > 0. \end{cases}$$

c) Măsurabilitatea funcţiei $f^2$ rezultă din relaţia

$$\{f^2 < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ |f| < \sqrt{c}, & \text{dacă} \quad c > 0, \end{cases}$$

şi proprietatea b).

d) Fie $\mathbb{Q} = (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – şirul numerelor raţionale. Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\{f + g < c\} = \bigcup_k (\{f < r_k\} \cap \{g < a - r_k\}),$$

rezultă $f + g \in \mathcal{M}(X)$.

e) Cum

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right),$$

rezultă $f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$.

f) Fie $\forall x \in X \;\; g(x) \neq 0$. Cum $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ este suficient să arătăm că $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{M}(X)$. Dar

$$\left\{\frac{1}{g} < c\right\} = \begin{cases} \{g < 0\}, & \text{dacă} \quad c = 0, \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{a}\}, & \text{dacă} \quad c > 0, \\ \{g < 0\} \cap \{g > \frac{1}{a}\}, & \text{dacă} \quad c < 0, \end{cases}$$

rezultă $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$.

g) Cum $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, rezultă $\max\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$.

h) Cum $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$, rezultă $\min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$.

**Teorema 2.2.4.** *Fie $f_n : (X, \mathfrak{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ un şir de funcţii măsurabile. Atunci funcţiile $\sup\limits_n f_n, \inf\limits_n f_n, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n$ sunt măsurabile.*

**Demonstraţie.** Cum $\{\sup\limits_n f_n \leq c\} = \bigcap\limits_n \{f_n \leq c\}$, rezultă $\sup\limits_n f_n \in \mathcal{M}(X)$. Atunci $\inf\limits_n f_n = -\sup(-f_n)$ este o funcţie măsurabilă. Din definiţie avem că $\overline{\lim\limits_n} f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{p \geq n} f_p$, $\underline{\lim\limits_n} f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{p \geq n} f_p$ care sunt funcţii măsurabile conform celor demonstrate anterior.

## 3. Funcţii echivalente

În continuare com considera funcţii numerice definite pe un spaţiu cu măsură finită $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

**Definiţie 2.3.1.** *O proprietate P are loc aproape peste tot (a.p.t.) (sau se verifică (mod $\mu$)), dacă această proprietate se verifică mulţimea $X \setminus E$, unde $\mu(E) = 0$.*

**Definiţie 2.3.2.** *Două definiţii f şi g se numesc echivalente, dacă ele coincid a.p.t., adică $\mu(\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}) = 0$.*

Notaţie: $f \sim g$ sau $f = g$ $(mod\ \mu)$.

**Teorema 2.3.1.** *Fie $\mu$ – măsură completă, $g \in \mathcal{M}(X)$ şi $f = g$ $(mod\ \mu)$. Atunci $f \in \mathcal{M}(X)$.*

**Demonstraţie.** Din $g \in \mathcal{M}(X)$ rezultă că pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ mulţimea $\{g < c\}$ este măsurabilă. Cum $f = g$ $(mod\ \mu)$, rezultă că şi mulţimea $\{f < c\}$ este măsurabilă, deoarece mulţimile $\{f < c\}$ şi $\{g < c\}$ diferă printr-o submulţime de măsură nulă $\{f \neq g\}$, ce este măsurabilă, deoarece $\mu$ – măsură completă.

**Teorema 2.3.2.** *Relaţia de echivalenţă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă pe $\mathcal{M}(X)$.*

## 4. Şiruri de funcţii măsurabile

Vom considera diferite tipuri de convergenţă a funcţiilor măsurabile şi legăturile dintre ele. Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – un spaţiu cu măsură.

Vom spune că şirul de funcţii $(f_n)$ converge punctual (notaţie $f_n \to f$) la funcţia $f$ dacă $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

**Teorema 2.4.1.** *Fie şirul de funcţii măsurabile $(f_n)$ converge punctual la funcţia $f$. Atunci $f \in \mathcal{M}(X)$.*

**Demonstraţie.** Fie pentru orice $x \in X : \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\{f < c\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ f_k < c - \frac{1}{m} \right\}$$

şi mulţimile $\left\{ f_k < c - \frac{1}{m} \right\}$ sunt măsurabile ($f_k \in \mathcal{M}(X)$), rezultă $\{f < c\}$ – mulţime măsurabilă şi $f \in \mathcal{M}(X)$.

**Definiţie 2.4.1.** *Vom spune că şirul de funcţii* $(f_n)$, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $n \in \mathbb{N}$ *converge a.p.t. (sau după mod* $\mu$*) la funcţia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *dacă* $\exists E \in \mathfrak{A}$ *cu* $\mu(E) = 0$ *şi* $\forall x \in X \setminus E$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Notaţie* $f_n \xrightarrow{a.p.t.} f$ *sau* $f_n \to f$ *(mod* $\mu$*).*

**Teorema 2.4.2.** *Fie* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură completă,* $(f_n)$ *– un şir de funcţii măsurabile,* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ *şi* $f_n \to f$ *(mod* $\mu$*). Atunci* $f \in \mathcal{M}(X)$.

