Академия наук Молдовы

Институт математики и информатики

М. Н. Попа, В. В. Прикоп

ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБР К ПРОБЛЕМЕ ЦЕНТРА И ФОКУСА

(*ПРЕПРИНТ*)

Кишинев - 2011

УДК 517.9+519.4+512.9

Приложения алгебр к проблеме центра и фокуса/Попа М. Н. , Прикоп В. В. , – Кишинев, 2011. – 59с.
(Препринт/АНМ, Институт математики и информатики)

С помощью метода производящих функций и рядов Гильберта для градуированных алгебр унимодулярных комитантов двухмерных нелинейных дифференциальных систем найден способ определения возможной конечной верхней границы максимального числа алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин. Это позволяет получить количественную оценку конечного максимального числа алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для этих систем.

Библиография - 27 наименований

№0007/2011

Октябрь 2011

Кишинев-2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. О проблеме центра и фокуса

Одной из старых проблем качественной теории дифференциальных уравнений является проблема центра и фокуса. Она появляется, например, в случае, когда корни характеристического уравнения особой точки для системы

$$\dot{x} = P(x, y), \ \dot{y} = Q(x, y) \tag{1}$$

являются мнимыми, где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Указанная задача берет свое начало в работах А. Пуанкаре (1854–1912) и А. М. Ляпунова (1857–1918). Однако, к сожалению, удовлетворительные ответы получены лишь для некоторых частных случаев системы (1). Эта цель не достигнута даже в таком простом случае, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются полными многочленами третьей степени относительно x и y в (1).

В Республике Молдова проблема центра и фокуса исследуется с начала 60-х годов прошлого столетия в работах академика К. С. Сибирского (1928–1990) [1–3] и его учеников. С помощью основанного им метода алгебраических инвариантов для дифференциальных уравнений получены решения указаной проблемы для систем вида (1) с квадратичными и кубическими нелинейностями.

В настоящей работе предлагается новый подход к указанной проблеме, связанный с изучением ее комбинаторных и асимптотических аспектов с помощью производящих функций и рядов Гильберта. Это предоставляет возможность определить верхнюю границу числа алгебраически-независимых величин, принимающих участие в решение проблемы центра и фокуса для дифференциальных систем с однородными нелинейностями. В изложении этой идеи авторы использовали некоторые результаты работ [1–27], нисколько не претендуя на освещение самых содержательных моментов этих работ, а только тех, которые касаются исследуемого вопроса.

§2. О производящих функциях и рядах Гильберта

Отметим, что метод производящих функций является достаточно старым и насчитывает несколько сот лет. Он был использован в работах И. Ньютона (1642–1727), Д. Бернулли (1700–1782), Л. Эйлера (1707–1783), К. Гауса (1777–1855), Р. Римана (1826–1866), А. Кэли (1821–1895), Дж. Сильвестра (1814–1897), Д. Гильберта (1862–1943) и др. для доказательства неожиданных результатов.

Наверное, первым проявленим этого метода является формула бинома Ньютона, которая говорит, что число

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

является коэффициентом при t^k в многочлене $(1+t)^n$, т.е.

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

На современном языке можем сказать, что функция $(1+t)^n$ является *производящей фунцией* для чисел

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}.$$

Из этих соображений, такие числа называются еще и *биномиальными коэффициентами.*

Метод производящих функций в своей основе имеет очень простую идею. Некоторой последовательности действительных чисел $a_0, a_1, a_2, ...$ ставится в соответствие выражение вида

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...,$$

которое будем называть рядом, или *производящей фунцией*, этой последовательности. Эту функцию мы можем себе преставить как многочлен бесконечной степени. Такое выражение называется формальным степенным рядом, так как нас не интересует его сходимость.

Часто указанные ряды имеют простые формы, позволяющие сделать определенные выводы относительно последовательности $\{a_n\}_{n\geq 0}$, которые другим путем очень трудно получить.

Пусть V – векторное пространство, которое представимо в виде прямой суммы конечномерных подпространств

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n, \; V_n \bigcap_{(n\neq m)} V_m = \{0\}.$$

Такое разложение будем называть *градуировкой. Производящей функцией* для V, или последовательности $dim_{\mathbb{R}} V_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$, будем называть формальный ряд

$$\Phi_V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (dim_{\mathbb{R}} V_n) t^n. \tag{2}$$

Примечательный эффект для производящих функций состоит в том, что соотвествующий формальный ряд может сходится в некоторой окрестности нуля к некоторой конкретной функции. Таким образом, изучив ее свойства (например, полюса, нули) мы можем получить дополнительную информацию о структуре пространства V, в частности об асимптотическом поведении последовательности $\{dim_{\mathbb{R}} V_n\}_{n=0}^{\infty}$.

В случае, когда $V = A$ является градуированной алгеброй, то (2) называется рядом Гильберта для этой алгебры и обозначается через $H_A(t)$, который несет в себе содержательную информацию о характере асимптотического поведения алгебры A.

В изучении пространства V, или алгебры A, в некоторых случаях могут быть введены производящие функции, или ряды Гильберта, которые зависят от нескольких переменнных. Этот факт отражает более детальную градуировку этих обьектов. В результате эти функции получили соотвественно название *обобщеных* производящих функций и рядов Гильберта, а те которые имеют вид (2) называются *обычными*.

Проникновение производящих функций и рядов Гильберта в теорию двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем первого порядка имеет свое начало в работах [5,6].

§3. О центроаффиных (унимодулярных) комитантах и инвариантах на примере аффинной дифференциальной системы

Расмотрим аффинную дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_0(x,y) + P_1(x,y), \\ \dot{y} &= Q_0(x,y) + Q_1(x,y), \end{aligned} \tag{3}$$

где $P_0 = a, Q_0 = b, P_1 = cx + dy, Q_1 = ex + fy$. Система (3) в векторной записи имеет вид

$$\dot{X} = A + BX, \tag{4}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Рассмотрим также группу центроаффиных (унимодулярных) $GL(2,\mathbb{R})(SL(2,\mathbb{R}))$ преобразований

$$\overline{X} = qX,\ q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\Delta = detq \neq 0, q \in GL(2,\mathbb{R})(\Delta = detq = 1, q \in SL(2,\mathbb{R})). \tag{7}$$

В (4) – (6) все переменные и коэффициенты принимают значения из поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

Заметим, что преобразование (6) не меняет форму системы (4) и тогда получаем

$$\dot{\overline{X}} = \overline{A} + \overline{B}\ \overline{X}, \tag{8}$$

где

$$\dot{\overline{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\overline{x}} \\ \dot{\overline{y}} \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}, \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{c} & \overline{d} \\ \overline{e} & \overline{f} \end{pmatrix},$$

а

$$\begin{gathered} \overline{a} = \alpha a + \beta b,\ \overline{b} = \gamma a + \delta b, \\ \Delta\overline{c} = \delta(\alpha c + \beta e) - \gamma(\alpha d + \beta f), \\ \Delta\overline{d} = -\beta(\alpha c + \beta e) + \alpha(\alpha d + \beta f), \\ \Delta\overline{e} = \delta(\gamma c + \delta e) - \gamma(\gamma d + \delta f), \\ \Delta\overline{f} = -\beta(\gamma c + \delta e) + \alpha(\gamma d + \delta f). \end{gathered} \tag{9}$$

Определение 1. *Следуя* [3], *полином* $K(A, B, X)$ *от элементов матриц* A, B, X *назовем* <u>*центроаффинным*</u> <u>*комитантом*</u> *системы* (4), *или* (3), *если выполняется равенство*

$$K(\overline{A}, \overline{B}, \overline{X}) = \Delta^{-g} K(A, B, X) \tag{10}$$

для всех элементов матриц A, B, X *и любых* $q \in GL(2, \mathbb{R})$, *где* g *– некоторое целое число, называемое* <u>*весом*</u> <u>*комитанта*</u>.

Комитант, не зависящий от X, принято называть *инвариантом* системы (3), или (4).

Можно проверить, что центроаффинные комитанты и инварианты системы (3), или (4), однородные относительно элементов матриц A, B, X, являются унимодулярными комитантами этой системы и наоборот.

С помощью (5) – (6) и (8) – (10) легко убедится, что таковыми комитантами и инвариантами системы (3), или

(4), являются

$$\begin{gathered} i_1 = c + f \ (g = 0), \ i_2 = c^2 + 2de + f^2 \ (g = 0), \\ i_3 = -ea^2 + (c - f)ab + db^2 \ (g = -1), \\ k_1 = -bx + ay \ (g = -1), \\ k_2 = -ex^2 + (c - f)xy + dy^2 \ (g = -1), \\ k_3 = -(ea + fb)x + (ca + db)y \ (g = -1). \end{gathered} \tag{11}$$

Известно [5,6], что множество унимодулярных комитантов системы (3), или (4), образуют градуированную алгебру, которую обозначим через $S_{0,1}$, а алгебру унимодулярных инвариантов этой системы обозначим через $SI_{0,1}$.

§4. О градуированных алгебрах полиномиальных инвариантов и комитантов

Пусть A является градуированной коммутативной алгеброй инвариантных полиномов, т.е.

$$A = \bigoplus_{m=0}^{\infty} A_m, \quad A_m A_n \subseteq A_{m+n},$$

где $A_m (m = 0, 1, 2, ...)$ – конечномерные линейные пространства, которые содержат полиномы однородности m относительно своих переменных, а $A_0 = \mathbb{R}$.

Определение 2. *Элементы $a_1, a_2, ..., a_r$ алгебры A называются <u>алгебраически независимыми</u>, если для любого нетривиального многочлена F от r переменных имеет место неравенство*

$$F(a_1, a_2, ..., a_r) \neq 0.$$

Например, пусть задана градуированная алгебра $S_{0,1}$ из [5,6], состоящая из однородных инвариантных полиномов относительно унимодулярной группы $SL(2, \mathbb{R})$:

$$S_{0,1} =< i_1, i_2, i_3, k_1, k_2, k_3 | (i_1 k_1 - k_3)^2 + k_3^2 = i_2 k_1^2 + 2 i_3 k_2 >$$

для дифференциальной системы (3), где образующие $i_1, i_2, i_3, k_1, k_2, k_3$ из (11) формируют одно определяющее соотношение (сизигию) $(i_1k_1 - k_3)^2 + k_3^2 = i_2k_1^2 + 2i_3k_2$.

Можно показать, что любой нетривиальный многочлен от любых пяти из указанных образующих не может равняться нулю, тогда как от всех шести такое утверждение неверно. Это проверяется с помощью матрицы Якоби.

Определение 3. *Максимальное число алгебраически независимых элементов градуированной алгебры A называется <u>размерностью Крулля</u> алгебры A и ее будем обозначать через $\varrho_{(A)}$.*

Из сказанного выше в приведенном примере имеем

$$\varrho_{(S_{0,1})} = 5.$$

Пусть $H_A(t)$ является обычным рядом Гильберта для градуированнй алгебры A. Известен следующий результат (см., например, [16])

Теорема 1. *Размерность Крулля $\varrho_{(A)}$ для градуированной алгебры A равна максимальному порядку полюса обычного ряда Гильберта $H_A(t)$ в единице.*

Для вышеприведенного примера обычный ряд Гильберта для алгебры $S_{0,1}$ (см. [5,6]) имеет вид

$$H_{S_{0,1}}(t) = \frac{1 - t + t^2}{(1-t)^2(1-t^2)(1-t^3)^2},$$

откуда легко можно заметить, что максимальный порядок полюса в единице равен 5, т.е. $\varrho_{(S_{0,1})} = 5$.

Легко доказывется

Предложение 1. *Пусть $B-$градуированная подалгебра конечно-определенной градуированной алгебры A с размерностью Крулля $\varrho_{(A)}$. Тогда для размерности Крулля $\varrho_{(B)}$ алгебры B имеет место неравенство*

$$\varrho_{(B)} \leq \varrho_{(A)}. \tag{12}$$

Например, если в качестве A примем $S_{0,1}$, то в качестве B можно взять алгебру

$$SI_{0,1} =< i_1, i_2, i_3 >,$$

т.е. $SI_{0,1} \subset S_{0,1}$. Из [5,6] известно, что обычный ряд Гильберта для алгебры $SI_{0,1}$ имеет вид

$$H_{SI_{0,1}}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)},$$

откуда получаем $\varrho_{(SI_{0,1})} = 3$.

Ясно, что в предложении 1 разность $\varrho_{(A)} - \varrho_{(B)}$ может быть достаточно большой, хотя для алгебр $S_{0,1}$ и $SI_{0,1}$ имеем $\varrho_{(S_{0,1})} - \varrho_{(SI_{0,1})} = 5 - 3 = 2$. Поэтому, точное значение $\varrho_{(B)}$ может быть получено лишь из обычного ряда Гильберта $H_B(t)$ подалгебры B. Согласно теореме 1 в этом случае $\varrho_{(B)}$ равно максимальному порядку полюса $H_B(t)$ в единице.

Необходимо отметить, что даже зная обобщенные и обычные ряды Гильберта для алгебры A, построение обычного ряда Гильберта $H_B(t)$ подалгебры B не представляется возможным без какой-либо дополнительной информации.

Примечание A. *Рассмотрим временный выход из данной ситуации. Для этого прежде всего условимся, что <u>сравнение рядов</u> происходит <u>покоэффициентно</u>:*

$$\sum b_n t^n \leq \sum c_n t^n \Longleftrightarrow b_n \leq c_n; \forall n.$$

Предположем, что для $H_B(t)$ имеем

$$H_B(t) \leq H_C(t),$$

где B и C – произвольные градуированные коммутативные алгебры, и размерность Крулля алгебры C известна как $\varrho_{(C)}$. Тогда размерность Крулля алгебры B не больше $\varrho_{(C)}$, т.е. $\varrho_{(B)} \leq \varrho_{(C)}$.

Доказательство примечания A получается с помощью теоремы Мэколи из [9].

§5. О градуированном разложении пространства V_Γ

Рассмотрим двумерную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_{m_1}(x,y) + P_{m_2}(x,y) + \dots + P_{m_l}(x,y), \\ \dot{y} &= Q_{m_1}(x,y) + Q_{m_2}(x,y) + \dots + Q_{m_l}(x,y), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\Gamma = \{m_i\}_{i=1}^{l}$ – некоторое конечное множество целых различных неотрицательных чисел, а $P_{m_i}(x,y)$ и $Q_{m_i}(x,y)$ $(i = \overline{1,l})$ являются однородными полиномами степени m_i относительно фазовых переменных x, y. Коэффициенты и переменные из правых частей системы (13) принимают значения из поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

Так как множество Γ полностью определяет форму системы (13), то в дальнейшем, для того чтобы показать, к каким системам (13) относятся исследуемые обьекты, присвоим им букву Γ, а систему (13) обозначим через $s(\Gamma)$.

Примечание 1. *Заметим, что система* (3) *является частным случаем системы* (13), *когда* $\Gamma = \{0, 1\}$, *т.е.* $l = 2,\ m_1 = 0,\ m_2 = 1$, *и обозначим ее через* $s(0, 1)$.

Определение центроаффинного (унимодулярного) комитанта, или инварианта для системы (13), аналогично определению 1 этих обьектов, как для системы (3).

Обозначим, через $V_\Gamma^{(d)}$ множество унимодулярных комитантов системы (13) типа

$$(d) = (\delta, d_1, d_2, ..., d_l), \tag{14}$$

где δ является степенью однородности этих многочленов относительно переменных x, y, а d_i $(i = \overline{1,l})$ – степень их однородности относительно коэффициентов полиномов $P_{m_i}(x,y)$, $Q_{m_i}(x,y)$.

Можно проверить, что унимодулярные комитанты системы (13) типа (14) являются в одно и тоже время центроаффиными комитантами этой системы и наоборот (см. [5,6]).

Известно [5,6], *что множество* $V_\Gamma^{(d)}$ *для системы* (13) *при различных* (d) *образуют конечномерные линейные пространства.* Определив прямую сумму этих пространств, запишем

$$V_\Gamma = \bigoplus_{(d)} V_\Gamma^{(d)},\ V_\Gamma^{(d)} \bigcap V_\Gamma^{(l)} = \{0\} \tag{15}$$

и скажем, что имеем *градуированное разложение* пространства V_Γ. В [5,6] показано, что множество унимодулярных комитантов (инвариантов) системы (13) образует градуированную конечно-определенную коммутативную алгебру S_Γ (SI_Γ).

Если, например, выделим из (13) систему с квадратичными нелинейностями, обозначенную через $s(1,2)$ и записанную в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{cx + dy}_{P_1} + \underbrace{gx^2 + 2hxy + ky^2}_{P_2}, \\ \dot{y} &= \underbrace{ex + fy}_{Q_1} + \underbrace{lx^2 + 2mxy + ny^2}_{Q_2}, \end{aligned} \tag{16}$$

то однородный инвариант $I_1 = c+f$ принадлежит пространству $V_{1,2}^{(0,1,0)}$, а комитант $I_1^7 K_2 K_7 = (c+f)^7[-ex^2+(c-f)xy+ +dy^2][(g^2+2hl+m^2)x^2+2(gh+hm+kl+mn)xy+(h^2+2km+ +n^2)y^2]$ принадлежит пространству $V_{1,2}^{(4,8,2)}$, где $I_1,\ K_2,\ K_7$ взяты из [3].