**Demonstraţie.** Din $f_n \to f$ *(mod* $\mu$*)* avem $f_n \to f$ pe $X \setminus E$, unde $E = \{x \in X | f_n \not\to f\}$ şi $\mu(E) = 0$. Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$\{f < c\} = \{f < c\} \bigcap ((X \setminus E) \sqcup E) = \{x \in X \setminus E \mid f(x) < c\} \bigsqcup \{x \in X \cap E \mid f(x) < c\}$$

pe $X \setminus E$ funcţia $f$ este măsurabilă conform teoremei 2.4.1 şi cum $\mu$ – măsură completă, $f \in \mathcal{M}(X)$.

**Teorema 2.4.3.** *(Egorov) Fie* $(f_n)$ *un şir de funcţii măsurabile,* $f_n \to f$ *(mod* $\mu$*),* $f \in \mathcal{M}(X)$. *Atunci pentru* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ *cu* $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ *şi pe* $X \setminus A_\varepsilon$ $f_n$ *converge uniform la* $f$.

**Demonstraţie.** Fie $F \in \mathfrak{A}$, $\mu(F) = 0$ şi $\forall x \in X \setminus F$ $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$. Pentru fiecare $j \geq 1$ şi $k \geq 1$ considerăm mulţimile

$$E_{jk} \stackrel{def}{=} \bigcap_{i=j}^{\infty} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\} \in \mathfrak{A}.$$

Pentru fiecare $k \geq 1$ avem $E_{1k} \subset E_{2k} \subset \ldots$ şi $X \setminus F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{jk}$. Prin urmare, $\overline{E}_{1k} \supset \overline{E}_{2k} \supset \ldots$ şi $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \overline{E}_{jk} \subset X \setminus F$. De aici, conform condiţiilor teoremei şi continuităţii măsurii

$$0 = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{E}_{jk}\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(\overline{E}_{jk}).$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din ultima egalitate avem

$$\forall k \geq 1 \quad \exists j(k, \varepsilon) \;:\; \mu(\overline{E}_{j(k,\varepsilon),k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Considerăm mulţimea

$$A_\varepsilon \stackrel{def}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{E}_{j(k,\varepsilon),k} \in \mathfrak{A}$$

pentru care din $\sigma$-semiaditivitatea măsurii $\mu$ avem

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\overline{E}_{j(k,\varepsilon),k}) < \varepsilon.$$

Dacă $x \in X \setminus A_\varepsilon$, atunci $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{j(k,\varepsilon),k} \Rightarrow$

$$\forall k \geq 1 \qquad \sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in E_{j(k,\varepsilon),k}} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \qquad n \geq j(k,\varepsilon),$$

ce demonstrează converganţa uniformă a şirului $f_n$ pe $X \setminus A_\varepsilon$.

**Observaţie 2.4.1.** Teorema Egorov nu are loc pentru măsuri ce primesc valoarea $+\infty$, chiar şi dacă ele sunt $\sigma$-finite.

**Definiţie 2.4.2.** *Fie funcţiile $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ măsurabile. Vom spune că şirul de funcţii $f_n$ converge în măsură la funcţia $f$ (notaţie $f_n \xrightarrow{\mu} f$, sau $\mu \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$), dacă* $\forall \varepsilon > 0 \ : \ \mu\left(\{x \in X \ \big| \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$

**Teorema 2.4.4.** *Dacă $f_n \xrightarrow{\mu} f$ şi $f_n \xrightarrow{\mu} g$, atunci $f = g$ (mod $\mu$).*

**Demonstraţie.** Pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall \varepsilon > 0$ avem

$$\mu\left(\{x \in X \ \big| \ |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \mu\left(\{x \in X \ \big| \ |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in X \ \middle| \ |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X \ \middle| \ |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0, \quad (54)$$
$$n \to \infty$$

s-a folosit semiaditivitatea măsurii $\mu$ şi incluziunea $\{x \in X \ | \ |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X \ \middle| \ |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \bigcup \bigcup \left\{x \in X \ \middle| \ |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Cum

$$\{x \in X \ | \ f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X \ \middle| \ |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

din (54) şi $\sigma$-semiaditivitatea măsurii $\mu$ rezultă

$$\mu(\{x \in X \ | \ f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

adică $f = g$ (mod $\mu$).

**Teorema 2.4.5.** *(Lebesgue) Fie şirul de funcţii finite, măsurabile $(f_n)$ a.p.t. converge la funcţia măsurabilă $f$. Atunci $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

**Demonstraţie.** Fie $A = \{x \in X \ | \ f_n(x) \not\to f(x)\}$, conform condiţiilor teoremei $\mu(A) = 0$. Fie

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X \ | \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon).$$

Uşor de verificat că mulţimile întroduse sunt măsurabile. Avem $R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset \dots$ .

Prin urmare, conform teoremei despre continuitatea măsurii

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\varepsilon)) = \mu(M). \tag{55}$$

Să arătăm că $M \subset A$. În adevăr, fie $x \notin A$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ şi pentru $\varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall k \geq n$ $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, adică $x \notin E_k(\varepsilon)$, $\forall k \geq n$. Aşadar, $M \subset A$ şi cum $\mu(A) = 0$ şi $\mu(M) = 0$. Din (55) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n(\varepsilon)) = 0$ şi cum $E_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$ teorema este demonstrată.

**Observaţie 2.4.2.** 1) Observaţia 2.4.1 rămâne valabilă şi în cazul teoremei Lebesgue. 2) Din convergenţa în măsură, în general, nu rezultă convergenţa a.p.t. În acelaşi timp are loc:

**Teorema 2.4.6.** *(Riesz) Fie şirul de funcţii finite, măsurabile $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în măsură la funcţia $f$. Atunci există subşir $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $f_{n_k} \to f$ (mod $\mu$).*

## 5. Funcţii simple

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură.