§6. О центроаффинных комитантах и алгебрах Ли для системы (13)

Рассмотрим некоторые понятия из указанных областей на примере системы (16), которая является частным случаем системы (13).

Для удобства запишем систему (16) в тензорной записи (такая запись для системы (13) была введена академиком К.С. Сибирским [1] в 60-е годы прошлого века)

$$\dot{x}^j = a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta\ (j, \alpha, \beta = 1, 2), \tag{17}$$

где коэффициентный тензор $a^j_{\alpha\beta}$ симметричен по нижним индексам, по которым здесь производится полное свертывание.

Система (17) в развернутом виде запишется

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_{11}(x^1)^2 + 2a^1_{12}x^1x^2 + a^1_{22}(x^2)^2,\\
\dot{x}^2 &= a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_{11}(x^1)^2 + 2a^2_{12}x^1x^2 + a^2_{22}(x^2)^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Заметим, что если введем равенства

$$
\begin{aligned}
&x = x^1,\ c = a^1_1,\ d = a^1_2,\ g = a^1_{11},\ h = a^1_{12},\ k = a^1_{22},\\
&y = x^2,\ e = a^2_1,\ f = a^2_2,\ l = a^2_{11},\ m = a^2_{12},\ n = a^2_{22},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

то из (16) получаем систему (18) и наоборот.

Из теории инвариантов дифференциальных систем (13) (см., например, [4] и [17]), разность между числом нижних и верхних индексов со значением единица (двойка) будем называть *весом любой координаты коэффициента* a^j_α или $a^j_{\alpha\beta}$ относительно координаты x^1 (x^2).

Например:

1) вес a^1_2 относительно x^1 равен -1, а относительно x^2 равен 1;

2) вес a^1_1 относительно x^1 равен 0, а относительно x^2 равен 0;

3) вес a^2_1 относительно x^1 равен 1, а относительно x^2 равен -1;

4) вес a^1_{11} относительно x^1 равен 1, а относительно x^2 равен 0;

5) вес a^1_{12} относительно x^1 равен 0, а относительно x^2 равен 1 и т.д.

Если задан полином S, зависящий от коэффициентов системы (18) типа

$$(0, d_1, d_2), \tag{20}$$

т.е. однородный степени d_1 относительно координат тензора a^j_α и степени d_2 относительно координат тензора $a^j_{\alpha\beta}$, то вес каждого члена этого полинома относительно x^1 или x^2 равен

сумме весов каждого сомножителя относительно x^1 или x^2 соотвественно. Ноль в (20) указывает на то, что выражение S не содержит фазовых переменных x^1, x^2.
Например, моном $a^1_1 a^2_1 a^1_{22}$ имеет тип $(0, 2, 1)$ и имеет вес 0 относительно x^1 и вес 1 относительно x^2.

Если все члены полинома S типа (20) имеют вес h относительно x^1 и вес g относительно x^2, то скажем, что полином S имеет *изобарность веса* (h, g).

Свойство изобарности полиномов имеет большое значение в теории инвариантов. *Например*, если хотим проверить, может ли полином S от коэффициентов системы (18) быть коэффициентом в каком-то комитанте типа (δ, d_1, d_2) этой системы, то необходимо, чтобы S был изобарным определенного веса (h, g).

Известно, например из [3], что комитант K_{11} системы (18) имеет тип $(3, 1, 1)$ с выражением

$$K_{11} = A_0(x^1)^3 + A_1(x^1)^2 x^2 + A_2 x^1 (x^2)^2 + A_3 (x^3)^3, \qquad (21)$$

где

$$A_0 = -a^2_1 a^1_{11} - a^2_2 a^2_{11},\ A_1 = a^1_1 a^1_{11} + a^1_2 a^2_{11} - 2a^2_1 a^1_{12} - 2a^2_2 a^2_{12},$$
$$A_2 = 2a^1_1 a^1_{12} + 2a^1_2 a^2_{12} - a^2_1 a^1_{22} - a^2_2 a^2_{22},\ A_3 = a^1_1 a^1_{22} + a^1_2 a^2_{22}. \qquad (22)$$

Заметим, что в A_0 все члены изобарны веса $(2, -1)$, в A_1 – $(1, 0)$, в A_2 – $(0, 1)$ и в A_3 – $(-1, 2)$.

В любом комитанте коэффициент, находящийся при наивысшей степени x^1, принято называть *полуинвариантом*. В приведенном выше примере выражение A_0 из (22) является полуинвариантом комитанта K_{11} из (21).

В дальнейшем увидим, что полуинвариант в любом комитанте пользуется особым положением.

Отметим, что для полуинварианта *изобарного веса* (h, g) в любом комитанте, число g совпадает с *весом* данного комитанта (см. определение 1).

В дальнейшем нам понадобятся операторы алгебры Ли L_4, которые соотвествуют линейному представлению центроаффинной группы в пространстве коэффициентов и фазовых переменных системы (18) и которые имеют вид (см. [5,6])

$$\begin{aligned} X_1 &= x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + D_1,\ X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + D_2,\\ X_3 &= x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + D_3,\ X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + D_4, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_2} - a^2_1\frac{\partial}{\partial a^2_1} - a^1_{11}\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} + a^1_{22}\frac{\partial}{\partial a^1_{22}} - 2a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} - a^2_{12}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}},\\ D_2 &= a^2_1\frac{\partial}{\partial a^1_1} + (a^2_2 - a^1_1)\frac{\partial}{\partial a^1_2} - a^2_1\frac{\partial}{\partial a^2_2} + a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} + (a^2_{12} - a^1_{11})\frac{\partial}{\partial a^1_{12}} +\\ &+(a^2_{22} - 2a^1_{12})\frac{\partial}{\partial a^1_{22}} - a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} - 2a^2_{12}\frac{\partial}{\partial a^2_{22}},\\ D_3 &= -a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_1} + (a^1_1 - a^2_2)\frac{\partial}{\partial a^2_1} + a^1_2\frac{\partial}{\partial a^2_2} - 2a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^1_{11}} - a^1_{22}\frac{\partial}{\partial a^1_{12}} +\\ &+(a^1_{11} - 2a^2_{12})\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} + (a^1_{12} - a^2_{22})\frac{\partial}{\partial a^2_{12}} + a^1_{22}\frac{\partial}{\partial a^2_{22}},\\ D_4 &= -a^1_2\frac{\partial}{\partial a^1_2} + a^2_1\frac{\partial}{\partial a^2_1} - a^1_{12}\frac{\partial}{\partial a^1_{12}} - 2a^1_{22}\frac{\partial}{\partial a^1_{22}} + a^2_{11}\frac{\partial}{\partial a^2_{11}} - a^2_{22}\frac{\partial}{\partial a^2_{22}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Из [5,6] следует

Теорема 2. *Для того чтобы полином K от коэффициентов системы (18) и фазовых переменных x^1, x^2 являлся центроаффинным комитантом с весом g для этой системы необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям*

$$X_1(K) = X_4(K) = -gK,\ X_2(K) = X_3(K) = 0, \tag{25}$$

где $X_1, ..., X_4$ взяты из (23) *и* (24).

В [4] показано, что если S является полуинвариантом в комитанте K, то

$$K = S(x^1)^\delta - D_3(S)(x^1)^{\delta-1}x^2 + \frac{1}{2!}D_3^2(S)(x^1)^{\delta-2}(x^2)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^\delta}{\delta!}D_3^\delta(S)(x^2)^\delta, \tag{26}$$

где D_3 взят из (24).

Примечание 2. *С помощью равенства* (26) *можно увидеть, что комитанты* $K_1, K_2, ..., K_{\varrho(S_\Gamma)} \in S_\Gamma$ *для системы* (13) *являются алгебраически независимыми тогда и только тогда, когда являются алгебраически независимыми их полуинварианты.*

В изучении центроаффинных комитантов (инвариантов) системы (13) типа (14) согласно [5,6] используется формула

$$2g = \sum_{i=1}^{l} d_i(m_i - 1) - \delta, \tag{27}$$

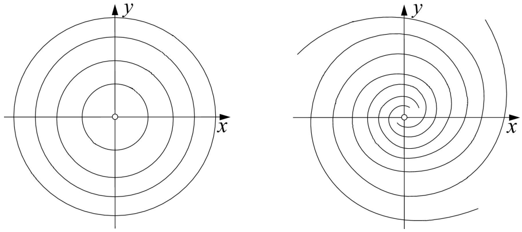
где g является весом соответствующего комитанта (инварианта).

§7. Постоянные G_k ($k = \overline{1,\infty}$), примыкающие к проблеме центра и фокуса, для системы $s(1,m)$, $m > 1$

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = y + P_m(x,y),\ \dot{y} = -x - Q_m(x,y), \tag{28}$$

где $P_m(x,y)$ и $Q_m(x,y)$ являются однородными полиномами степени m относительно x, y с коэффициентами в виде произвольных действительных постоянных. Из качественной теории этих уравнений известно, что система (28) имеет в начале координат *особую точку типа центр или фокус, т.е. траектории окружающие начало координат, ведут себя в соотвествие с одним из рисунков*



Проблема центра и фокуса для системы (28) может быть сформулирована следующим образом: для бесконечной системы многочленов

$$\{(x^2+y^2)^k\}_{k=1}^{\infty} \tag{29}$$

существует такая функция

$$U(x,y)=x^2+y^2+\sum_{k=3}^{\infty} f_k(x,y), \tag{30}$$

где $f_k(x,y)$ являются однородными многочленами степени k относительно x,y, и такие постоянные

$$L_1, L_2, L_3, ..., \tag{31}$$

что имеет место тождество

$$\frac{dU}{dt}=\sum_{k=2}^{\infty} L_{k-1}(x^2+y^2)^k \tag{32}$$

вдоль траекторий системы (28).

Постоянные $L_1, L_2, L_3, ...$ являются полиномами относительно коэффициентов системы (28) и называются *постоянными Ляпунова*, или *фокусными величинами* (в некоторых работах они называются еще *постоянными Пуанкаре–Ляпунова*).

Если все величины $L_k (k=\overline{1,\infty})$ равны нулю, то начало координат $O(0,0)$ для системы (28) является *центром*, в противном случае – *фокусом.* Очевидно, что число фокусных величин (31) для системы (28) бесконечно. Другими словами, проблема центра и фокуса состоит в том, чтобы для двухмерной дифференциальной системы установить конечное (желательно минимальное) число фокусных величин, которые отличают центр от фокуса для особой точки заданной системы. Очевидно, что указанное число фокусных величин изменяется от системы к системе. *Например*, согласно [18,19] для системы (28) с $m=2$ данное число равно (не больше[1]) 3, а при $m=3$ из [20,21] имеем число (не больше[1]) 5. Поэтому было бы полезно найти эффективный общий метод установления этих чисел для любой дифференциальной системы (13), или хотя бы (28). Отметим, однако, что такой метод известен и он имеет в основе нахождение явного вида фокусных величин, что довольно часто из-за непреодолимых вычислений приводит к неудовлетворительному результату.

Мы поставили себе цель в определении конечного (*по возможности минимального*) *числа алгебраически-независимых фокусных величин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для систем общего вида* (13) *с* $\Gamma=\{1,m\}$ $(m>1)$ *без вычисления явного вида указанных величин. В дальнейшем будет изложена эта точка зрения, которая по нешему мнению, тесно связана с размерностью Крулля некоторой градуированной алгебры комитантов заданной дифференциальной системы.*

Эта точка зрения будет проиллюстрирована на примере системы $s(1,2)$.

Как известно (см., например, [8]) в проблеме центра и фокуса вместо системы (29) можно взять любую систему многочленов

$$\{\varphi_{2k}(x,y)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{33}$$

[1] Для системы (29) с $m=2$ или $m=3$, но более частного вида, данные числа могут быть меньше указанных.

где φ_{2k} являются однородными многочленами степени $2k$ относительно x, y, удовлетворяющих определенным условиям. В соотвествии с этим, следуя предложениям авторов [22], для дифференциальной системы общего вида

$$\dot{x} = cx + dy + P_m(x, y), \ \dot{y} = ex + fy + Q_m(x, y) \ (m > 1) \tag{34}$$

в качестве системы (33) можно взять $\{K_2^k\}_{k=1}^{\infty}$, где комитант

$$K_2 = (cx + dy)y - (ex + fy)x \tag{35}$$

взят из [3]. Тогда в соответствии с постановкой проблемы центра и фокуса для функции

$$U = K_2 + \sum_{k=3}^{\infty} f_k(x, y) \tag{36}$$

требуем, чтобы она удовлетворяла тождеству

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=2}^{\infty} G_{k-1} K_2^k \tag{37}$$

вдоль траекторий системы (34).

Естественно, возникает вопрос: Почему для системы (34) был взят именно центроаффинный комитант K_2 из (35), а не другой полином?

Ответ следующий: Многочлен K_2 из (35) и множество $\{K_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ было взято в качестве системы полиномов (33), так как согласно [3] при

$$Discr(K_2) < 0, sp \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = c + f = 0 \tag{38}$$

функция K_2 действительным центроаффинным преобразованием может быть приведена к форме $x^2 + y^2$, а дифференциальная система (34) будет иметь вид (28), т.е. последняя система имеет в начале координат особую точку второй группы (центр или фокус).

Замечание 1. *Из этого ответа и выражения K_2 следует, что между фокусными величинами L_k $(k=\overline{1,\infty})$ и постоянными G_k $(k=\overline{1,\infty})$ существуют следующие равенства*:

$$L_k = G_k|_{f=-c|^{c=0}_{d=-e=1}} \quad (k=\overline{1,\infty}). \tag{39}$$

§8. Линейная система уравнений для постоянных G_k $(k=\overline{1,\infty})$ на примере системы $s(1,2)$

Рассмотрим систему $s(1,2)$, приведенную ранее в (16), которую запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + dy + gx^2 + 2hxy + ky^2 \equiv P(x,y), \\ \dot{y} &= ex + fy + lx^2 + 2mxy + ny^2 \equiv Q(x,y). \end{aligned} \tag{40}$$

Тогда для этой системы тождество (37) будет иметь вид

$$P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{k=2}^{\infty} G_{k-1}K_2^k. \tag{41}$$

Если U запишем в виде

$$\begin{gathered} U = K_2 + a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + b_0x^4 + 4b_1x^3y + \\ +6b_2x^2y^2 + 4b_3xy^3 + b_4y^4 + c_0x^5 + 5c_1x^4y + 10c_2x^3y^2 + \\ +10c_3x^2y^3 + 5c_4xy^4 + c_5y^5 + d_0x^6 + 6d_1x^5y + 15d_2x^4y^2 + \\ +20d_3x^3y^3 + 15d_4x^2y^4 + 6d_5xy^5 + d_6y^6 + e_0x^7 + 7e_1x^6y + \\ +21e_2x^5y^2 + 35e_3x^4y^3 + 21e_5x^2y^5 + 7e_6xy^6 + e_7y^7 + f_0x^8 + \\ +8f_1x^7y + 28f_2x^6y^2 + 56f_3x^5y^3 + 70f_4y^4 + 56f_5x^3y^5 + \\ +28f_6x^2y^6 + 8f_7xy^7 + f_8y^8 + ..., \end{gathered} \tag{42}$$

то тождество (41) расщепляется на следующие равенства:

$$\begin{aligned} &x^2: \ -2ce + e(c-f) = 0, \\ &xy: c(c-f) - 2de + f(c-f) + 2de = 0, \\ &y^2: d(c-f) + 2df = 0; \end{aligned} \tag{43}$$

$$
\begin{aligned}
x^3 &: 3ca_0 + 3ea_1 = 2eg - (c-f)l, \\
x^2y &: 3da_0 + 3(2c+f)a_1 + 6ea_2 = (f-c)(g+2m) - 2dl + 4eh, \\
xy^2 &: 6da_1 + 3(2f+c)a_2 + 3ea_3 = (f-c)(2h+n) + 2ek - 4dm, \\
y^3 &: 3da_2 + 3fa_3 = (f-c)k - 2dn;
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4 &: 4cb_0 + 4eb_1 - e^2G_1 = -3ga_0 - 3la_1, \\
x^3y &: 4db_0 + 4(f+3c)b_1 + 12eb_2 + 2e(c-f)G_1 = -6ha_0- \\
&\quad - 6(g+m)a_1 - 6la_2, \\
x^2y^2 &: 12db_1 + 12(c+f)b_2 + 12eb_3 + [2de - (c-f)^2]G_1 = \\
&\quad = -3ka_0 - 3(4h+n)a_1 - 3(g+4m)a_2 - 3la_3, \\
xy^3 &: 12bd_2 + 4(3f+c)b_3 + 4eb_4 + 2d(f-g)G_1 = -6ka_1- \\
&\quad - 6(h+n)a_2 - 6ma_3, \\
y^4 &: 4db_3 + 4fb_4 - d^2G_1 = -3ka_2 - 3na_3;
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
x^5 &: 5cc_0 + 5ec_1 = -4gb_0 - 4lb_1, \\
x^4y &: 5dc_0 + 5(4c+f)c_1 + 20ec_2 = -8hb_0 - 4(3g+2m)b_1- \\
&\quad - 12lb_2, \\
x^3y^2 &: 20dc_1 + 10(3c+2f)c_2 + 30ec_3 = -4kb_0 - 4(6h+n)b_1- \\
&\quad - 12(g+2m)b_2 - 12lb_3, \\
x^2y^3 &: 30dc_2 + 10(2c+3f)c_3 + 20ec_4 = -12kb_1 - 12(2h+ \\
&\quad + n)b_2 - 4(g+6m)b_3 - 4lb_4, \\
xy^4 &: 20dc_3 + 5(c+4f)c_4 + 5ec_5 = -12kb_2 - 4(2h+3n)b_3- \\
&\quad - 8mb_4, \\
y^5 &: 5dc_4 + 5fc_5 = -4kb_3 - 4nb_4;
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
x^6 &: 6cd_0 + 6ed_1 + e^3G_2 = -5gc_0 - 5lc_1, \\
x^5y &: 6dd_0 + 6(5c+f)d_1 + 30ed_2 + 3e^2(f-c)G_2 = -10hc_0- \\
&\quad - 10(2g+m)c_1 - 20lc_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4y^2 &: 30dd_1+30(2c+f)d_2+60ed_3+3e[(c-f)^2-de]G_2= \\
&= -5kc_0-5(8h+n)c_1-10(3g+4m)c_2-30lc_3, \\
x^3y^3 &: 60dd_2+60(c+f)d_3+60ed_4+(f-c)[(c-f)^2- \\
&- 6de]G_2=-20kc_1-20(3h+n)c_2-20(g+3m)c_3-20lc_4, \\
x^2y^4 &: 60dd_3+30(c+2f)d_4+30ed_5+3d[de-(c-f)^2]G_2= \\
&= -30kc_2-10(4h+3n)c_3-5(g+8m)c_4-5lc_5, \\
xy^5 &: 30dd_4+6(c+5f)d_5+6ed_6+3d^2(f-c)G_2=-20kc_3- \\
&- 10(h+2n)c_4-10mc_5, \\
y^6 &: 6dd_5+6fd_6-d^3G_2=-5kc_4-5nc_5;
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
x^7 &: 7ce_0+7ee_1=-6gd_0-6ld_1, \\
x^6y &: 7de_0+7(6c+f)e_1+42ee_2=-12hd_0-6(5g+2m)d_1- \\
&- 30ld_2, \\
x^5y^2 &: 42de_1+7(15c+6f)e_2+105ee_3=-6kd_0-6(10h+ \\
&+ n)d_1-60(g+m)d_2-60ld_3, \\
x^4y^3 &: 105de_2+5(28c+21f)e_3+140ee_4=-30kd_1-30(4h+ \\
&+ n)d_2-60(g+2m)d_3-60ld_4, \\
x^3y^4 &: 140de_3+35(3c+4f)e_4+105ee_5=-60kd_2-60(2h+ \\
&+ n)d_3-30(g+4m)d_4-30ld_5, \\
x^2y^5 &: 105de_4+7(6c+15f)e_5+42ee_6=-60kd_3-60(h+ \\
&+ n)d_4-6(g+10m)d_5-6ld_6, \\
xy^6 &: 42de_5+7(c+6f)e_6+7ee_7=-30kd_4-6(2h+5n)d_5- \\
&- 12md_6, \\
y^7 &: 7de_6+7fe_7=-6kd_5-6nd_6;
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
x^8 &: 8cf_0 + 8ef_1 - e^4 G_3 = -7ge_0 - 7le_1,\\
x^7y &: 8df_0 + 8(7c+f)f_1 + 56ef_2 + 4e^3(c-f)G_3 =\\
&= -14he_0 - 14(3g+m)e_1 - 42le_2,\\
x^6y^2 &: 56df_1 + 56(3c+f)f_2 + 168ef_3 + 2e^2[2de - 3(c-f)^2]G_3 =\\
&= -7ke_0 - 7(12h+n)e_1 - 21(5g+4m)e_2 - 105le_3,\\
x^5y^3 &: 168df_2 + 56(5c+3f)f_3 + 280ef_4 + 4e(f-c)[3de - (c-\\
&- f)^2]G_3 = -42ke_1 - 42(5h+n)e_2 - 70(2g+3m)e_3 - 140le_4,\\
x^4y^4 &: 280df_3 + 280(c+f)f_4 + 280ef_5 + [12de(c-f)^2 - 6d^2e^2-\\
&- (c-f)^4]G_3 = -105ke_2 - 35(8h+3n)e_3 - 35(3g+\\
&+ 8m)e_4 - 105le_5,\\
x^3y^5 &: 280df_4 + 56(3c+5f)f_5 + 168ef_6 + 4d(f-c)[(c-f)^2-\\
&- 3de]G_3 = -140ke_3 - 70(3h+2n)e_4 - 42(g+5m)e_5 - 42le_6,\\
x^2y^6 &: 168df_5 + 56(c+3f)f_6 + 56ef_7 + 2d^2[2de - 3(c-f)^2]G_3 = -\\
&- 105ke_4 - 21(4h+5n)e_5 - 7(g+12m)e_6 - 7le_7,\\
xy^7 &: 56df_6 + 8(c+7f)f_7 + 8ef_8 + 4d^3(f-c)G_3 = -42ke_5-\\
&- 14(h+3n)e_6 - 14me_7,\\
y^8 &: 78df_7 + 8ff_8 - d^4G_3 = -7ke_6 - 7ne_7.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Очевидно, что системы линейных уравнений (44)–(49) относительно $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, ..., b_4, c_0, c_1, ..., c_5, d_0, d_1, ..., d_6, e_0, e_1, ..., e_7, f_0, f_1, ..., f_8, ..., G_1, G_2, G_3, ...$ могут быть продолжены, присоединнением после последнего уравнения из (49) бесконечного числа уравнений, которые получаются вследствие равенства коэффициентов при $x^\alpha y^\beta$ при $\alpha + \beta > 8$ в тождестве (41).

§9. О решениях системы (43) – (49) и определении постоянных G_k

Проведем анализ указанных систем.

1) **Система (43).**

Очевидно, что из этой системы получаем равенства

$$e(c+f) = (c-f)(c+f) = d(c+f) = 0.$$

Эти равенства распадаются на две серии условий

$$
c+f=0, \quad \text{или} \quad c-f=d=e=0. \tag{50}
$$

Как было отмечено ранее, при выборе системы $\{K_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ с K_2 из (35) в случае проблемы центра и фокуса для системы (34) необходимо соблюдение условий (38). Отсюда следует, что из полученных двух серий условий (50), подходящим является лишь первое условие. Выражение в левой части этого условия обозначим через

$$
G_0 = c + f. \tag{51}
$$

Примечание 3. *Системы* (44)–(49) *и их продолжение будем исследовать без учета первого равенства* (50).

2) **Системы (44),(45) и определение постоянной $\mathbf{G_1}$.**
Эти системы содержат неизвестные $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, G_1$. Наша цель состоит в получении выражения G_1. Отметим, что в системе (44) число уравнений и неизвестных совпадает, а коэффициенты при a_0, a_1, a_2, a_3 являются линейными комбинациями от коэфициентов c, d, e, f, которые принадлежат линейной части системы $s(1,2)$ из (40). Следовательно, согласно правилу Крамера, неизвестные a_0, a_1, a_2, a_3 являются рациональными функциями от коэфициентов системы $s(1,2)$ из (40), имея в знаменателе многочлен, зависящий лишь от коэфициентов c, d, e, f линейной части системы $s(1,2)$ из (40).

Для более наглядного отражения процесса получения G_1 запишем системы (44),(45) в матричной форме

$$
A_1 B_1 = C_1, \tag{52}
$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3c & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3(2c+f) & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6d & 3(2c+f) & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3d & 3f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3l & 0 & 0 & 4c & 4e & 0 & 0 & 0 & -e^2 \\ 6h & 6(g+m) & 6l & 0 & 4d & 4(f+3c) & 12e & 0 & 0 & 2e(c-f) \\ 3k & 3(4h+n) & 3(g+4m) & 3l & 0 & 12d & 12(c+f) & 12e & 0 & 2de-(c-f)^2 \\ 0 & 6k & 6(h+n) & 6m & 0 & 0 & 12d & 4(3f+c) & 4l & 2d(f-c) \\ 0 & 0 & 3k & 3n & 0 & 0 & 0 & 4d & 4f & -d^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 2eg + (f-c)l \\ (f-c)(g+2m) - 2dl + 4eh \\ (f-c)(2h+n) + 3ek - 4dm \\ (f-c)k - 2dn \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Заметим, что элементы первых 9 столбцов матрицы A_1 из (53) являются линейными функциями от коэфициентов системы $s(1,2)$ из (40), а ненулевые элементы 10-го столбца (соответствующий в произведении (52) неизвестной G_1), имеют степень два относительно этих коэффициентов. Ненулевые элементы матрицы C_1 из (53), находящейся в правой части равенства (52), имеют степень два относительно коэффициентов системы $s(1,2)$ из (40). Так как система (52) состоит из 9-ти уравнений с 10-тью неизвестными, то одну из них можно посчитать свободной.

Так как число неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3 из подсистемы (44) совпадает с числом уравнений из этой подсистемы, то это нам позволяет найти их точное выражения. Следовательно, в качестве свободной неизвестной в системе (52) можно взять одну из переменных b_i при фиксированном $i = \overline{0,4}$. Таким образом, из системы уравнений (52) получаем

$$G_1 = \frac{G_{1,i} + B_{1,i} b_i}{\sigma_{1,i}} \tag{54}$$

при фиксированном i, равным $0, 1, 2, 3, 4$.

Нас интересует степень многочлена $G_{1,i}$ относительно коэффициентов системы $s(1,2)$ из (40). Очевидно, что указанная степень совпадает со степенью определителя Крамера Δ_{G_1}, который равен числу уравнений в системе (52) плюс единицы (так как степень ненулевых элементов в векторе из правой части новой системы, полученной из (52), и не содержащей b_i, равна двум). Следовательно, степень $G_{1,i}$ относительно коэффициентов системы $s(1,2)$ из (40) будет $degG_{1,i} = 10$ при всех $i = \overline{0,4}$. Принимая во внимание общую степень из (52),(53), получаем, что $G_{1,i}$ имеет тип $(0,8,2)$, т.е. $G_{1,i}$ является однородным полиномом степени 8 относительно коэффициентов линейной части и однородным степени 2 относительно коэффициентов квадратичной части системы $s(1,2)$ из (40). Ноль в $(0,8,2)$ указывает на то, что выражения $G_{1,i}$ не содержит фазовых переменных x, y.

Отметим, однако, что отдельно от этих результатов, полученных лишь исходя из анализа системы (52),(53), были проделаны также вычисления на компьютере и установлен явный вид полиномов $G_{1,i}, B_{1,i}, \sigma_{1,i}$ из (54) при каждом фиксированном $i = \overline{0,4}$ (см. *приложение* 1). Было установлено, что $G_{1,i}$ $(i = \overline{0,4})$ является многочленом от коэффициентов системы $s(1,2)$ из (40) с соответствующей изобарностью

$$(3,-1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (-1,3). \tag{55}$$

при $i = 0,1,2,3,4$ (см. §6 с учетом равенств (19)).

Заметим также, что $\sigma_{1,i}$ является многочленом лишь от коэффициентов линейной части c, d, e, f системы $s(1,2)$ из (40).

С помощью теоремы 2 и обозначений (19) установлено, что для полинома

$$f'_4(x,y) = G_{1,0}x^4 + 4G_{1,1}x^3y + 2G_{1,2}x^2y^2 + 4G_{1,3}xy^3 + G_{1,4}y^4 \tag{56}$$

имеют место равенства

$$X_1(f'_4) = X_4(f'_4) = f'_4,\ X_2(f'_4) = X_3(f'_4) = 0,$$

т.е. $f_4'(x,y)$ является центроаффинным комитантом веса -1 системы $s(1,2)$ из (40) и с учетом $(0,8,2)$ типа $(4,8,2)$. Заметим, что этот тип комитанта можно получить также с помощью фрмулы (27) для системы $s(1,2)$ из (40) с учетом типа полинома $G_{1,i}$ $(0,8,2)$ и (55).

Легко можно проверить на компьютере, что для каждого фиксированного $i=\overline{0,4}$ из (54) имеем

$$G_1|_{f=-c} = \frac{G_{1,i}+B_{1,i}b_i}{\sigma_{1,i}}|_{f=-c} = \frac{G'_{1,i}}{\sigma'_{1,i}}, \tag{57}$$

где

$$\begin{gathered} G'_{1,i} = 2c^2(-gh+mn)+cd(g^2-gm-hl-ln-2m^2)- \\ -ce(gk+2h^2+hn+km-n^2)+d^2l(g+m)+de(gh- \\ -mn)-e^2k(h+n),\ \sigma'_{1,i}=2(c^2+de)^2,\ (i=\overline{0,4}). \end{gathered} \tag{58}$$

Принимая во внимание равенства (39), из замечания 1 получаем, что справедлива

Лемма 1. *Первая фокусная величина системы* $s(1,2)$ *из* (40) *запишется в виде*

$$L_1 = G_1|_{f=-c}|^{c=0}_{d=-e=1} = \frac{G'_{1,i}}{\sigma'_{1,i}}|^{c=0}_{d=-e=1}\ (i=\overline{0,4}), \tag{59}$$

где

$$G'_{1,i}|^{c=0}_{d=-e=1} = g(l-h)-k(h+n)+m(l+n), \tag{60}$$

$$\sigma'_{1,i}|^{c=0}_{d=-e=1} = 2 \tag{61}$$

при всех $i=0,1,2,3,4$.

Примечание 4. *Первая фокусная величина* (59)–(61) *для системы* $s(1,2)$ *из* (40) *при* $f=-c$; $c=0,\ d=-e=1$ *совпадает с первой фокусной величиной* g_1 *для этой же системы, известной из монографии проф. А. П. Садовского* [7, с. 110].

3) **Системы (44) – (47) и определение постоянной $\mathbf{G_2}$.**

Система (44) – (47) состоит из 9-ти уравнений (44),(45) для вычисления G_1, к которым добавляется еще 13 уравнений, содержащих G_2. Записывая указанные уравнения в матричном виде (см. *приложение 2*) и проводя аналогичное рассуждения как в пункте 2) находим, что

$$G_2 = \frac{G_{2,i,j} + B_{2,i,j} b_i + D_{2,i,j} d_j}{\sigma_{2,i,j}}, \tag{62}$$

где при каждом фиксированным $i = \overline{0,4}$ и $j = \overline{0,6}$ получаем $deg G_{2,i,j} = 24$. Принимая во внимание эту степень из (44)–(47) находим, что $G_{2,i,j}$ имеет тип $(0, 20, 4)$, т.е. $G_{2,i,j}$ является однородным полиномом степени 20 относительно коэффициентов линейной части и однородным степени 4 относительно коэффициентов квадратичной части системы $s(1,2)$ из (40). Ноль в $(0, 20, 4)$ указывает на то, что выражение $G_{2,i,j}$ не содержит фазовых переменных x, y.