**Definiţie 2.5.1.** *Funcţia numerică $f : X \to \mathbb{R}$, definită pe spaţiul măsurabil $(X, \mathfrak{A})$ se numeşte simplă, dacă ea primeşte un număr finit de valori distincte.*

**Observaţie 2.5.1.** a) Fie $f$ o funcţie simplă cu $f(X) = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Considerăm mulţimile $A_j = \{x \in X \mid f(x) = c_j\}$, $j = \overline{1,n}$. Atunci, cum $c_i \neq c_j$,

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j = X \tag{56}$$

şi

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \,\mathbf{1}_{A_j}(x), \quad x \in X. \tag{57}$$

b) Suma şi produsul a două funcţii simple este o funcţie simplă.

**Teorema 2.5.1.** *Funcţia simplă* (57) *este măsurabilă atunci şi numai atunci când toate mulţimile $A_j$ sunt măsurabile.*

**Demonstraţie.** *Necesitatea.* Dacă $f \in \mathcal{M}(X)$, atunci fiecare din mulţimile $A_j = \{x \in X \mid f(x) = c_j\} = f^{-1}(\{c_j\})$ sunt măsurabile, ca proimagini ale mulţimilor boreliene $\{c_j\} \subset \mathbb{R}$.

*Suficienţa.* Cum fiecare din mulţimile $A_j$ sunt măsurabile, $I_{A_j}(x)$ – este funcţie măsurabilă, $j = \overline{1,n}$, şi, prin urmare, şi $f \in \mathcal{M}(X)$ ca combinaţie liniară de funcţii măsurabile.

**Teorema 2.5.2.** *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie măsurabilă definită pe spaţiu măsurabil $(X, \mathfrak{A})$. Atunci există un şir de funcţii simple măsurabile $(f_n)_n$ astfel încât*

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad \forall x \in X.$$

*Dacă funcţia $f$ este mărginită pe $X$, atunci şirul $(f_n)$ poate fi ales astfel încât*

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad n \to \infty \ \text{ pe } \ X.$$

*Dacă funcţia $f$ este nenegativă pe $X$, atunci şirul $(f_n)_n$ poate fi ales crescător.*

**Demonstraţie.** Iniţial vom demonstra teorema pentru funcţii nenegative. Fie $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in X$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{dacă } \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n}, \qquad k = 1, 2, ..., n \cdot 2^n, \\ n, & \text{dacă } f(x) \geq n. \end{cases} \tag{58}$$

Este evident că şirul $(f_n)_n$ este crescător şi că $f_n$ este o funcţie simplă nenegativă (ea primeşte cel mult $n \cdot 2^n + 1$ valori). Din $f \in \mathcal{M}(X)$ şi (58) rezultă $f_n \in \mathcal{M}(X), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Vom demonstra că pentru $\forall x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x). \tag{59}$$

În adevăr, dacă $f(x) < +\infty$, pentru $n$ destul de mari vom avea $f(x) < n$ şi atunci din (58) rezultă

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n},$$

şi, prin urmare, $f_n \to f$. Dacă $f(x) = +\infty$, atunci $f_n(x) = n$ şi iarăşi $f_n \to f$. Aşadar (59) are loc pentru funcţii nenegative.

Fie, în plus, funcţia $f$ este mărginită, adică $0 \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in X$. Atunci, pentru $n > M$ din (58) rezultă,

$$\forall x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n},$$

de unde $f_n \rightrightarrows f$ pe $X$. Aşadar, pentru funcţii nenegative teorema este demonstrată.

Fie acum $f$ – funcţie măsurabilă arbitrară. Considerăm funcţiile $f_+$ şi $f_-$:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$

$$f_-(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Cum $f_+$ şi $f_-$ sunt funcţii măsurabile nenegative, teorema pentru ele este demonstrată. Rămâne de observat că $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.

CAPITOLUL 3

# INTEGRALA LEBESGUE

## 1. Integrarea funcţiilor simple

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – un spaţiu cu măsură finită, $f : X \to \mathbb{R}$ – o funcţie simplă, adică

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathbf{1}_{A_j}(x), \tag{60}$$

unde

$$A_j = \{x \in X \mid f(x) = c_j\}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j, \quad A_j \in \mathfrak{A}, \ j = \overline{1,n}, \quad \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j = X. \tag{61}$$

**Definiţie 3.1.1.** *Vom numi integrală Lebesgue de la funcţia simplă $f$ pe spaţiul $X$ (notaţie $\int\limits_X f(x)d\mu(x)$ sau $\int\limits_X f d\mu$) suma*

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j). \tag{62}$$

**Observaţie 3.1.1.** Fie $A \subset X$ – mulţime măsurabilă, $f$ – funcţie simplă măsurabilă. Atunci $f(x) \cdot I_{\triangle}(x)$ – funcţie simplă, măsurabilă. Prin definiţie

$$\int\limits_A f(x)d\mu(x) = \int\limits_A f d\mu \overset{def}{=} \int\limits_A f \cdot I_A d\mu. \tag{63}$$

**Exemplul 3.1.1. a)** Fie $A \subset X, \ A \in \mathfrak{A}$ şi $I_A(x)$ – funcţia caracteristică a mulţimii $A$. Atunci

$$\int\limits_X I_A(x)d\mu(x) = \mu(A).$$

**b)** Fie $X = [a, b]$, $\mathfrak{A}$ – $\sigma$-algebra mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue, $\mu = m$ este măsura Lebesgue, $D\big|_{[0,1]}(x)$ – restricţia funcţiei Dirichlet pe $[0, 1]$. Atunci

$$\int\limits_{[0,1]} D\big|_{[0,1]}(x)dm(x) = 1 \cdot m(\{\mathbb{Q} \cap [0, 1]\}) + 0 \cdot m(\{[0, 1] \setminus \mathbb{Q}\}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

## 2. Proprietăţile integralei Lebesgue

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – spaţiu cu măsură finită.