Вычисляя выражения $G_{2,i,j}$ при каждом $i = \overline{0,4}$ и $j = \overline{0,6}$, находим для их изобарностей (см. §6) следующую таблицу

$G_{2,i,j}$	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
b_0	(7,-3)	(6,-2)	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)
b_1	(6,-2)	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)
b_2	(5,-1)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)
b_3	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)	(-2,6)
b_4	(3,1)	(2,2)	(1,3)	(0,4)	(-1,5)	(-2,6)	(-3,7)

(63)

Заметим, что при $j = \overline{0,6}$ имеем

$$\frac{G_{2,0,j}}{\sigma_{2,0,j}}|_{f=-c}|_{c=0,d=-e=1} = \frac{1}{24}(38g^3h + 46gh^3 + 71g^2hk +$$
$$+46h^3k + 38ghk^2 + 5hk^3 - 38g^3l + 3gh^2l - 39g^2kl +$$
$$+53h^2kl - 15gk^2l - 32ghl^2 + 15hkl^2 - 5gl^3 + 29g^2hm +$$
$$+42ghkm + 13hk^2m - 79g^2lm - 54h^2lm - 68gklm -$$
$$-15k^2lm - 37hl^2m - 5l^3m + 6ghm^2 + 6hkm^2 - 39glm^2 -$$
$$-29klm^2 + 2lm^3 + 6g^3n + 109gh^2n + 48g^2kn + 159h^2kn +$$

$$+33gk^2n+5k^3n-34ghln+116hkln-57gl^2n+15kl^2n-$$
$$-48g^2mn-54h^2mn-14gkmn+8k^2mn-138hlmn-$$
$$-62l^2mn-37gm^2n-27km^2n+2m^3n+72ghn^2+$$
$$+175hkn^2-72gln^2+63kln^2-101hmn^2-119lmn^2-$$
$$-6gn^3+62kn^3-62mn^3), \tag{64}$$

$$\frac{G_{2,2,j}}{\sigma_{2,2,j}}|_{f=-c}|_{c=0,d=-e=1}=\frac{1}{24}(62g^3h-2gh^3+95g^2hk-2h^3k+$$
$$+38ghk^2+5hk^3-62g^3l+27gh^2l-39g^2kl+29h^2kl-15gk^2l-$$
$$-8ghl^2+15hkl^2-5gl^3+53g^2hm+66ghkm+13hk^2m-$$
$$-127g^2lm-6h^2lm-68gklm-15k^2lm-13hl^2m-5l^3m+$$
$$+6ghm^2+6hkm^2-63glm^2-29klm^2+2lm^3+6g^3n+61gh^2n+$$
$$+72g^2kn+63h^2kn+33gk^2n+5k^3n-10ghln+68hkln-$$
$$-33gl^2n+15kl^2n-72g^2mn-6h^2mn+10gkmn+8k^2mn-$$
$$-66hlmn-38l^2mn-61gm^2n-27km^2n+2m^3n+72ghn^2+$$
$$+127hkn^2-72gln^2+39kln^2-53hmn^2-95lmn^2-6gn^3+$$
$$+62kn^3-62mn^3), \tag{65}$$

$$\frac{G_{2,4,j}}{\sigma_{2,4,j}}|_{f=-c}|_{c=0,d=-e=1}=\frac{1}{24}(62g^3h-2gh^3+119g^2hk-2h^3k+$$
$$+62ghk^2+5hk^3-62g^3l+27gh^2l-63g^2kl+29h^2kl-$$
$$-15gk^2l-8ghl^2+15hkl^2-5gl^3+101g^2hm+138ghkm+$$
$$+37hk^2m-175g^2lm-6h^2lm-116gklm-15k^2lm-$$
$$-13hl^2m-5l^3m+54ghm^2+54hkm^2-159glm^2-53klm^2-$$
$$-46lm^3+6g^3n+37gh^2n+72g^2kn+39h^2kn+57gk^2n+$$
$$+5k^3n+14ghln+68hkln-33gl^2n+15kl^2n-72g^2mn-$$
$$-6h^2mn+34gkmn+32k^2mn-42hlmn-38l^2mn-109gm^2n-$$

$$-3km^2n - 46m^3n + 48ghn^2 + 79hkn^2 - 48gln^2 + \quad (66)$$
$$+39kln^2 - 29hmn^2 - 71lmn^2 - 6gn^3 + 38kn^3 - 38mn^3)$$

а $\frac{G_{2,1,j}}{\sigma_{2,1,j}}$ и $\frac{G_{2,3,j}}{\sigma_{2,3,j}}$ при $f = -c; c = 0, d = -e = 1$ дают неопределенность.

Примечание 5. *Вторая фокусная величина g_2 приведенная в монографии проф. А. П. Садовского* [7, с. 110], *для системы* $s(1,2)$ *из* (40) *при* $f = -c;\ c = 0,\ d = -e = 1$ *совпадает с выражением* (65).

Из множества $G_{2,2,j}$ выберем в качестве полуинварианта выражение $G_{2,2,0}$, которое согласно (63) имеет вес -1. Отсюда с помощью (27) и (63) находим, что комитант, соответствующий постоянной G_2, принадлежит к типу $(6, 20, 4)$.

4) **Системы (44) – (49) и определение постоянной $\mathbf{G_3}$**.

Записав указанную систему в матричной форме при фиксированных $i = \overline{0,4},\ j = \overline{0,6},\ k = \overline{0,8}$, получаем

$$G_3 = \frac{G_{3,i,j,k} + B_{3,i,j,k}b_i + D_{3,i,j,k}d_j + F_{3,i,j,k}f_k}{\sigma_{3,i,j,k}}, \quad (67)$$

а также вибирая комитант веса -1 системы $s(1,2)$ из (40), содержащий в качестве полуинварианта $G_{3,i,j,k}$, находим, что он принадлежит к типу $(8, 37, 6)$.

5) Рассмотрим продолжение системы (44)–(49), содержащей G_k и получающейся из тождества (41). Обозначим через m_{G_k} число уравнений в этой системе, а через n_{G_k} число неизвестных переменных в ней. Заметим, что эти числа запишутся в виде

$$m_{G_k} = \underbrace{4+5}_{G_1} + \underbrace{6+7}_{G_2} + \underbrace{8+9}_{G_3} + \cdots + \underbrace{(2k+2)+(2k+3)}_{G_k},$$
$$n_{G_k} = \underbrace{4+6}_{G_1} + \underbrace{6+8}_{G_2} + \underbrace{8+10}_{G_3} + \cdots + \underbrace{(2k+2)+(2k+4)}_{G_k},$$

при $k = 1, 2, 3, ...$ Отсюда получаем

$$m_{G_k} = k(2k + 7), \tag{68}$$

а

$$n_{G_k} = m_{G_k} + k.$$

Аналогично предыдущим случаям из этой системы имеем

$$G_k = \frac{G_{k,i_1,i_2,...,i_k} + B_{k,i_1,i_2,...,i_k} b_{i_1} + \cdots + Z_{k,i_1,i_2,...,i_k} z_{i_k}}{\sigma_{k,i_1,i_2,...,i_k}}, \tag{69}$$

Сейчас важно определить степень полинома $G_{k,i_1,i_2,...,i_k}$ относительно коэффициентов дифференциальной системы (40).

Заметим, что степень ненулевого полиномиального коэффициента при G_i $(i = \overline{1,k})$ относительно коэффициентов системы (40) в определителе Крамера порядка m_{G_k}, когда коэффициенты при G_k заменяются свободными членами указанной системы, составляет следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1, & G_2, & G_3, & ..., & G_{k-1}, & G_k. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & & k & 2 \end{array}$$

Тогда степень полинома $G_{k,i_1,i_2,...,i_k}$ относительно коэффициентов системы (40), обозначенной через N_{G_k}, запишется в виде

$$N_{G_k} = m_{G_k} - k + \frac{k(k+1)}{2} + 1,$$

откуда с учетом (68) получаем

$$N_{G_k} = \frac{1}{2}(5k^2 + 13k + 2). \tag{70}$$

Это и есть степень однородности $G_{k,i_1,i_2,...,i_k}$ относительно коэффициентов линейной и квадратичной части дифференциальной системы (40), содержащейся в полиноме типа

$$(d) = (\delta, d_1, d_2), \tag{71}$$

где δ – степень однородности полинома относительно x и y, d_1 – степень однородности полинома относительно коэффициентов линейной части, а d_2 – степень однородности полинома относительно коэффициентов квадратичной части системы $s(1,2)$ из (40). Так как $\delta = 2(k+1)$ а $d_2 = 2k$, то $d_1 = N_{G_k} - 2k$. Таким образом находим, что комитант веса -1 системы $s(1,2)$ из (40), содержащий в качестве полуинварианта $G_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}$ и соотвествующий константе G_k при $k = 1,2,3,\ldots$, принадлежит типу

$$\left(2(k+1), \frac{1}{2}(5k^2+9k+2), 2k\right), \tag{72}$$

где $2(k+1)$ – степень однородности комитанта относительно фазовых переменных x, y; $\frac{1}{2}(5k^2+9k+2)$ – степень однородности комитанта относительно коэффициентов линейной части c, d, e, f; $2k$ – степень однородности комитанта относительно коэффициентов квадратичной части системы $s(1,2)$ из (40).

В дальнейшем выражения $G_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}$, соотвествующие константе $G_k (k = 1,2,3,\ldots)$, будем называть *фокусными псевдовеличинами*, а комитанты типа (72) при $k = 1,2,3,\ldots$ будем называть *комитантами, содержащими в качестве коэффициентов псевдовеличины* $G_{k,i_1,i_2,\ldots,i_k}$. G_0 из (51) будем называть *нулевой фокусной псевдовеличиной* типа $(0,1,0)$.

§10. О максимальном числе алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин для системы $s(1,2)$ из (40)

Из §5 следует, что линейные пространства комитантов $V_{1,2}^{(d)}$ для дифференциальной системы $s(1,2)$ из (40) при всех (d) из (71) являются конечномерными. Выражение (d) из (71) будем называть типом пространства $V_{1,2}^{(d)}$. Определив прямую сумму таких пространств, запишем

$$V_{1,2} = \bigoplus_{(d)} V_{1,2}^{(d)},\ V_{1,2}^{(d)} \bigcap V_{1,2}^{(l)} = \{0\}. \tag{73}$$

Скажем, что в (73) задано *градуированное разложение* пространства $V_{1,2}$.

С учетом (72) пространство (73) более наглядно запишется в виде

$$V_{1,2} = V_{1,2}^{(0,0,0)} \bigoplus V_{1,2}^{(0,1,0)} \bigoplus_{k=1}^{\infty} V_{1,2}^{(2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2),2k)}, \qquad (74)$$

где $V_{1,2}^{(0,0,0)} = \mathbb{R}$.

Обобщенная производящая функция для пространства (74) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\Phi(V_{1,2},u,b,c) = dim_{\mathbb{R}} V_{1,2}^{(0,0,0)} + dim_{\mathbb{R}} V_{1,2}^{(0,1,0)} b + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} dim_{\mathbb{R}} V_{1,2}^{(2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2),2k)} u^{2(k+1)} b^{\frac{1}{2}(5k^2+9k+2)} c^{2k},\end{gathered} \qquad (75)$$

где $dim_{\mathbb{R}} V_{1,2}^{(0,0,0)} = 1$.

В дальнейшем будет использоваться вытекающая из [5,6]

Теорема 3. *Размерность линейного пространства центроаффинных комитантов типа* $(d) = (\delta, d_1, d_2)$ *для системы* $s(1,2)$ *из* (40), *обозначенной через* $dim_{\mathbb{R}} V_{1,2}^{(d)}$, *равняется коэффициенту при мономе* $u^{\delta} b^{d_1} c^{d_2}$ *в разложении обобщенного ряда Гильберта для алгебры* $S_{1,2}$ *унимодулярных комитантов указанной системы, который имеет вид*

$$H(S_{1,2},u,b,c) = \frac{N_{1,2}(u,b,c)}{D_{1,2}(u,b,c)}, \qquad (76)$$

где

$$D_{1,2}(u,b,c) = (1-b)(1-b^2)(1-c^2)(1-c^4)^2(1-bc^2)^2\cdot$$
$$\cdot(1-b^3c^2)(1-u^2b)(1-uc)^2(1-u^3c),$$
$$N_{1,2}(u,b,c) = 1-c^2+c^4+b(c^2+2c^4-2c^6)+b^2(c^2+c^4-$$
$$-c^6-c^8)+b^3(2c^4-2c^6-c^8)+b^4(-c^6+c^8-c^{10})+u[-c+$$
$$+3c^3-2c^5+b(2c-5c^5+3c^7)+b^2(c-2c^5+c^9)+b^3(c^3-$$
$$-3c^5+2c^7)+b^4(c^7-3c^9+2c^{11})]+u^2[2c^2-3c^4+c^6+$$
$$+b(-3c^4+4c^6-2c^8)+b^2(-2c^4+c^{10})+b^3(c^2-3c^4+2c^{10})+$$
$$+b^4(-2c^4+2c^6-c^8+3c^{10}-c^{12})+b^5(c^6-c^8+c^{10})]+$$
$$+u^3[-c^3+c^5-c^7+b(c-3c^3+c^5-2c^7+2c^9)+b^2(-2c^3+$$
$$+2c^9-c^{11})+b^3(-c^3+2c^9)+b^4(2c^5-4c^7+3c^9)+b^5(-c^7+$$
$$+3c^9-2c^{11})]+u^4[b(-2c^2+3c^4-c^6)+b^2(-2c^6+3c^8-c^{10})+$$
$$+b^3(-c^4+2c^8-c^{12})+b^4(-3c^6+5c^8-2c^{12})+b^5(2c^8-$$
$$-3c^{10}+c^{12})]+u^5[b(c^3-c^5+c^7)+b^2(c^5+2c^7-2c^9)+b^3(c^5+$$
$$+c^7-c^9-c^{11})+b^4(2c^7-2c^9-c^{11})+b^5(-c^9+c^{11}-c^{13})].$$
$$(77)$$

Разложив на компьютере выражения (76),(77) в степенной ряд получаем, что для (75) имеем представление

$$\Phi(V_{1,2},u,b,c) = 1+b+68u^4b^8c^2+988u^6b^{20}c^4+6685u^8b^{37}c^6+$$
$$+29801u^{10}b^{59}c^8+101863u^{12}b^{86}c^{10}+289388u^{14}b^{118}c^{12}+$$
$$+717378u^{16}b^{155}c^{14}+1601520u^{18}b^{197}c^{16}+3290576u^{20}b^{244}c^{18}+$$
$$+6320516u^{22}b^{296}c^{20}+11481322u^{24}b^{353}c^{22}+19898098u^{26}b^{415}c^{24}+$$
$$+33128489u^{28}b^{482}c^{26}+53276896u^{30}b^{554}c^{28}+83126869u^{32}b^{631}c^{30}+$$
$$+126294132u^{34}b^{713}c^{32}+187400820u^{36}b^{800}c^{34}+$$
$$+272272154u^{38}b^{892}c^{36}+388157672u^{40}b^{989}c^{38}+$$
$$+543977539u^{42}b^{1091}c^{40}+\cdots$$
$$+A_{2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2),2k}u^{2(k+1)}b^{\frac{1}{2}(5k^2+9k+2)}c^{2k}+\cdots,$$
$$(78)$$

где $A_{2(k+1),\frac{1}{2}(5k^2+9k+2),2k}$ коэффициент общего члена указанной функций, не поддающийся пока вычислению.

Рассмотрим алгебру $S'_{1,2}$, порожденую пространством $V_{1,2}$, из (73), которую запишем в виде

$$S'_{1,2} = \bigoplus_{(d)} S_{1,2}^{(d')}, \tag{79}$$

где через $S_{1,2}^{(d')}$ обозначены линейные пространства, содержащиеся в $V_{1,2}$ при всех (d), а также их всевозможные произведения.

Так как алгебра $S'_{1,2}$ является градуированной подалгеброй конечно-определенной алгебры $S_{1,2}$, то согласно предложению 1 (§4) получаем $\varrho_{(S'_{1,2})} \le \varrho_{(S_{1,2})}$. С учетом этого неравенства и того, что из [5,6] имеем $\varrho_{(S_{1,2})} = 9$, то согласно определению 3 (§4) получаем, что справедлива

Теорема 4. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин в проблеме центра и фокуса для системы* (40) *не превышает* 9.

С учетом равенств (39) подкрепленных равенствами (59)–(61), (65) и т.д. и очевидного заключения, что максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин L_k ($k = \overline{1,\infty}$) не может превышать максимального числа алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин $G_{k,i_1,i_2,\dots,i_k}$, с помощью теоремы 4 находим, что имеет место

Следствие 1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных величин принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для системы* (40) *при* $f = -c$; $c = 0$, $d = -e = 1$, *не превышает* 9.

Рассмотрим типы пространств $S_{1,2}^{(d')}$ при $d' = \delta' + d'_1 + d'_2 \le 60$, которые получаются из разложения в степенной ряд дроби

$$\frac{1}{(1-b)(1-u^4b^8c^2)(1-u^6b^{20}c^4)(1-u^8b^{37}c^6)}, \tag{80}$$

где $u^{\delta'}b^{d'_1}c^{d'_2}$ указывает тип пространства $S_{1,2}^{(d')}$ при $(d') = (\delta', d'_1, d'_2)$. С учетом этих типов и обобщеного ряда Гильберта (76)-(77) для алгебры $S_{1,2}$ можно записать разложение ряда Гильберта для алгебры $S'_{1,2}$ при $d' = \delta' + d'_1 + d'_2 \leq 60$, который имеет вид

$$H(S'_{1,2}, u, b, c) = 1 + b + 2b^2 + 2b^3 + 3b^4 + 3b^5 + 4b^6 + 4b^7 +$$
$$+5b^8 + 5b^9 + 6b^{10} + 6b^{11} + 7b^{12} + 7b^{13} + 8b^{14} + 8b^{15} + 9b^{16} +$$
$$+9b^{17} + 10b^{18} + 10b^{19} + 11b^{20} + 11b^{21} + 12b^{22} + 12b^{23} + 13b^{24} +$$
$$+13b^{25} + 14b^{26} + 14b^{27} + 15b^{28} + 15b^{29} + 16b^{30} + 16b^{31} + 17b^{32} +$$
$$+17b^{33} + 18b^{34} + 18b^{35} + 19b^{36} + 19b^{37} + 20b^{38} + 20b^{39} + 21b^{40} +$$
$$+21b^{41} + 22b^{42} + 22b^{43} + 23b^{44} + 23b^{45} + 24b^{46} + 24b^{47} + 25b^{48} +$$
$$+25b^{49} + 26b^{50} + 26b^{51} + 27b^{52} + 27b^{53} + 28b^{54} + 28b^{55} + 29b^{56} +$$
$$+29b^{57} + 30b^{58} + 30b^{59} + 31b^{60} + u^4(68b^8c^2 + 79b^9c^2 + 87b^{10}c^2 +$$
$$+98b^{11}c^2 + 106b^{12}c^2 + 117b^{13}c^2 + 125b^{14}c^2 + 136b^{15}c^2 +$$
$$+144b^{16}c^2 + 155b^{17}c^2 + 163b^{18}c^2 + 174b^{19}c^2 + 182b^{20}c^2 +$$
$$+193b^{21}c^2 + 201b^{22}c^2 + 212b^{23}c^2 + 220b^{24}c^2 + 231b^{25}c^2 +$$
$$+239b^{26}c^2 + 250b^{27}c^2 + 258b^{28}c^2 + 269b^{29}c^2 + 277b^{30}c^2 +$$
$$+288b^{31}c^2 + 296b^{32}c^2 + 307b^{33}c^2 + 315b^{34}c^2 + 326b^{35}c^2 +$$
$$+334b^{36}c^2 + 345b^{37}c^2 + 353b^{38}c^2 + 364b^{39}c^2 + 372b^{40}c^2 +$$
$$+383b^{41}c^2 + 391b^{42}c^2 + 402b^{43}c^2 + 410b^{44}c^2 +$$
$$+421b^{45}c^2 + 429b^{46}c^2 + 440b^{47}c^2 + 448b^{48}c^2 + 459b^{49}c^2 +$$
$$+467b^{50}c^2 + 478b^{51}c^2 + 486b^{52}c^2 + 497b^{53}c^2 +$$
$$+505b^{54}c^2) + u^6(988b^{20}c^4 + 1046b^{21}c^4u^6 + 1098b^{22}c^4 +$$
$$+1156b^{23}c^4 + 1208b^{24}c^4 + 1266b^{25}c^4 + 1318b^{26}c^4 +$$
$$+1376b^{27}c^4 + 1428b^{28}c^4 + 1486b^{29}c^4 + 1538b^{30}c^4 +$$
$$+1596b^{31}c^4 + 1648b^{32}c^4 + 1706b^{33}c^4 + 1758b^{34}c^4 +$$
$$+1816b^{35}c^4 + 1868b^{36}c^4 + 1926b^{37}c^4 + 1978b^{38}c^4 +$$
$$+2036b^{39}c^4 + 2088b^{40}c^4 + 2146b^{41}c^4 + 2198b^{42}c^4 +$$
$$+2256b^{43}c^4 + 2308b^{44}c^4 + 2366b^{45}c^4 + 2418b^{46}c^4 +$$
$$+2476b^{47}c^4 + 2528b^{48}c^4 + 2586b^{49}c^4 + 2638b^{50}c^4) +$$

$$+u^8(798b^{16}c^4+855b^{17}c^4u^8+918b^{18}c^4+975b^{19}c^4+$$
$$+1038b^{20}c^4+1095b^{21}c^4+1158b^{22}c^4+1215b^{23}c^4+$$
$$+1278b^{24}c^4+1335b^{25}c^4+1398b^{26}c^4+1455b^{27}c^4+$$
$$+1518b^{28}c^4+1575b^{29}c^4+1638b^{30}c^4+1695b^{31}c^4+$$
$$+1758b^{32}c^4+1815b^{33}c^4+1878b^{34}c^4+1935b^{35}c^4+$$
$$+1998b^{36}c^4+2055b^{37}c^4+2118b^{38}c^4+2175b^{39}c^4+$$
$$+2238b^{40}c^4+2295b^{41}c^4+2358b^{42}c^4+2415b^{43}c^4+$$
$$+2478b^{44}c^4+2535b^{45}c^4+2598b^{46}c^4+2655b^{47}c^4+$$
$$+2718b^{48}c^4+6685b^{37}c^6+6878b^{38}c^6+7081b^{39}c^6+$$
$$+7274b^{40}c^6+7477b^{41}c^6+7670b^{42}c^6+7873b^{43}c^6+$$
$$+8066b^{44}c^6+8269b^{45}c^6+8462b^{46}c^6)+u^{10}(5152b^{28}c^6+$$
$$+5361b^{29}c^6u^{10}+5580b^{30}c^6+5789b^{31}c^6+6008b^{32}c^6+$$
$$+6217b^{33}c^6+6436b^{34}c^6+6645b^{35}c^6+6864b^{36}c^6+$$
$$+7073b^{37}c^6+7292b^{38}c^6+7501b^{39}c^6+7720b^{40}c^6+$$
$$+7929b^{41}c^6+8148b^{42}c^6+8357b^{43}c^6+8576b^{44}c^6)+$$
$$+u^{12}(4294b^{24}c^6+4522b^{25}c^6u^{12}+4740b^{26}c^6+4968b^{27}c^6+$$
$$+5186b^{28}c^6+5414b^{29}c^6+5632b^{30}c^6+5860b^{31}c^6+$$
$$+6078b^{32}c^6+6306b^{33}c^6+6524b^{34}c^6+6752b^35c^6+$$
$$+6970b^{36}c^6+7198b^{37}c^6+7416b^{38}c^6+7644b^{39}c^6+$$
$$+7862b^{40}c^6+8090b^{41}c^6+8308b^{42}c^6+20412b^{40}c^8)+$$
$$+u^{14}(18369b^{36}c^8+18987b^{37}c^8+19590b^{38}c^8)+u^{16}(15835b^{32}c^8+$$
$$+16454b^{33}c^8+17088b^{34}c^8+17707b^{35}c^8+18341b^{36}c^8)+\cdots \tag{81}$$

Отсюда обычный ряд Гильберта для алгебры $S'_{1,2}$ будет иметь вид (первые 61 слагаемых):

$$H_{S'_{1,2}}(t)=H(S'_{1,2},t,t,t)=1+t+2t^2+2t^3+3t^4+3t^5+$$
$$+4t^6+4t^7+5t^8+5t^9+6t^{10}+6t^{11}+7t^{12}+7t^{13}+76t^{14}+$$
$$+87t^{15}+96t^{16}+107t^{17}+116t^{18}+127t^{19}+136t^{20}+147t^{21}+$$
$$+156t^{22}+167t^{23}+176t^{24}+187t^{25}+196t^{26}+207t^{27}+$$

$$+1014t^{28}+1082t^{29}+2142t^{30}+2268t^{31}+2392t^{32}+2518t^{33}+$$
$$+2642t^{34}+2768t^{35}+2892t^{36}+3018t^{37}+3142t^{38}+3268t^{39}+$$
$$+3392t^{40}+3518t^{41}+7936t^{42}+8290t^{43}+13784t^{44}+$$
$$+14347t^{45}+14908t^{46}+15471t^{47}+16032t^{48}+16595t^{49}+$$
$$+17156t^{50}+24404t^{51}+25158t^{52}+25924t^{53}+26678t^{54}+$$
$$+27444t^{55}+44033t^{56}+45418t^{57}+65175t^{58}+67178t^{59}+$$
$$+89581t^{60}+\cdots \tag{82}$$

Приведем первые 61 слагаемые в разложении ряда Гильберта для алгебры $SI_{1,2}$, который согласно [5,6] получается из (76),(77) следующим образом:

$$H_{SI_{1,2}}(t)=H(S_{1,2},0,t,t)=1+t+2t^2+5t^3+10t^4+17t^5+$$
$$+30t^6+50t^7+81t^8+125t^9+188t^{10}+276t^{11}+399t^{12}+559t^{13}+$$
$$+772t^{14}+1051t^{15}+1409t^{16}+1859t^{17}+2428t^{18}+3133t^{19}+$$
$$+4004t^{20}+5064t^{21}+6350t^{22}+7897t^{23}+9752t^{24}+11947t^{25}+$$
$$+14544t^{26}+17597t^{27}+21168t^{28}+25315t^{29}+30127t^{30}+$$
$$+35673t^{31}+42051t^{32}+49345t^{33}+57668t^{34}+67127t^{35}+$$
$$+77855t^{36}+89960t^{37}+103603t^{38}+118928t^{39}+136102t^{40}+$$
$$+155281t^{41}+176675t^{42}+200462t^{43}+226870t^{44}+256104t^{45}+$$
$$+288419t^{46}+324057t^{47}+363307t^{48}+406419t^{49}+453726t^{50}+$$
$$+505532t^{51}+562185t^{52}+624013t^{53}+691426t^{54}+764788t^{55}+$$
$$+844540t^{56}+931088t^{57}+1024916t^{58}+1126484t^{59}+$$
$$+1236327t^{60}+\cdots \tag{83}$$

Так как для рядов (82) и (83) имеем

$$H_{S'_{1,2}}(t)\leq H_{SI_{1,2}}(t),$$

то в предположении, что эти неравенства сохраняются и для остальных членов указанных рядов, получаем (см. примечание А), что выполняется неравенство

$$\varrho_{(S'_{1,2})} \leq \varrho_{(SI_{1,2})}.$$

Отметим, что $S'_{1,2}$ не является подалгеброй в $SI_{1,2}$.

Так как из [5,6] имеем $\varrho_{(SI_{1,2})} = 7$, то с помощью последнего неравенства находим, что справедливо

Предположение 1. *Максимальное число алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин (а следовательно, и фокусных величин) для системы* (40) $f = -c$; $c = 0$, $d = -e = 1$, *принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для указанной системы, не превышает* 7, *т.е прогнозируемая оценка названного числа не больше* 7.

Однако, с другой стороны, как легко проверить с помощью (82), находим, что для первых 61 слагаемых имеем

$$H_{S'_{1,2}}(t) < \frac{1}{(1-t)^5}.$$

Если предположить, что это верно для всех слагаемых $H_{S'_{1,2}}(t)$ и $(1-t)^{-5}$, то согласно примечянию А получим прогнозируемую оценку $\varrho_{(S'_{1,2})} < 5$.

Заключение

Целью настоящей работы было указать способ изучения градуированных алгебр $S'_{1,m}$, содержащих унимодулярные комитанты, имеющие в качестве коэффициентов фокусные псевдовеличины системы $s(1,m)$ из (34). Это позволяет с помощью ряда Гильберта $H_{S'_{1,m}}(t)$ для алгебры $S'_{1,m}$ получить *аргументированную конечную верхнию границу* максимального числа алгебраически–независимых фокусных псевдовеличин (а следовательно, и числа таких же фокусных величин) для систем вида (34) $f = -c$; $c = 0$, $d = -e = = 1$, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для этих систем. Важным шагом в этом вопросе было отсуствие надобности в получении явного вида указанных фокусных псевдовеличин, а также выражений фокусных величин, что связано с непреодолимыми громадными вычислениями. Нам понадобилось только знание типов однородностей фокусных псевдовеличин относительно коэффициентов рассматриваемой дифференциальной системы, что легко получается из системы линейных алгебраических уравнений, на которые распадается тождество (37) вдоль траекторий системы (34). Результаты, приведенные в этой работе для системы (34) при $m = 2$, что совпадает с системой (40), могуть быть распространены на любой системе (34) при $m > 2$, если для конечно–определенной алгебры унимодулярных комитантов $S_{1,m}$ известен ее обобщеный ряд Гильберта. С помощью этого ряда посредством обычного ряда Гильберта вычисляется размерность Крулля для алгебры $S_{1,m}$, котороя определяет конечную верхнюю границу максимального числа алгебраически–независимых фокусных псевдовеличин (а следовательно, и числа таких же фокусных величин) для системы (34), принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для этих систем. Однако, как показывает предположение 1 для системы $s(1,2)$, указанное число может быть намного меньше полученной границы. Поэтому указанная граница может быть существенно улучшена если найти сходящийся степенной ряд более точно аппроксимирующий обычный ряд Гильберта для градуированной алгебры унимодулярных комитантов $S'_{1,2}$, для которого может быть вычислен порядок полюса в единице. Конечно, идеальным вариантом было бы знание явного вида функции, к которой сходится обычный ряд Гильберта $H_{S'_{1,2}}(t)$, что позволило бы найти точную размерность Крулля для алгебры $S'_{1,2}$ и тем самым получить точную границу максимального числа алгебраически-независимых фокусных псевдовеличин, принимающих участие в решении проблемы центра и фокуса для системы $s(1,2)$. При всем этом указанные ранее числа в настоящей работе составляют важный теоретический результат в решении проблемы центра и фокуса для системы $s(1,m)$, о котором без использования алгебр $S_{1,m}$ и $S'_{1,m}$ невозможно было бы даже помышлять.

* *
*

Авторы выражают глубокую благодарность профессору В. А. Уфнаровскому (Лундский Университет, Швеция) за полезное обсуждение некоторых результатов из алгебры, которые нашли применение в настоящей работе. Все же недостатки – на совести авторов.

E-mail: popam@math.md

Литература

1. Сибирский К. С. *Метод инвариантов в качественной теории дифференциальных уравнений.* Кишинев, РИО АН МССР, 1968, 184 с.

2. Сибирский К. С. *Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.* Кишинев, Штиинца, 1976, 268 с.

3. Сибирский К. С. *Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1982, 168 с. (пер. на англ., Manchester University Press, Manchester, 1988).

4. Вулпе Н. И. *Полиномиальные базисы комитантов дифференциальных систем и их приложения в качественной теории.* Кишинев, Штиинца, 1986, 171 с.

5. Попа М. Н. *Приложения алгебр к дифференциальным системам.* Кишинев, ИМИ, АНМ, 2001, 224 с.

6. Popa M. N. *Applications of algebraic methods to differential systems.* Series in Applied and Industrial Mathematics of Univ. Piteşti, The Flower Power Ed., Piteşti, 2004, 340 p. (in Romanian).

7. Садовский А. П. *Полиномиальные идеалы и многообразия.* Минск, БГУ, 2008, 119 с.

8. Шубэ А. С. *Периодические движения и проблема различения центра и фокуса*, Дис. докт. хаб. физ.–мат. наук. Кишинев, 1999, 227 с.

9. Thomas Dubé. *Inductive Proof of Macaulay's Theorem.* Technical Report, No.455, Robotics Report No.202, June, 1989, New York University. Dep. of Computer Science. Courant Institute of Mathematical Sciences.

10. Уфнаровский В. А. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техники, 1990 Т. 57, Алгебра–6, 179 с.

11. Стэнли Р. *Перечислительная комбинаторика.* Москва, Мир, 1990, 140 с.

12. Ландо С. К. *Лекции о производящих функциях.* Москва, МЦНМО, 2004, 144 с.
13. Ландо С. К. *Дискретная математика*, 2008/2009 учебный год, 158 с. (можно найти бесплатно в интернете по адресу *http : //vyshka.math.ru/s09/09S_discrete.html*)
14. Nicolaescu L. I. *The methods of Generating functions*, 2007, 40 p., Departement of Mathematics, University of Notre Dame, USA (можно найти бесплатно в интернете по адресу *http : //www.nd.edu/ ∽ lnicolae/FunGen.pdf*) (in Romanian).
15. *Производящие функции* (можно найти бесплатно в интернете по адресу *http : //www.genfunc.ru/*)
16. Спрингер Т. А. *Теория инвариантов.* Новое в зарубежной науке, 1981, Т.24, Математика, Москва, Мир, 191 с.
17. Гуревич Г. Б. *Основы теории алгебраических инвариантов.* М.-Л., ГИТТЛ, 1948, 408 с.
18. Bautin N. N. *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type.* Mat. Sb., 1952, 30(72) 1952, 181-196; Amer. Math. Soc. Transl., 1954, 100, 397-413.
19. Dulac H. *Dedermination et integration d'une certaine classe d'equations differentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sciences Math. Ser., 1908, (2) 32(1), 230-252.
20. Sibirskii K. S. *On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point.* Differentsialnye Uravnenya, 1, 1965, 51-66 (in Russian).
21. Zolâdek H. *On certain generalization of the Bautin's theorem*, Nonlinearity, 1994, 7, 273-279.
22. Calin Iu., Baltag V. *The invariant center conditions for a class of cubic systems of differential equations.* The Conference „Mathematics and IT: Research and Education (MITRE–2009)“, Chişinău, October 8–9, 2009, Moldova State University, Abstracts, p. 6–8.

23. Popa M., Pricop V. *About Generating Function on the problem of center and focus.* Scientific Conference dedicated to the 80th anniversary of the foundation of the Tiraspol State University and of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Tehnologies „Actual Problems of Mathematics and Informatics“, Chişinău, September, 24–25, 2010, Communications, p. 126–127.
24. Popa M., Pricop V. *Combinatorial and asymptotic aspects to the Center-Focus Problem.* The 18th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM–2010, Abstracts, October 14–17, 2010, Iaşi, Romania, p. 74.
25. Popa M. N., Pricop V. V. *Applications of generating functions and Hilbert series to the center–focus problem.* The 8th International Algebraic Conference in UKRAINE, Lugansk Taras Shevcenko National University, July, 5–12, 2011, Lugansk, Ukraine, Abstracts, p.10.
26. Popa M. N., Pricop V. V. *About the maximal number of algebraically independent focal pseudo-quantities of the system s(1,3).* „Mathematics and IT: Research and Education (MITRE–2011)“, Chişinău, August, 22–25, 2011, Moldova State University, Abstracts, p.94.
27. Pricop V. V. *The differential system* $s(1,4)$ *and algebraically independent focal pseudo–quantities.* The 19th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM–2011, Abstracts, September, 22–25, 2011, Iaşi, Romania, p. 15–16.