**Teorema 3.2.1.** *(linearitatea integralei) Fie $f, g$ – funcţii simple măsurabile, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$. Atunci*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

**Demonstraţie.** Fie

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot I_{A_j}(x), \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j, \quad \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j = X,$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot I_{B_i}(x), \quad B_i \cap B_k = \varnothing, \ i \neq k, \quad \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i = X.$$

Cum funcţia $\alpha f + \beta g$ primeşte valoarea $\alpha c_j + \beta b_k$ pe mulţimea $C_{ji} = A_j \cap B_i$, avem

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (\alpha c_j + \beta b_i) \cdot I_{C_{ji}}(x),$$

unde $\bigsqcup\limits_{j,k} C_{jk} = X$, şi mulţimile $C_{jk}$ sunt disjuncte. Conform definiţiei integralei şi aditivităţii măsurii, se obţine

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (\alpha c_j + \beta b_k) \mu(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \alpha c_j \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \beta b_i \mu(A_j \cap B_i) =$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{k} \mu(A_j \cap B_i) + \beta \sum_{i=1}^{k} b_i \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i) = \alpha \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j) + \beta \sum_{i=1}^{k} b_i \mu(B_i) =$$

$$= \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

**Teorema 3.2.2.** *(nenegativitatea integralei) Fie $f$ – funcţie simplă, măsurabilă şi $f \geq 0$ $(mod\ \mu)$. Atunci $\int\limits_X f d\mu \geq 0$.*

**Demonstraţie.** $f \geq 0$ $(mod\ \mu)$ înseamnă că dacă $c_j < 0$ pentru un careva $j$, atunci $\mu(A_j) = \mu(\{x \in X \mid f = c_j\}) = 0$, prin urmare,

$$\int\limits_X f d\mu \geq 0.$$

**Teorema 3.2.3.** *(monotonia integralei) Fie $f, g$ – funcţii simple, măsurabile şi $f \geq g$ (mod $\mu$). Atunci* $\int\limits_X f d\mu \geq \int\limits_X g d\mu$.

**Demonstraţie.** Se consideră funcţia simplă măsurabilă $h = f - g$ şi se aplică teorema 3.2.2.

**Teorema 3.2.4.** *Fie $f$ – funcţie simplă măsurabilă şi $a \leq f(x) \leq b$ (mod $\mu$). Atunci* $a\mu(X) \leq \int\limits_X f d\mu \leq b\mu(X)$.

**Demonstraţie.** Rezultă din teorema 3.2.3.

**Teorema 3.2.5.** *(referitor integrala de la o funcţie echivalentă cu zero) Daca $f$ este funcţie simplă măsurabilă şi $f = 0$ (mod $\mu$), atunci* $\int\limits_X f d\mu = 0$.

**Demonstraţie.** Rezultă nemijlocit din definiţia 3.1.1. În adevăr, dacă toţi coeficienţi $c_j$ sunt nuli, atunci $f$ este identic nulă, iar dacă $c_j \neq 0$ pentru un careva $j$, atunci $\mu(A_j) = \mu(\{x \in X \mid f = c_j\}) = 0$ şi

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j) = 0.$$

**Teorema 3.2.6.** *Dacă $f, g$ – funcţii simple măsurabile şi $f = g$ (mod $\mu$), atunci* $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu$.

**Demonstraţie.** Se consideră funcţia simplă, măsurabilă $h = f - g \quad h = 0$ (mod $\mu$) şi se aplică teorema 3.2.5.

**Teorema 3.2.7.** *Dacă $f$ – funcţie simplă măsurabilă, atunci* $\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu$.

**Demonstraţie.** Dacă $f$ – funcţie simplă măsurabilă, atunci $|f|$ la fel simplă măsurabilă şi $\forall x \in X$:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Conform proprietăţii de monotonie a integralei

$$-\int\limits_X |f| d\mu \leq \int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X |f| d\mu$$

sau, echivalent,

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

Fie $f$ – o funcţie simplă măsurabilă fixată, $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie numerică definită prin

$$\nu(A) = \int\limits_A f d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{64}$$

**Teorema 3.2.8.** *Funcţia de mulţimi $\nu$ – măsură cu semn.*

**Demonstraţie.** Este clar că $\nu(\varnothing) = 0$. Verificăm $\sigma$-aditivitatea funcţiei $\nu$. Fie $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathfrak{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot I_{B_j}(x)$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j$.