Приложение 1
Полиномы, определяющие величину $\mathbf{G_1}$

Выражения фокусных псевдовеличин $G_{1,i}$, а также $\sigma_{1,i}$ и $B_{1,i}$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

$$
\begin{aligned}
&G_{1,0} = -17c^3d^2e^3g^2 + 11cd^3e^4g^2 + 34c^4de^2fg^2 - 118c^2d^2e^3fg^2+\\
&+15d^3e^4fg^2 - 17c^5ef^2g^2 + 215c^3de^2f^2g^2 - 200cd^2e^3f^2g^2-\\
&-108c^4ef^3g^2 + 403c^2de^2f^3g^2 - 91d^2e^3f^3g^2 - 224c^3ef^4g^2+\\
&+247cde^2f^4g^2 - 174c^2ef^5g^2 + 29de^2f^5g^2 - 47cef^6g^2 - 6ef^7g^2+\\
&+34c^2d^2e^4gh - 4d^3e^5gh - 92c^3de^3fgh + 152cd^2e^4fgh+\\
&+58c^4e^2f^2gh - 400c^2de^3f^2gh + 118d^2e^4f^2gh + 276c^3e^2f^3gh-\\
&-400cde^3f^3gh + 354c^2e^2f^4gh - 80de^3f^4gh + 152ce^2f^5gh+\\
&+24e^2f^6gh - 24cd^2e^5h^2 + 72c^2de^4fh^2 - 32d^2e^5fh^2 - 72c^3e^3f^2h^2+\\
&+132cde^4f^2h^2 - 172c^2e^3f^3h^2 + 44de^4f^3h^2 - 116ce^3f^4h^2-\\
&-24e^3f^5h^2 + 12c^3de^4gk - 12cd^2e^5gk - 12c^4e^3fgk + 72c^2de^4fgk-\\
&-16d^2e^5fgk - 72c^3e^3f^2gk + 102cde^4f^2gk - 122c^2e^3f^3gk+\\
&+34de^4f^3gk - 70ce^3f^4gk - 12e^3f^5gk - 12c^2de^5hk + 4d^2e^6hk+\\
&+36c^3e^4fhk - 52cde^5fhk + 120c^2e^4f^2hk - 32de^5f^2hk+\\
&+104ce^4f^3hk + 24e^4f^4hk - 6c^3e^5k^2 + 5cde^6k^2 - 23c^2e^5fk^2+\\
&+5de^6fk^2 - 23ce^5f^2k^2 - 6e^5f^3k^2 + 9c^4d^2e^2gl - 13c^2d^3e^3gl-\\
&-4d^4e^4gl - 18c^5defgl + 65c^3d^2e^2fgl - 16cd^3e^3fgl + 9c^6f^2gl-\\
&-103c^4def^2gl + 90c^2d^2e^2f^2gl - 11d^3e^3f^2gl + 51c^5f^3gl-\\
&-140c^3def^3gl + 7cd^2e^2f^3gl + 76c^4f^4gl + 26c^2def^4gl-\\
&-31d^2e^2f^4gl - 10c^3f^5gl + 110cdef^5gl - 79c^2f^6gl + 29def^6gl-\\
&-41cf^7gl - 6f^8gl - 12c^3d^2e^3hl + 26cd^3e^4hl + 48c^4de^2fhl-\\
&-122c^2d^2e^3fhl + 22d^3e^4fhl - 36c^5ef^2hl + 250c^3de^2f^2hl-\\
&-104cd^2e^3f^2hl - 166c^4ef^3hl + 248c^2de^2f^3hl - 2d^2e^3f^3hl-\\
&-190c^3ef^4hl + 40cde^2f^4hl - 38c^2ef^5hl - 10de^2f^5hl+\\
&+34cef^6hl + 12ef^7hl - 12c^4de^3kl + 11c^2d^2e^4kl + 12c^5e^2fkl-\\
&-70c^3de^3fkl + 16cd^2e^4fkl + 65c^4e^2f^2kl - 109c^2de^3f^2kl+\\
&+5d^2e^4f^2kl + 105c^3e^2f^3kl - 58cde^3f^3kl + 53c^2e^2f^4kl-\\
&-7de^3f^4kl - 5ce^2f^5kl - 6e^2f^6kl + 3c^3d^3e^2l^2 - 5cd^4e^3l^2-\\
&-6c^4d^2efl^2 + 20c^2d^3e^2fl^2 - 5d^4e^3fl^2 + 3c^5df^2l^2-\\
&-37c^3d^2ef^2l^2 + 26cd^3e^2f^2l^2 + 22c^4df^3l^2 - 73c^2d^2ef^3l^2+\\
&+9d^3e^2f^3l^2 + 58c^3df^4l^2 - 59cd^2ef^4l^2 + 68c^2df^5l^2 - 17d^2ef^5l^2+
\end{aligned}
$$

$$+35cdf^6l^2+6df^7l^2-12c^3d^2e^3gm+2cd^3e^4gm+24c^4de^2fgm-$$
$$-90c^2d^2e^3fgm-2d^3e^4fgm-12c^5ef^2gm+138c^3de^2f^2gm-$$
$$-152cd^2e^3f^2gm-62c^4ef^3gm+200c^2de^2f^3gm-82d^2e^3f^3gm-$$
$$-70c^3ef^4gm+32cde^2f^4gm+50c^2ef^5gm-58de^2f^5gm+$$
$$+82cef^6gm+12ef^7gm+20c^2d^2e^4hm-40c^3de^3fhm+$$
$$+96cd^2e^4fhm+44c^4e^2f^2hm-212c^2de^3f^2hm+76d^2e^4f^2hm+$$
$$+164c^3e^2f^3hm-152cde^3f^3hm+76c^2e^2f^4hm+20de^3f^4hm-$$
$$-68ce^2f^5hm-24e^2f^6hm+12c^3de^4km-6cd^2e^5km-24c^4e^3fkm+$$
$$+70c^2de^4fkm-10d^2e^5fkm-88c^3e^3f^2km+80cde^4f^2km-$$
$$-70c^2e^3f^3km+14de^4f^3km+10ce^3f^4km+12e^3f^5km+$$
$$+6c^4d^2e^2lm-4c^2d^3e^3lm-4d^4e^4lm-12c^5deflm+$$
$$+64c^3d^2e^2flm-28cd^3e^3flm+6c^6f^2lm-92c^4def^2lm+$$
$$+180c^2d^2e^2f^2lm-32d^3e^3f^2lm+32c^5f^3lm-212c^3def^3lm+$$
$$+148cd^2e^2f^3lm+40c^4f^4lm-168c^2def^4lm+22d^2e^2f^4lm-$$
$$-20c^3f^5lm-48cdef^5lm-46c^2f^6lm-12def^6lm-12cf^7lm-$$
$$-4c^3d^2e^3m^2+8c^4de^2fm^2-20c^2d^2e^3fm^2-8d^3e^4fm^2-4c^5ef^2m^2+$$
$$+64c^3de^2f^2m^2-48cd^2e^3f^2m^2-20c^4ef^3m^2+148c^2de^2f^3m^2-$$
$$-48d^2e^3f^3m^2-20c^3ef^4m^2+100cde^2f^4m^2+20c^2ef^5m^2+$$
$$+24cef^6m^2+31c^2d^2e^4gn-38c^3de^3fgn+96cd^2e^4fgn+$$
$$+13c^4e^2f^2gn-125c^2de^3f^2gn+65d^2e^4f^2gn+41c^3e^2f^3gn-$$
$$-58cde^3f^3gn-7c^2e^2f^4gn+29de^3f^4gn-41ce^2f^5gn-6e^2f^6gn-$$
$$-12c^3de^4hn-46cd^2e^5hn+78c^2de^4fhn-50d^2e^5fhn-$$
$$-56c^3e^3f^2hn+88cde^4f^2hn-38c^2e^3f^3hn-10de^4f^3hn+$$
$$+34ce^3f^4hn+12e^3f^5hn+6c^4e^4kn-17c^2de^5kn+4d^2e^6kn+$$
$$+29c^3e^4fkn-32cde^5fkn+28c^2e^4f^2kn-7de^5f^2kn-5ce^4f^3kn-$$
$$-6e^4f^4kn-22c^3d^2e^3ln+32cd^3e^4ln+32c^4de^2fln-$$
$$-134c^2d^2e^3fln+28d^3e^4fln-10c^5ef^2ln+148c^3de^2f^2ln-$$
$$-116cd^2e^3f^2ln-34c^4ef^3ln+126c^2de^2f^3ln-12d^2e^3f^3ln-$$
$$-2c^3ef^4ln+14cde^2f^4ln+34c^2ef^5ln+12cef^6ln+$$
$$+14c^2d^2e^4mn+4d^3e^5mn-52c^3de^3fmn+88cd^2e^4fmn+$$
$$+14c^4e^2f^2mn-204c^2de^3f^2mn+74d^2e^4f^2mn+40c^3e^2f^3mn-$$
$$-128cde^3f^3mn-18c^2e^2f^4mn+12de^3f^4mn-36ce^2f^5mn+$$
$$+6c^3de^4n^2-31cd^2e^5n^2+63c^2de^4fn^2-27d^2e^5fn^2-14c^3e^3f^2n^2+$$
$$+43cde^4f^2n^2+2c^2e^3f^3n^2-6de^4f^3n^2+12ce^3f^4n^2;$$

$$G_{1,1}=2c^4d^2e^2g^2+9c^2d^3e^3g^2-4c^5defg^2-14c^3d^2e^2fg^2+$$
$$+41cd^3e^3fg^2+2c^6f^2g^2-5c^4def^2g^2-102c^2d^2e^2f^2g^2+$$
$$+36d^3e^3f^2g^2+10c^5f^3g^2+57c^3def^3g^2-129cd^2e^2f^3g^2+$$
$$+10c^4f^4g^2+121c^2def^4g^2-35d^2e^2f^4g^2-10c^3f^5g^2+65cdef^5g^2-$$
$$-12c^2f^6g^2+6def^6g^2-22c^3d^2e^3gh-12cd^3e^4gh+56c^4de^2fgh-$$
$$-52c^2d^2e^3fgh-16d^3e^4fgh-34c^5ef^2gh+200c^3de^2f^2gh-$$
$$-2cd^2e^3f^2gh-160c^4ef^3gh+144c^2de^2f^3gh+28d^2e^3f^3gh-$$
$$-198c^3ef^4gh-24cde^2f^4gh-76c^2ef^5gh-12de^2f^5gh-$$
$$-12cef^6gh+24c^2d^2e^4h^2-72c^3de^3fh^2+32cd^2e^4fh^2+$$
$$+72c^4e^2f^2h^2-132c^2de^3f^2h^2+172c^3e^2f^3h^2-44cde^3f^3h^2+$$
$$+116c^2e^2f^4h^2+24ce^2f^5h^2-6c^4de^3gk+4c^2d^2e^4gk+$$
$$+6c^5e^2fgk-32c^3de^3fgk+40c^4e^2f^2gk-34c^2de^3f^2gk-$$
$$-8d^2e^4f^2gk+70c^3e^2f^3gk+6cde^3f^3gk+38c^2e^2f^4gk+$$
$$+6de^3f^4gk+6ce^2f^5gk+12c^3de^4hk-4cd^2e^5hk-36c^4e^3fhk+$$
$$+52c^2de^4fhk-120c^3e^3f^2hk+32cde^4f^2hk-104c^2e^3f^3hk-$$
$$-24ce^3f^4hk+6c^4e^4k^2-5c^2de^5k^2+23c^3e^4fk^2-5cde^5fk^2+$$
$$+23c^2e^4f^2k^2+6ce^4f^3k^2+c^3d^3e^2gl+4cd^4e^3gl+4c^4d^2efgl-$$
$$-4c^2d^3e^2fgl-5c^5df^2gl+8c^3d^2ef^2gl+23cd^3e^2f^2gl-$$
$$-14c^4df^3gl-53c^2d^2ef^3gl+20d^3e^2f^3gl+18c^3df^4gl-$$
$$-76cd^2ef^4gl+56c^2df^5gl-23d^2ef^5gl+35cdf^6gl+6df^7gl-$$
$$-10c^2d^3e^3hl-12c^5defhl+22c^3d^2e^2fhl-6cd^3e^3fhl+$$
$$+12c^6f^2hl-50c^4def^2hl-12c^2d^2e^2f^2hl+50c^5f^3hl+$$
$$+8c^3def^3hl-26cd^2e^2f^3hl+34c^4f^4hl+64c^2def^4hl-$$
$$-38c^3f^5hl+22cdef^5hl-46c^2f^6hl-12cf^7hl+6c^5de^2kl-$$
$$-3c^3d^2e^3kl-6c^6efkl+30c^4de^2fkl-33c^5ef^2kl+$$
$$+41c^3de^2f^2kl+3cd^2e^3f^2kl-53c^4ef^3kl+18c^2de^2f^3kl-$$
$$-21c^3ef^4kl+cde^2f^4kl+11c^2ef^5kl+6cef^6kl+c^2d^4e^2l^2+$$
$$+4c^3d^3efl^2-3cd^4e^2fl^2-5c^4d^2f^2l^2+24c^2d^3ef^2l^2-$$
$$-4d^4e^2f^2l^2-27c^3d^2f^3l^2+31cd^3ef^3l^2-45c^2d^2f^4l^2+$$
$$+11d^3ef^4l^2-29cd^2f^5l^2-6d^2f^6l^2+6c^4d^2e^2gm+6c^2d^3e^3gm-$$
$$-12c^5defgm+30c^3d^2e^2fgm+34cd^3e^3fgm+6c^6f^2gm-$$
$$-54c^4def^2gm+24d^3e^3f^2gm+30c^5f^3gm-40c^3def^3gm-$$
$$-18cd^2e^2f^3gm+30c^4f^4gm+24c^2def^4gm-2d^2e^2f^4gm-$$
$$-30c^3f^5gm+14cdef^5gm-36c^2f^6gm-12def^6gm-$$

$-20c^3d^2e^3hm+40c^4de^2fhm-96c^2d^2e^3fhm-44c^5ef^2hm+$
$+212c^3de^2f^2hm-76cd^2e^3f^2hm-164c^4ef^3hm+152c^2de^2f^3hm-$
$-76c^3ef^4hm-20cde^2f^4hm+68c^2ef^5hm+24cef^6hm-$
$-12c^4de^3km+6c^2d^2e^4km+24c^5e^2fkm-70c^3de^3fkm+$
$+10cd^2e^4fkm+88c^4e^2f^2km-80c^2de^3f^2km+70c^3e^2f^3km-$
$-14cde^3f^3km-10c^2e^2f^4km-12ce^2f^5km-4c^3d^3e^2lm+$
$+4cd^4e^3lm-4c^4d^2eflm-4c^2d^3e^2flm+8c^5df^2lm-$
$-28c^3d^2ef^2lm+8cd^3e^2f^2lm+52c^4df^3lm-48c^2d^2ef^3lm+$
$+112c^3df^4lm-20cd^2ef^4lm+92c^2df^5lm+24cdf^6lm+$
$+4c^4d^2e^2m^2-8c^5defm^2+20c^3d^2e^2fm^2+8cd^3e^3fm^2+4c^6f^2m^2-$
$-64c^4def^2m^2+48c^2d^2e^2f^2m^2+20c^5f^3m^2-148c^3def^3m^2+$
$+48cd^2e^2f^3m^2+20c^4f^4m^2-100c^2def^4m^2-20c^3f^5m^2-$
$-24c^2f^6m^2-19c^3d^2e^3gn-16cd^3e^4gn+20c^4de^2fgn-$
$-20c^2d^2e^3fgn-16d^3e^4fgn-7c^5ef^2gn+45c^3de^2f^2gn+$
$+3cd^2e^3f^2gn-21c^4ef^3gn+6c^2de^2f^3gn+4d^2e^3f^3gn+7c^3ef^4gn-$
$-13cde^2f^4gn+21c^2ef^5gn+6de^2f^5gn+12c^4de^3hn+46c^2d^2e^4hn-$
$-78c^3de^3fhn+50cd^2e^4fhn+56c^4e^2f^2hn-88c^2de^3f^2hn+$
$+38c^3e^2f^3hn+10cde^3f^3hn-34c^2e^2f^4hn-12ce^2f^5hn-6c^5e^3kn+$
$+17c^3de^4kn-4cd^2e^5kn-29c^4e^3fkn+32c^2de^4fkn-$
$-28c^3e^3f^2kn+7cde^4f^2kn+5c^2e^3f^3kn+6ce^3f^4kn+$
$+10c^4d^2e^2ln-16c^2d^3e^3ln-14c^5defln+58c^3d^2e^2fln-$
$-12cd^3e^3fln+4c^6f^2ln-68c^4def^2ln+48c^2d^2e^2f^2ln+$
$+14c^5f^3ln-74c^3def^3ln+8cd^2e^2f^3ln+2c^4f^4ln-30c^2def^4ln-$
$-14c^3f^5ln-6cdef^5ln-6c^2f^6ln-14c^3d^2e^3mn-4cd^3e^4mn+$
$+52c^4de^2fmn-88c^2d^2e^3fmn-14c^5ef^2mn+204c^3de^2f^2mn-$
$-74cd^2e^3f^2mn-40c^4ef^3mn+128c^2de^2f^3mn+18c^3ef^4mn-$
$-12cde^2f^4mn+36c^2ef^5mn-6c^4de^3n^2+31c^2d^2e^4n^2-$
$-63c^3de^3fn^2+27cd^2e^4fn^2+14c^4e^2f^2n^2-43c^2de^3f^2n^2-$
$-2c^3e^2f^3n^2+6cde^3f^3n^2-12c^2e^2f^4n^2;$

$G_{1,2}=-6c^3d^3e^2g^2-27cd^4e^3g^2+18c^4d^2efg^2+70c^2d^3e^2fg^2-$
$-31d^4e^3fg^2-12c^5df^2g^2-23c^3d^2ef^2g^2+175cd^3e^2f^2g^2-$
$-38c^4df^3g^2-206c^2d^2ef^3g^2+99d^3e^2f^3g^2+8c^3df^4g^2-$
$-195cd^2ef^4g^2+42c^2df^5g^2-18d^2ef^5g^2+12c^4d^2e^2gh+$

$+74c^2d^3e^3gh+4d^4e^4gh-36c^5defgh-194c^3d^2e^2fgh+$
$+52cd^3e^3fgh+24c^6f^2gh+106c^4def^2gh-378c^2d^2e^2f^2gh-$
$-30d^3e^3f^2gh+86c^5f^3gh+524c^3def^3gh-178cd^2e^2f^3gh+$
$+14c^4f^4gh+518c^2def^4gh-18d^2e^2f^4gh-94c^3f^5gh+$
$+120cdef^5gh-30c^2f^6gh-48c^3d^2e^3h^2-8cd^3e^4h^2+$
$+144c^4de^2fh^2+8c^2d^2e^3fh^2-168c^5ef^2h^2+140c^3de^2f^2h^2+$
$+68cd^2e^3f^2h^2-356c^4ef^3h^2-76c^2de^2f^3h^2+12d^2e^3f^3h^2-$
$-208c^3ef^4h^2-48cde^2f^4h^2-36c^2ef^5h^2+6c^5de^2gk-$
$-8c^3d^2e^3gk+12cd^3e^4gk-6c^6efgk+34c^4de^2fgk-$
$-44c^2d^2e^3fgk+16d^3e^4fgk-62c^5ef^2gk+70c^3de^2f^2gk-$
$-62cd^2e^3f^2gk-146c^4ef^3gk+58c^2de^2f^3gk-26d^2e^3f^3gk-$
$-120c^3ef^4gk+34cde^2f^4gk-44c^2ef^5gk+6de^2f^5gk-6cef^6gk-$
$-24c^4de^3hk+8c^2d^2e^4hk-4d^3e^5hk+96c^5e^2fhk-124c^3de^3fhk+$
$+24cd^2e^4fhk+332c^4e^2f^2hk-132c^2de^3f^2hk+16d^2e^4f^2hk+$
$+328c^3e^2f^3hk-56cde^3f^3hk+112c^2e^2f^4hk-12de^3f^4hk+$
$+12ce^2f^5hk-18c^5e^3k^2+21c^3de^4k^2-5cd^2e^5k^2-75c^4e^3fk^2+$
$+43c^2de^4fk^2-5d^2e^5fk^2-92c^3e^3f^2k^2+28cde^4f^2k^2-$
$-41c^2e^3f^3k^2+6de^4f^3k^2-6ce^3f^4k^2-6c^4d^3egl-7c^2d^4e^2gl+$
$+4d^5e^3gl+6c^5d^2fgl+2c^3d^3efgl-36cd^4e^2fgl+23c^4d^2f^2gl+$
$+81c^2d^3ef^2gl-29d^4e^2f^2gl-13c^3d^2f^3gl+142cd^3ef^3gl-$
$-113c^2d^2f^4gl+57d^3ef^4gl-93cd^2f^5gl-18d^2f^6gl+$
$+12c^5d^2ehl+14c^3d^3e^2hl-10cd^4e^3hl-12c^6dfhl+8c^4d^2efhl+$
$+74c^2d^3e^2fhl-6d^4e^3fhl-58c^5df^2hl-112c^3d^2ef^2hl+$
$+74cd^3e^2f^2hl-24c^4df^3hl-262c^2d^2ef^3hl+14d^3e^2f^3hl+$
$+194c^3df^4hl-166cd^2ef^4hl+224c^2df^5hl-24d^2ef^5hl+60cdf^6hl-$
$-6c^6dekl-c^4d^2e^2kl-3c^2d^3e^3kl+6c^7fkl-16c^5defkl-$
$-7c^3d^2e^2fkl+35c^6f^2kl-10c^4def^2kl+3d^3e^3f^2kl+56c^5f^3kl+$
$+7cd^2e^2f^3kl+10c^2def^4kl+d^2e^2f^4kl-56c^3f^5kl+16cdef^5kl-$
$-35c^2f^6kl+6def^6kl-6cf^7kl-6c^3d^4el^2+5cd^5e^2l^2+6c^4d^3fl^2-$
$-28c^2d^4efl^2+5d^5e^2fl^2+41c^3d^3f^2l^2-43cd^4ef^2l^2+92c^2d^3f^3l^2-$
$-21d^4ef^3l^2+75cd^3f^4l^2+18d^3f^5l^2-18c^3d^3e^2gm-18cd^4e^3gm+$
$+12c^4d^2efgm+2c^2d^3e^2fgm-14d^4e^3fgm-30c^5df^2gm+$
$+8c^3d^2ef^2gm+122cd^3e^2f^2gm-64c^4df^3gm-238c^2d^2ef^3gm+$
$+102d^3e^2f^3gm+130c^3df^4gm-186cd^2ef^4gm+156c^2df^5gm+$

$$+36d^2ef^5gm+24c^4d^2e^2hm+28c^2d^3e^3hm-24c^5defhm+$$
$$+28c^3d^2e^2fhm+72c^6f^2hm-152c^4def^2hm-28d^3e^3f^2hm+$$
$$+240c^5f^3hm-28cd^2e^2f^3hm+152c^2def^4hm-24d^2e^2f^4hm-$$
$$-240c^3f^5hm+24cdef^5hm-72c^2f^6hm+24c^5de^2km-$$
$$-14c^3d^2e^3km+6cd^3e^4km-60c^6efkm+166c^4de^2fkm-$$
$$-74c^2d^2e^3fkm+10d^3e^4fkm-224c^5ef^2km+262c^3de^2f^2km-$$
$$-74cd^2e^3f^2km-194c^4ef^3km+112c^2de^2f^3km-14d^2e^3f^3km+$$
$$+24c^3ef^4km-8cde^2f^4km+58c^2ef^5km-12de^2f^5km+$$
$$+12cef^6km+12c^4d^3elm-16c^2d^4e^2lm+4d^5e^3lm-$$
$$-12c^5d^2flm+56c^3d^3eflm-24cd^4e^2flm-112c^4d^2f^2lm+$$
$$+132c^2d^3ef^2lm-8d^4e^2f^2lm-328c^3d^2f^3lm+124cd^3ef^3lm-$$
$$-332c^2d^2f^4lm+24d^3ef^4lm-96cd^2f^5lm-12c^3d^3e^2m^2+$$
$$+48c^4d^2efm^2-68c^2d^3e^2fm^2+8d^4e^3fm^2+36c^5df^2m^2+$$
$$+76c^3d^2ef^2m^2-8cd^3e^2f^2m^2+208c^4df^3m^2-140c^2d^2ef^3m^2+$$
$$+48d^3e^2f^3m^2+356c^3df^4m^2-144cd^2ef^4m^2+168c^2df^5m^2+$$
$$+33c^4d^2e^2gn+49c^2d^3e^3gn-24c^5defgn-35c^3d^2e^2fgn+$$
$$+9c^6f^2gn-8c^4def^2gn-49d^3e^3f^2gn+30c^5f^3gn+$$
$$+35cd^2e^2f^3gn+8c^2def^4gn-33d^2e^2f^4gn-30c^3f^5gn+$$
$$+24cdef^5gn-9c^2f^6gn-36c^5de^2hn-102c^3d^2e^3hn+14cd^3e^4hn+$$
$$+186c^4de^2fhn-122c^2d^2e^3fhn+18d^3e^4fhn-156c^5ef^2hn+$$
$$+238c^3de^2f^2hn-2cd^2e^3f^2hn-130c^4ef^3hn-8c^2de^2f^3hn+$$
$$+18d^2e^3f^3hn+64c^3ef^4hn-12cde^2f^4hn+30c^2ef^5hn+$$
$$+18c^6e^2kn-57c^4de^3kn+29c^2d^2e^4kn-4d^3e^5kn+$$
$$+93c^5e^2fkn-142c^3de^3fkn+36cd^2e^4fkn+113c^4e^2f^2kn-$$
$$-81c^2de^3f^2kn+7d^2e^4f^2kn+13c^3e^2f^3kn-2cde^3f^3kn-$$
$$-23c^2e^2f^4kn+6de^3f^4kn-6ce^2f^5kn-6c^5d^2eln+26c^3d^3e^2ln-$$
$$-16cd^4e^3ln+6c^6dfln-34c^4d^2efln+62c^2d^3e^2fln-12d^4e^3fln+$$
$$+44c^5df^2ln-58c^3d^2ef^2ln+44cd^3e^2f^2ln+120c^4df^3ln-$$
$$-70c^2d^2ef^3ln+8d^3e^2f^3ln+146c^3df^4ln-34cd^2ef^4ln+$$
$$+62c^2df^5ln-6d^2ef^5ln+6cdf^6ln+18c^4d^2e^2mn+30c^2d^3e^3mn-$$
$$-4d^4e^4mn-120c^5defmn+178c^3d^2e^2fmn-52cd^3e^3fmn+$$
$$+30c^6f^2mn-518c^4def^2mn+378c^2d^2e^2f^2mn-74d^3e^3f^2mn+$$
$$+94c^5f^3mn-524c^3def^3mn+194cd^2e^2f^3mn-14c^4f^4mn-$$
$$-106c^2def^4mn-12d^2e^2f^4mn-86c^3f^5mn+36cdef^5mn-$$

$$-24c^2f^6mn + 18c^5de^2n^2 - 99c^3d^2e^3n^2 + 31cd^3e^4n^2 +$$
$$+195c^4de^2fn^2 - 175c^2d^2e^3fn^2 + 27d^3e^4fn^2 - 42c^5ef^2n^2 +$$
$$+206c^3de^2f^2n^2 - 70cd^2e^3f^2n^2 - 8c^4ef^3n^2 + 23c^2de^2f^3n^2 +$$
$$+6d^2e^3f^3n^2 + 38c^3ef^4n^2 - 18cde^2f^4n^2 + 12c^2ef^5n^2;$$

$$G_{1,3} = -6c^3d^3efg^2 - 27cd^4e^2fg^2 + 12c^4d^2f^2g^2 + 43c^2d^3ef^2g^2 -$$
$$-31d^4e^2f^2g^2 + 2c^3d^2f^3g^2 + 63cd^3ef^3g^2 - 14c^2d^2f^4g^2 + 6d^3ef^4g^2 +$$
$$+12c^4d^2efgh + 74c^2d^3e^2fgh + 4d^4e^3fgh - 36c^5df^2gh -$$
$$-128c^3d^2ef^2gh + 88cd^3e^2f^2gh - 18c^4df^3gh - 204c^2d^2ef^3gh +$$
$$+14d^3e^2f^3gh + 40c^3df^4gh - 52cd^2ef^4gh + 14c^2df^5gh -$$
$$-48c^3d^2e^2fh^2 - 8cd^3e^3fh^2 + 24c^6f^2h^2 + 100c^4def^2h^2 -$$
$$-48c^2d^2e^2f^2h^2 + 20c^5f^3h^2 + 148c^3def^3h^2 - 20cd^2e^2f^3h^2 -$$
$$-20c^4f^4h^2 + 64c^2def^4h^2 - 4d^2e^2f^4h^2 - 20c^3f^5h^2 + 8cdef^5h^2 -$$
$$-4c^2f^6h^2 + 6c^5defgk - 8c^3d^2e^2fgk + 12cd^3e^3fgk + 6c^6f^2gk +$$
$$+30c^4def^2gk - 48c^2d^2e^2f^2gk + 16d^3e^3f^2gk + 14c^5f^3gk +$$
$$+74c^3def^3gk - 58cd^2e^2f^3gk - 2c^4f^4gk + 68c^2def^4gk -$$
$$-10d^2e^2f^4gk - 14c^3f^5gk + 14cdef^5gk - 4c^2f^6gk - 24c^6efhk +$$
$$+20c^4de^2fhk - 8c^2d^2e^3fhk - 4d^3e^4fhk - 92c^5ef^2hk +$$
$$+48c^3de^2f^2hk + 4cd^2e^3f^2hk - 112c^4ef^3hk + 28c^2de^2f^3hk +$$
$$+4d^2e^3f^3hk - 52c^3ef^4hk + 4cde^2f^4hk - 8c^2ef^5hk + 6c^6e^2k^2 -$$
$$-11c^4de^3k^2 + 4c^2d^2e^4k^2 + 29c^5e^2fk^2 - 31c^3de^3fk^2 + 3cd^2e^4fk^2 +$$
$$+45c^4e^2f^2k^2 - 24c^2de^3f^2k^2 - d^2e^4f^2k^2 + 27c^3e^2f^3k^2 - 4cde^3f^3k^2 +$$
$$+5c^2e^2f^4k^2 - 6c^4d^3fgl - 7c^2d^4efgl + 4d^5e^2fgl - 5c^3d^3f^2gl -$$
$$-32cd^4ef^2gl + 28c^2d^3f^3gl - 17d^4ef^3gl + 29cd^3f^4gl + 6d^3f^5gl +$$
$$+12c^5d^2fhl + 14c^3d^3efhl - 10cd^4e^2fhl + 10c^4d^2f^2hl +$$
$$+80c^2d^3ef^2hl - 6d^4e^2f^2hl - 70c^3d^2f^3hl + 70cd^3ef^3hl -$$
$$-88c^2d^2f^4hl + 12d^3ef^4hl - 24cd^2f^5hl - 6c^6dfkl - c^4d^2efkl -$$
$$-3c^2d^3e^2fkl - 11c^5df^2kl - 18c^3d^2ef^2kl + 21c^4df^3kl - 41c^2d^2ef^3kl +$$
$$+3d^3e^2f^3kl + 53c^3df^4kl - 30cd^2ef^4kl + 33c^2df^5kl - 6d^2ef^5kl +$$
$$+6cdf^6kl - 6c^3d^4fl^2 + 5cd^5efl^2 - 23c^2d^4f^2l^2 + 5d^5ef^2l^2 -$$
$$-23cd^4f^3l^2 - 6d^4f^4l^2 + 12c^5d^2fgm - 10c^3d^3efgm - 50cd^4e^2fgm +$$
$$+34c^4d^2f^2gm + 88c^2d^3ef^2gm - 46d^4e^2f^2gm - 38c^3d^2f^3gm +$$
$$+78cd^3ef^3gm - 56c^2d^2f^4gm - 12d^3ef^4gm - 24c^6dfhm +$$