Utilizând definiţia integralei şi $\sigma$-aditivitatea măsurii $\mu$, se obţine

$$\nu(A) = \int\limits_A f d\mu = \int\limits_X f \cdot I_A d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(B_j \cap A) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu\left(B_j \cap \bigsqcup_i A_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \mu\left(\bigsqcup_i (B_j \cap A_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_i \mu(B_j \cap A_i) = \sum_i \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(B_j \cap A_i) = \sum_i \int\limits_{A_i} f d\mu =$$

$$= \sum_i \nu(A_i).$$

**Definiţie 3.2.1.** *Vom spune ca funcţia de mulţimi $\lambda : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ se numeşte absolut continue în raport cu măsura $\mu$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv $\delta$, astfel încât pentru orice $E \in \mathfrak{A}$ cu $\mu(E) < \delta$ se verifică $|\lambda(E)| < \varepsilon$.*

**Teorema 3.2.9.** *(continuitatea absolută a integralei) Măsura cu semn $\nu$ definită în* (64) *este o funcţie absolut continuă în raport cu măsura $\mu$.*

**Demonstraţie.** Fie $f$ – funcţie simplă măsurabilă şi $c = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Dacă $c = 0$, teorema este clară. Fie $c > 0$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ punem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$. Atunci, pentru $\mu(E) < \delta$ avem

$$|\nu(E)| = \left|\int\limits_E f d\mu\right| \leq \int\limits_E |f| d\mu \leq c \cdot \mu(E) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

### 3. Integrala Lebesgue de la funcţii mărginite

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă mărginită pe $X$. Atunci (a se vedea teorema 2.5.2) există un şir de funcţii simple măsurabile $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform convergent la $f$ pe $X$. Vom considera şirul integralelor respective $I_n = \int\limits_X f_n d\mu$ şi vom arăta că şirul $(I_n)$ este fundamental. În adevăr, cum $f_n \rightrightarrows f$ pe X, avem

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > n_0, \quad \forall x \in X$ avem

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)}.$$

Atunci, pentru $m, n > n_0$ avem

$$\left|I_m - I_n\right| = \left|\int_X f_m d\mu - \int_X f_n d\mu\right| = \left|\int_X (f_m - f_n) d\mu\right| \leq \int_X \left|f_m - f_n\right| d\mu < \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \cdot \mu(X) = \varepsilon,$$

adică $(I_n)$ – şir fundamental şi deci există $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$.

Uşor de verificat, că $I$ nu depinde de alegerea şirului $(f_n)$, ce converge uniform pe $X$ la $f$.

**Definiţie 3.3.1.** *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ – funcţie măsurabilă mărginită pe $X$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – un şir de funcţii simple măsurabile ce converge uniform pe $X$ la $f$. Integrala Lebesgue de la funcţia $f$ se defineşte prin egalitatea*

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} I_n. \tag{65}$$

Fie $f$ – funcţie măsurabilă mărginită, $A \in \mathfrak{A}$. Atunci $I_A(x)$ – funcţie mărginită măsurabilă şi la fel este şi produsul $f \cdot I_A$.

**Definiţie 3.3.2.** *Fie $f$ – funcţie măsurabilă mărginită, $A$ – mulţime măsurabilă. Atunci integrala Lebesgue de la funcţia $f$ pe mulţimea $A$ se defineşte prin*

$$\int_A f d\mu \overset{def}{=} \int_X f I_A d\mu. \tag{66}$$

Vom studia proprietăţile integralei Lebesgue de la funcţii măsurabile mărginite. Aceste proprietăţi sunt absolut similare celor de la funcţii simple.

**Teorema 3.3.1.** *(linearitatea integralei) Fie $f, g$ – funcţii măsurabile mărginite, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$. Atunci*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

**Demonstraţie.** Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – şiruri de funcţii simple măsurabile, $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ pe $X$. Atunci $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ pe $X$. Conform definiţiei 3.3.1 şi linearităţii integralei Lebesgue de la funcţii simple, se obţine:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \left( \alpha \int_X f_n d\mu + \beta \int_X g_n d\mu \right) =$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

**Teorema 3.3.2.** *(nenegativitatea integralei) Fie $f$ – funcţie măsurabilă mărginită şi $f \geq 0$ $(mod\ \mu)$. Atunci $\int_X f d\mu \geq 0$.*

**Demonstraţie.** Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii simple măsurabile uniform convergent la $f$. Cum funcţiile $f_n$ pot fi alese astfel încât $f_n \geq 0$ $(mod\ \mu)$ (a se vedea teorema 2.5.2), avem $\int_X f_n d\mu \geq 0$. Trecând în ultima inegalitate la limită cu $n \to \infty$ obţinem $\int_X f d\mu \geq 0$.

**Teorema 3.3.3.** *(monotonia integralei) Fie $f, g$ – funcţii măsurabile mărginite şi $f \geq g$ $(mod\ \mu)$. Atunci $\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$.*

**Teorema 3.3.4.** *Dacă $f$ – funcţie măsurabilă mărginită şi $a \leq f(x) \leq b$ pe mulţimea măsurabilă $A$, atunci*

$$\alpha\mu(A) \leq \int_X f d\mu \leq \beta\mu(A).$$

**Teorema 3.3.5.** *(integrala de la funcţia echivalentă cu zero) Dacă $f$ – funcţia mărginită şi $f = 0$ $(mod\ \mu)$, atunci $\int_X f d\mu = 0$.*

**Demonstraţie.** Rezultă din teorema 3.3.4 cu $a = b = 0$.

**Teorema 3.3.6.** *Dacă $f, g$ – funcţii măsurabile mărginite şi $f = g$ $(mod\ \mu)$, atunci $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*

**Teorema 3.3.7.** *Dacă $f$ – funcţie măsurabilă mărginită, atunci*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

**Demonstraţie.** Fie $(f_n)$ – şir de funcţii simple măsurabile, $f_n \rightrightarrows f$ pe $X$. Atunci funcţiile $|f_n|$ la fel sunt simple, măsurabile şi $|f_n| \rightrightarrows |f|$. Conform teoremei 3.2.7 paragrafului precedent

$$\left| \int_X f_n d\mu \right| \leq \int_X |f_n| d\mu,$$

şi rămâne de trecut în ultima inegalitate la limită cu $n \to \infty$.

Fie $f$ – funcţie măsurabilă mărginită fixată şi

$$\nu(A) = \int\limits_X f d\mu, \qquad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{67}$$

**Teorema 3.3.8.** *Funcţia de mulţimi $\nu$ definită de* (67) *este măsură cu semn.*

**Demonstraţie.** Din definiţie 3.3.1 şi 3.3.2 rezultă $\nu(\varnothing) = 0$. Verificăm $\sigma$-aditivitatea funcţiei $\nu$, adică dacă $A = \bigsqcup\limits_j A_j$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, atunci $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$.

Vom stabili iniţial aditivitatea funcţiei $\nu$, pentru $\forall m \in \mathbb{N}$ :

$$\int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{A_j} f d\mu. \tag{68}$$

Fie $(f_n)$ un şir de funcţii simple, $f_n \rightrightarrows f$. Atunci conform teoremei 3.2.8

$$\int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_j} f_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{A_j} f_n \, d\mu. \tag{69}$$

Trecând în (69) la limită cu $n \to \infty$, se obţine (68).

Cum pentru orice $m \in \mathbb{N}$

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j \bigsqcup \left( \bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right),$$

utilizând aditivitatea funcţiei $\nu$, se obţine

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{m} \nu(A_j) + \nu \left( \bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} \right). \tag{70}$$

Vom estima ultimul termen din (70). Cum $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(A) < +\infty$, pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ a.î. pentru $m > k$ $\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} \mu(A_j) < \dfrac{\varepsilon}{c}$, unde $c = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Pentru aşa $m$ avem:

$$\left| \nu \left( \bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right) \right| = \left| \int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=m+1}^{\infty} A_j} f d\mu \right| \leq \int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=m+1}^{\infty} A_j} |f| d\mu \leq c \cdot \mu \left( \bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right) = c \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu(A_j) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

de unde

$$\lim_{m \to \infty} \nu \left( \bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right) = 0.$$

Trecând la limită în (70) cu $m \to \infty$, se obţine $\sigma$-aditivitatea funcţiei $\nu$. Aşadar, $\nu$ – măsură cu semn.

**Teorema 3.3.9.** *(continuitatea absolută a integralei) Măsura cu semn $\nu$ definită în* (67) *este o funcţie absolut continuă în raport cu măsura $\mu$.*

**Teorema 3.3.10.** *Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$, atunci ea este integrabilă şi în sens Lebesgue, în plus*

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x)dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)dx.$$

**Demonstraţie.** A se vedea, de exemplu, [1,2].

**Teorema 3.3.11.** *(Lebesgue) Funcţia $f$, mărginită pe $[a,b]$, este integrabilă Riemann, atunci şi numai atunci când mulţimea punctelor ei de discontinuitate are măsura Lebesgue egală cu zero.*

**Demonstraţie.** A se vedea, de exemplu, [1,2].

## 4. Integrala Lebesgue de la funcţii nemărginite nenegative

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ spaţiu cu măsură finită, $f$ – funcţia măsurabilă pe $X$, a.p.t. finită şi nenegativă pe $X$. Pentru $\forall N \in \mathbb{N}$ definim funcţia $f_N$ prin

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă} \quad f(x) < N, \\ N, & \text{dacă} \quad f(x) \geq N. \end{cases}$$

Este clar, că $f_N \in \mathcal{M}(X)$ şi $\lim\limits_{N\to\infty} \mu(\{f \geq N\}) = 0$.

Cum pentru orice $N \in \mathbb{N}$ $f_N$ – funcţie măsurabilă mărginită, $f_N$ este integrabilă Lebesgue. În plus, deoarece

$$\forall x \in X: \quad f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq ...$$

conform teoremei 3.3.3

$$\int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \int_X f_3 d\mu \leq ...$$

există limita (finită sau infinită)

$$\lim_{N\to\infty} \int_X f_N d\mu. \tag{71}$$

**Definiţie 3.4.1.** *Vom spune că funcţia $f$ este integrabilă în sens Lebesgue (sumabilă), dacă limita* (71) *este finită. În aşa caz integrala Lebesgue de la funcţia $f$ se defineşte prin egalitatea*

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \int\limits_X f d\mu \overset{def}{=} \lim_{N\to\infty} \int\limits_X f_N \, d\mu.$$

*Dacă limita* (71) *este infinită, punem* $\int\limits_X f d\mu = +\infty$.

**Teorema 3.4.1.** *Fie* $\{f, g\} \subset \mathcal{M}(X)$, $\quad 0 \le f(x) \le g(x)$ $(mod\ \mu)$ *pe* $X$ *şi* $g$ *– funcţie sumabilă. Atunci* $f$ *– sumabilă şi*

$$\int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu.$$

**Demonstraţie.** Din condiţiile teoremei rezultă $f_N(x) \le g_N(x)$ $(mod\ \mu)$ pentru $\forall N \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\int\limits_X f_N \, d\mu \le \int\limits_X g_N \, d\mu \le \int\limits_X g d\mu < +\infty,$$

de unde rezultă ca $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_X f_N \, d\mu$ este finită şi trecând la limită cu $N \to \infty$, obţinem inegalitatea din enunţul teoremei.

Fie $f$ – funcţie sumabilă pe $X$, $A \subset X$ mulţime măsurabilă şi $I_A(x)$ – funcţia caracteristică a lui $A$. Atunci $f \cdot I_A \in \mathcal{M}(X)$ şi cum

$$0 \le f(x) \cdot I_A \le f(x),$$

conform teoremei 3.4.1 $f \cdot I_A$ – funcţie sumabilă.

**Definiţie 3.4.2.** *Dacă* $A \subset X$ *mulţime măsurabilă şi* $f \cdot I_A$ *este o funcţie sumabilă pe* $X$, *integrala Lebesgue de la funcţia* $f$ *pe mulţimea* $A$ *se defineşte prin*

$$\int\limits_A f(x)d\mu(x) = \int\limits_A f d\mu = \int\limits_X f \cdot I_A d\mu.$$

**Teorema 3.4.2.** *(linearitatea integralei) Fie* $f, g$ *– funcţii sumabile nenegative,* $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}_+$. *Atunci* $\alpha f + \beta g$ *este sumabilă şi* $\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$.

**Demonstraţie.** A se vedea, de exemplu, [1]. Fie $f$ – funcţie nenegativă, sumabilă pe $X$ şi fixată, $A \in \mathfrak{A}$ şi $\nu(A) = \int\limits_A f d\mu$.

**Teorema 3.4.3.** *(continuitatea absolută a integralei) Funcţia de mulţimi $\nu$ este absolut continuă în raport cu măsura $\mu$.*

**Demonstraţie.** Din definiţia 3.4.1 rezultă ca pentru $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$0 \leq \int\limits_X (f - f_N) d\mu = \int\limits_X f d\mu - \int\limits_X f_N d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Punem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N}$. Atunci pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$ cu $\mu(A) < \delta$ avem

$$0 \leq \nu(A) = \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X (f - f_N + f_N) d\mu = \int\limits_X (f - f_N) d\mu + \int\limits_X f_N d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

**Teorema 3.4.4.** *Funcţia de mulţimi $\nu$ este măsură.*

**Demonstraţie.** A se vedea, de exemplu, [1].

## 5. Integrala funcţiilor nemărginite

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – un spaţiu cu măsură finită, $f$ – funcţia numerică măsurabilă, a.p.t. finită, definită pe $X$,

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$

$$f_-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Este clar, că $f_+(x), f_-(x)$ sunt funcţii măsurabile nenegative, a.p.t. finite şi

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \qquad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \tag{72}$$

**Definiţie 3.5.1.** *Funcţia $f$ se numeşte integrabilă în sens Lebesgue (sumabilă), dacă ambele funcţii $f_+(x)$ şi $f_-(x)$ sunt integrabile Lebesgue. În aşa caz integrala Lebesgue se defineşte prin*

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu.$$

**Teorema 3.5.1.** *Funcţia măsurabilă $f$ este sumabilă, dacă şi numai dacă $|f|$ este sumabilă. În aşa caz*

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

**Demonstraţie.** *Necesitatea.* Fie $f$ – funcţie sumabilă. Rezultă funcţiile nenegative $f_+$ şi $f_-$ sunt funcţii sumabile. Atunci, conform linearităţii integralei Lebesgue de la funcţii nenegative, funcţia $|f| = f_+ + f_-$ este sumabilă şi

$$\int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu.$$

*Suficienţa.* Fie $|f|$ – funcţie sumabilă. Cum $f_+(x) \le |f(x)|,\ \ f_-(x) \le |f(x)|$, conform teoremei 3.4.1, funcţiile $f_+$ şi $f_-$ sunt sumabile, prin urmare şi $f$ este sumabilă. În plus,

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \le \left|\int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu\right| \le \int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu = \int\limits_X |f| d\mu.$$

**Definiţie 3.5.2.** *Fie $A \subset X$ mulţime măsurabilă, funcţia $f \cdot I_A$ sumabilă pe $X$. Atunci funcţia $f \cdot I_A$ se numeşte sumabilă pe $A$ şi*

$$\int\limits_A f d\mu \stackrel{def}{=} \int\limits_X f \cdot I_A d\mu.$$

Şi în cazul integralei Lebesgue de la funcţii nemărginite rămân valabile teoremele despre linearitatea integralei Lebesgue, continuitatea absolută a integralei şi $\sigma$-aditivitatea integralei.

## 6. Trecerea la limită sub semnul integralei Lebesgue

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită.

**Teorema 3.6.1.** *(Lebesgue) Fie:*

*1) şirul $(f_n)$ de funcţii sumabile convergente în măsură la funcţia $f$;*

*2) există aşa o funcţie sumabilă nenegativă $g$, astfel încât $\forall n \in N : \ |f_n(x)| \le g(x)$.*

*Atunci $f$ este sumabilă şi*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

**Demonstraţie.** Cum $f_n \xrightarrow{\mu} f$, conform teoremei Riesz există un subşir $(f_{n_k}) : f_{n_k} \to f \ (mod\ \mu)$. Din condiţia 2) $|f_{n_k}(x)| \le g(x)$. Trecând la limită cu $k \to \infty$, se obţine $|f(x)| \le g(x) \ (mod\ \mu)$ şi prin urmare, $f$ este sumabilă.

Pentru $\forall \delta > 0$ considerăm mulţimile

$$E_n(\delta) = \{|f_n - f| \ge \delta\}, \quad F_n(\delta) = \{|f_n - f| < \delta\}.$$

Atunci

$$\sigma_n = \left| \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu \right| \leq \int\limits_X |f_n - f| d\mu = \int\limits_{E_n(\delta)} |f_n - f| d\mu + \int\limits_{F_n(\delta)} |f_n - f| d\mu \qquad (73)$$

Cum

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x) \ (mod \ \mu)$$

din (73) se obţine

$$\sigma_n \leq 2 \int\limits_{E_n(\delta)} g d\mu + \delta\mu(X). \qquad (74)$$

Pentru $\varepsilon > 0$ punem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\mu(X)}$. Cum integrala Lebesgue este absolut continue în raport cu măsura $\mu$, vom găsi aşa un $\tau > 0$ astfel încât din $\mu(E) < \tau$ să avem $\int\limits_E g d\mu < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Cum $f_n \xrightarrow{\mu} f$, rezultă că $\exists n_0 \in N$ astfel încât pentru $n \geq n_0$

$$\mu(E_n(\delta)) = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\}) < \tau.$$

Atunci pentru $n \geq n_0$ din (74) rezultă

$$\sigma_n < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică, $\sigma_n \to 0, \ n \to \infty$.

**Teorema 3.6.2.** *(lema Fatou) Fie $(f_n)$ un şir de funcţii măsurabile nenegative, ce converge în măsură la funcţia $f$. Atunci*

$$\int\limits_X f d\mu \leq \varliminf_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

**Demonstraţie.** A se vedea, de exemplu, [2].

**Teorema 3.6.3.** *(Bepppo Levi) Fie $(f_n)$ un şir crescător de funcţii măsurabile nenegative şi $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu. \qquad (75)$$

**Demonstraţie.** Cum $(f_n)$ – şir crescător, rezultă $\left(\int\limits_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ – şir crescător, prin urmare, există limita (finită sau infinită) a acestui şir numeric. Conform lemei Fatou

$$\int\limits_X f d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu. \tag{76}$$

În plus, cum $f_n(x) \leq f(x)$ avem

$$\int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu,$$

de unde trecând la limită cu $n \to \infty$, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu. \tag{77}$$

Din (76) şi (77) rezultă (75).

## 7. Integrala Lebesgue-Stieltjes

Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, continue la stânga. Atunci $g$ defineşte pe $\sigma$-algebra mulţimilor boreliene ale segmentului $[a, b]$ o măsură finită – $\mu_g$ – măsura Lebesgue-Stieltjes. Integrala Lebesgue generată de această măsură se numeşte integrala Lebesgue-Stieltjes şi se notează

$$\int\limits_a^b f(x) d\mu_g(x) = \int\limits_a^b f d\mu_g = \int\limits_a^b f(x) dg(x).$$

În particular, dacă $g$ este funcţia salturilor, $\mu_g$ – măsură discrită şi integrala Lebesgue-Stieltjes se reduce la suma

$$\int\limits_a^b f(x) dg(x) = \sum f(c_k) \triangle_g (c_k),$$

unde $c_k$ – punctele de discontinuitate ale funcţiei $g$, $\triangle_g(c_k)$ – saltul funcţiei $g$ în $c_k$. Dacă funcţia $g \in BV([a, b])$, continuă la stânga, atunci $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, unde $\varphi, \psi$ – funcţii crescătoare, continue la stânga şi integrala Lebesgue-Stieltjes de la funcţia $f$ se defineşte prin egalitatea

$$\int\limits_a^b f(x) dg(x) \stackrel{def}{=} \int\limits_a^b f(x) d\varphi(x) - \int\limits_a^b f(x) d\psi(x).$$

**Teorema 3.7.1.** *Fie* $f \in \mathcal{C}([a,b])$*. Atunci există integrala Riemann-Stieltjes de la funcţia* $g$, $(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *şi are loc egalitatea*

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f(x)dg(x) = (\mathcal{L}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

**Demonstraţie.** A se vedea, de exemplu, [1].

# Bibliografie


[1] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. – Киев: Выща школа, 1990.

[2] Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. – Киев: Выща школа, 1989.

[3] П. Халмош. Теория меры. – М.: Иностранная литература, 1953.

[4] Колмогоров А. Н., Фомин В. С. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

[5] Ж. Невч. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1965.

[6] Г. П. Толстов. Мера и интеграл. – М.: Наука, 1976.

[7] Городецкий В. и др. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев: Выща школа, 1990.

[8] Натансон И. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.

[9] Партасарати К. Введение теорию вероятностей и теории мер. – М.: Мир, 1983.

[10] W. Rudin. Analiza reală şi complexă. – Bucureşti: Theta, 1998.

[11] Nicolescu M. Analiza Matematică III. – Bucureşti: Ed. Tehnică, 1960.

[12] M. Şabac. Analiza reală. – Bucureşti, 1988.

[13] Chicu G. Probabilităţi şi procese stocastice. – Bucureşti, 1979.

# CUPRINSUL