$+20c^4d^2efhm+76c^2d^3e^2fhm-68c^5df^2hm-152c^3d^2ef^2hm+$
$+96cd^3e^2f^2hm+76c^4df^3hm-212c^2d^2ef^3hm+20d^3e^2f^3hm+$
$+164c^3df^4hm-40cd^2ef^4hm+44c^2df^5hm+12c^7fkm-$
$-22c^5defkm+26c^3d^2e^2fkm+6cd^3e^3fkm+46c^6f^2km-$
$-64c^4def^2km+12c^2d^2e^2f^2km+10d^3e^3f^2km+38c^5f^3km-$
$-8c^3def^3km-22cd^2e^2f^3km-34c^4f^4km+50c^2def^4km-$
$-50c^3f^5km+12cdef^5km-12c^2f^6km+24c^4d^3flm-$
$-32c^2d^4eflm+4d^5e^2flm+104c^3d^3f^2lm-52cd^4ef^2lm+$
$+120c^2d^3f^3lm-12d^4ef^3lm+36cd^3f^4lm-24c^5d^2fm^2+$
$+44c^3d^3efm^2-32cd^4e^2fm^2-116c^4d^2f^2m^2+132c^2d^3ef^2m^2-$
$-24d^4e^2f^2m^2-172c^3d^2f^3m^2+72cd^3ef^3m^2-72c^2d^2f^4m^2-$
$-6c^5d^2egn-4c^3d^3e^2gn+16cd^4e^3gn+13c^4d^2efgn-3c^2d^3e^2fgn+$
$+16d^4e^3fgn-21c^5df^2gn-6c^3d^2ef^2gn+20cd^3e^2f^2gn-$
$-7c^4df^3gn-45c^2d^2ef^3gn+19d^3e^2f^3gn+21c^3df^4gn-$
$-20cd^2ef^4gn+7c^2df^5gn+12c^6dehn+2c^4d^2e^2hn-$
$-24c^2d^3e^3hn-14c^5defhn+18c^3d^2e^2fhn-34cd^3e^3fhn+$
$+36c^6f^2hn-24c^4def^2hn-6d^3e^3f^2hn+30c^5f^3hn+$
$+40c^3def^3hn-30cd^2e^2f^3hn-30c^4f^4hn+54c^2def^4hn-$
$-6d^2e^2f^4hn-30c^3f^5hn+12cdef^5hn-6c^2f^6hn-6c^7ekn+$
$+23c^5de^2kn-20c^3d^2e^3kn-35c^6efkn+76c^4de^2fkn-$
$-23c^2d^2e^3fkn-4d^3e^4fkn-56c^5ef^2kn+53c^3de^2f^2kn+$
$+4cd^2e^3f^2kn-18c^4ef^3kn-8c^2de^2f^3kn-d^2e^3f^3kn+14c^3ef^4kn-$
$-4cde^2f^4kn+5c^2ef^5kn-6c^4d^3eln+8c^2d^4e^2ln-6c^5d^2fln-$
$-6c^3d^3efln-38c^4d^2f^2ln+34c^2d^3ef^2ln-4d^4e^2f^2ln-$
$-70c^3d^2f^3ln+32cd^3ef^3ln-40c^2d^2f^4ln+6d^3ef^4ln-6cd^2f^5ln+$
$+12c^5d^2emn-28c^3d^3e^2mn+16cd^4e^3mn+12c^6dfmn+$
$+24c^4d^2efmn+2c^2d^3e^2fmn+12d^4e^3fmn+76c^5df^2mn-$
$-144c^3d^2ef^2mn+52cd^3e^2f^2mn+198c^4df^3mn-200c^2d^2ef^3mn+$
$+22d^3e^2f^3mn+160c^3df^4mn-56cd^2ef^4mn+34c^2df^5mn-$
$-6c^6den^2+35c^4d^2e^2n^2-36c^2d^3e^3n^2-65c^5defn^2+$
$+129c^3d^2e^2fn^2-41cd^3e^3fn^2+12c^6f^2n^2-121c^4def^2n^2+$
$+102c^2d^2e^2f^2n^2-9d^3e^3f^2n^2+10c^5f^3n^2-57c^3def^3n^2+$
$+14cd^2e^2f^3n^2-10c^4f^4n^2+5c^2def^4n^2-2d^2e^2f^4n^2-10c^3f^5n^2+$
$+4cdef^5n^2-2c^2f^6n^2;$

$$
\begin{aligned}
G_{1,4} = {} & 6c^3d^4eg^2 + 27cd^5e^2g^2 - 12c^4d^3fg^2 - 43c^2d^4efg^2 + \\
& +31d^5e^2fg^2 - 2c^3d^3f^2g^2 - 63cd^4ef^2g^2 + 14c^2d^3f^3g^2 - \\
& -6d^4ef^3g^2 - 12c^4d^3egh - 74c^2d^4e^2gh - 4d^5e^3gh + 36c^5d^2fgh + \\
& +128c^3d^3efgh - 88cd^4e^2fgh + 18c^4d^2f^2gh + 204c^2d^3ef^2gh - \\
& -14d^4e^2f^2gh - 40c^3d^2f^3gh + 52cd^3ef^3gh - 14c^2d^2f^4gh + \\
& +48c^3d^3e^2h^2 + 8cd^4e^3h^2 - 24c^6dfh^2 - 100c^4d^2efh^2 + \\
& +48c^2d^3e^2fh^2 - 20c^5df^2h^2 - 148c^3d^2ef^2h^2 + 20cd^3e^2f^2h^2 + \\
& +20c^4df^3h^2 - 64c^2d^2ef^3h^2 + 4d^3e^2f^3h^2 + 20c^3df^4h^2 - 8cd^2ef^4h^2 + \\
& +4c^2df^5h^2 + 12c^3d^3e^2gk - 28cd^4e^3gk - 12c^6dfgk - 14c^4d^2efgk + \\
& +116c^2d^3e^2fgk - 32d^4e^3fgk - 34c^5df^2gk - 126c^3d^2ef^2gk + \\
& +134cd^3e^2f^2gk + 2c^4df^3gk - 148c^2d^2ef^3gk + 22d^3e^2f^3gk + \\
& +34c^3df^4gk - 32cd^2ef^4gk + 10c^2df^5gk + 12c^6dehk - 22c^4d^2e^2hk + \\
& +32c^2d^3e^3hk + 4d^4e^4hk + 12c^7fhk + 48c^5defhk - 148c^3d^2e^2fhk + \\
& +28cd^3e^3fhk + 46c^6f^2hk + 168c^4def^2hk - 180c^2d^2e^2f^2hk + \\
& +4d^3e^3f^2hk + 20c^5f^3hk + 212c^3def^3hk - 64cd^2e^2f^3hk - \\
& -40c^4f^4hk + 92c^2def^4hk - 6d^2e^2f^4hk - 32c^3f^5hk + 12cdef^5hk - \\
& -6c^2f^6hk - 6c^7ek^2 + 17c^5de^2k^2 - 9c^3d^2e^3k^2 + 5cd^3e^4k^2 - \\
& -35c^6efk^2 + 59c^4de^2fk^2 - 26c^2d^2e^3fk^2 + 5d^3e^4fk^2 - \\
& -68c^5ef^2k^2 + 73c^3de^2f^2k^2 - 20cd^2e^3f^2k^2 - 58c^4ef^3k^2 + \\
& +37c^2de^2f^3k^2 - 3d^2e^3f^3k^2 - 22c^3ef^4k^2 + 6cde^2f^4k^2 - 3c^2ef^5k^2 + \\
& +6c^4d^4gl + 7c^2d^5egl - 4d^6e^2gl + 5c^3d^4fgl + 32cd^5efgl - \\
& -28c^2d^4f^2gl + 17d^5ef^2gl - 29cd^4f^3gl - 6d^4f^4gl - 12c^5d^3hl - \\
& -14c^3d^4ehl + 10cd^5e^2hl - 10c^4d^3fhl - 80c^2d^4efhl + 6d^5e^2fhl + \\
& +70c^3d^3f^2hl - 70cd^4ef^2hl + 88c^2d^3f^3hl - 12d^4ef^3hl + 24cd^3f^4hl + \\
& +6c^6d^2kl + 7c^4d^3ekl - 5c^2d^4e^2kl + 5c^5d^2fkl + 58c^3d^3efkl - \\
& -16cd^4e^2fkl - 53c^4d^2f^2kl + 109c^2d^3ef^2kl - 11d^4e^2f^2kl - \\
& -105c^3d^2f^3kl + 70cd^3ef^3kl - 65c^2d^2f^4kl + 12d^3ef^4kl - \\
& -12cd^2f^5kl + 6c^3d^5l^2 - 5cd^6el^2 + 23c^2d^5fl^2 - 5d^6efl^2 + \\
& +23cd^5f^2l^2 + 6d^5f^3l^2 - 12c^5d^3gm + 10c^3d^4egm + 50cd^5e^2gm - \\
& -34c^4d^3fgm - 88c^2d^4efgm + 46d^5e^2fgm + 38c^3d^3f^2gm - \\
& -78cd^4ef^2gm + 56c^2d^3f^3gm + 12d^4ef^3gm + 24c^6d^2hm - \\
& -20c^4d^3ehm - 76c^2d^4e^2hm + 68c^5d^2fhm + 152c^3d^3efhm - \\
& -96cd^4e^2fhm - 76c^4d^2f^2hm + 212c^2d^3ef^2hm - 20d^4e^2f^2hm - \\
& -164c^3d^2f^3hm + 40cd^3ef^3hm - 44c^2d^2f^4hm - 12c^7dkm +
\end{aligned}
$$

$+10c^5d^2ekm+2c^3d^3e^2km-22cd^4e^3km-34c^6dfkm-40c^4d^2efkm+$
$+104c^2d^3e^2fkm-26d^4e^3fkm+38c^5df^2km-248c^3d^2ef^2km+$
$+122cd^3e^2f^2km+190c^4df^3km-250c^2d^2ef^3km+12d^3e^2f^3km+$
$+166c^3df^4km-48cd^2ef^4km+36c^2df^5km-24c^4d^4lm+$
$+32c^2d^5elm-4d^6e^2lm-104c^3d^4flm+52cd^5eflm-$
$-120c^2d^4f^2lm+12d^5ef^2lm-36cd^4f^3lm+24c^5d^3m^2-$
$-44c^3d^4em^2+32cd^5e^2m^2+116c^4d^3fm^2-132c^2d^4efm^2+$
$+24d^5e^2fm^2+172c^3d^3f^2m^2-72cd^4ef^2m^2+72c^2d^3f^3m^2+$
$+6c^6d^2gn-29c^4d^3egn-65c^2d^4e^2gn+41c^5d^2fgn+58c^3d^3efgn-$
$-96cd^4e^2fgn+7c^4d^2f^2gn+125c^2d^3ef^2gn-31d^4e^2f^2gn-$
$-41c^3d^2f^3gn+38cd^3ef^3gn-13c^2d^2f^4gn-12c^7dhn+$
$+58c^5d^2ehn+82c^3d^3e^2hn+2cd^4e^3hn-82c^6dfhn-$
$-32c^4d^2efhn+152c^2d^3e^2fhn-2d^4e^3fhn-50c^5df^2hn-$
$-200c^3d^2ef^2hn+90cd^3e^2f^2hn+70c^4df^3hn-138c^2d^2ef^3hn+$
$+12d^3e^2f^3hn+62c^3df^4hn-24cd^2ef^4hn+12c^2df^5hn+6c^8kn-$
$-29c^6dekn+31c^4d^2e^2kn+11c^2d^3e^3kn+4d^4e^4kn+41c^7fkn-$
$-110c^5defkn-7c^3d^2e^2fkn+16cd^3e^3fkn+79c^6f^2kn-$
$-26c^4def^2kn-90c^2d^2e^2f^2kn+13d^3e^3f^2kn+10c^5f^3kn+$
$+140c^3def^3kn-65cd^2e^2f^3kn-76c^4f^4kn+103c^2def^4kn-$
$-9d^2e^2f^4kn-51c^3f^5kn+18cdef^5kn-9c^2f^6kn+12c^5d^3ln-$
$-34c^3d^4eln+16cd^5e^2ln+70c^4d^3fln-102c^2d^4efln+12d^5e^2fln+$
$+122c^3d^3f^2ln-72cd^4ef^2ln+72c^2d^3f^3ln-12d^4ef^3ln+$
$+12cd^3f^4ln-24c^6d^2mn+80c^4d^3emn-118c^2d^4e^2mn+$
$+4d^5e^3mn-152c^5d^2fmn+400c^3d^3efmn-152cd^4e^2fmn-$
$-354c^4d^2f^2mn+400c^2d^3ef^2mn-34d^4e^2f^2mn-276c^3d^2f^3mn+$
$+92cd^3ef^3mn-58c^2d^2f^4mn+6c^7dn^2-29c^5d^2en^2+91c^3d^3e^2n^2-$
$-15cd^4e^3n^2+47c^6dfn^2-247c^4d^2efn^2+200c^2d^3e^2fn^2-$
$-11d^4e^3fn^2+174c^5df^2n^2-403c^3d^2ef^2n^2+118cd^3e^2f^2n^2+$
$+224c^4df^3n^2-215c^2d^2ef^3n^2+17d^3e^2f^3n^2+108c^3df^4n^2-$
$-34cd^2ef^4n^2+17c^2df^5n^2;$

$\sigma_{1,0}=12c^4d^2e^4-22c^2d^3e^5+8d^4e^6-24c^5de^3f+114c^3d^2e^4f-$
$-76cd^3e^5f+12c^6e^2f^2-162c^4de^3f^2+252c^2d^2e^4f^2-22d^3e^5f^2+$

$$+70c^5e^2f^3-308c^3de^3f^3+114cd^2e^4f^3+124c^4e^2f^4-162c^2de^3f^4+$$
$$+12d^2e^4f^4+70c^3e^2f^5-24cde^3f^5+12c^2e^2f^6;$$

$$\sigma_{1,1}=6c^5d^2e^3+11c^3d^3e^4-4cd^4e^5+12c^6de^2f-51c^4d^2e^3f+$$
$$+27c^2d^3e^4f+4d^4e^5f-6c^7ef^2+69c^5de^2f^2-69c^3d^2e^3f^2-$$
$$-27cd^3e^4f^2-29c^6ef^3+73c^4de^2f^3+69c^2d^2e^3f^3-11d^3e^4f^3-$$
$$-27c^5ef^4-73c^3de^2f^4+51cd^2e^3f^4+27c^4ef^5-69c^2de^2f^5+$$
$$+6d^2e^3f^5+29c^3ef^6-12cde^2f^6+6c^2ef^7;$$

$$\sigma_{1,2}=6c^6d^2e^2-23c^4d^3e^3+26c^2d^4e^4-8d^5e^5-12c^7def+$$
$$+69c^5d^2e^2f-130c^3d^3e^3f+68cd^4e^4f+6c^8f^2-69c^6def^2+$$
$$+180c^4d^2e^2f^2-198c^2d^3e^3f^2+26d^4e^4f^2+23c^7f^3-74c^5def^3+$$
$$+170c^3d^2e^2f^3-130cd^3e^3f^3-2c^6f^4+22c^4def^4+180c^2d^2e^2f^4-$$
$$-23d^3e^3f^4-54c^5f^5-74c^3def^5+69cd^2e^2f^5-2c^4f^6-$$
$$-69c^2def^6+6d^2e^2f^6+23c^3f^7-12cdef^7+6c^2f^8;$$

$$\sigma_{1,3}=6c^5d^3e^2-11c^3d^4e^3+4cd^5e^4-12c^6d^2ef+51c^4d^3e^2f-$$
$$-27c^2d^4e^3f-4d^5e^4f+6c^7df^2-69c^5d^2ef^2+69c^3d^3e^2f^2+$$
$$+27cd^4e^3f^2+29c^6df^3-73c^4d^2ef^3-69c^2d^3e^2f^3+11d^4e^3f^3+$$
$$+27c^5df^4+73c^3d^2ef^4-51cd^3e^2f^4-27c^4df^5+69c^2d^2ef^5-$$
$$-6d^3e^2f^5-29c^3df^6+12cd^2ef^6-6c^2df^7;$$

$$\sigma_{1,4}=12c^4d^4e^2-22c^2d^5e^3+8d^6e^4-24c^5d^3ef+114c^3d^4e^2f-$$
$$-76cd^5e^3f+12c^6d^2f^2-162c^4d^3ef^2+252c^2d^4e^2f^2-22d^5e^3f^2+$$
$$+70c^5d^2f^3-308c^3d^3ef^3+114cd^4e^2f^3+124c^4d^2f^4-162c^2d^3ef^4+$$
$$+12d^4e^2f^4+70c^3d^2f^5-24cd^3ef^5+12c^2d^2f^6;$$

$$B_{1,i}=4k_i(c+f)(cf-de)^2(2c^2-de+5cf+2f^2)\cdot$$
$$\cdot(3c^2-4de+10cf+3f^2),\ (k_0=k_1=k_3=k_4=1,\ k_2=3).$$

Приложение 2
Матрицы, определяющие систему линейных уравнений для величины $G_\mathbf{2} : A_\mathbf{2} B_\mathbf{2} = C_\mathbf{2}$ (см. стр. 29-31)

$$A2 = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
3c & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3d & 3(2c+f) & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6d & 3(2c+f) & 3e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3d & 3f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3g & 3l & 0 & 0 & 4c & 4e & 0 & 0 & 0 & -e^2 & 0 & 0 \\
6h & 6(g+m) & 6l & 0 & 4d & 4(f+3c) & 12e & 0 & 0 & 2e(c-f) & 0 & 0 \\
3k & 3(4h+n) & 3(g+4m) & 3l & 0 & 12d & 12(c+f) & 12e & 0 & 2de-(c-f)^2 & 0 & 0 \\
0 & 6k & 6(h+n) & 6m & 0 & 0 & 12d & 4(3f+c) & 4l & 2d(f-c) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3k & 3n & 0 & 0 & 0 & 4d & 4f & -d^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4g & 4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 5c & 5e \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8h & 4(3g+2m) & 12l & 0 & 0 & 0 & 5d & 5(4c+f) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4k & 4(6h+n) & 12(g+2m) & 12l & 0 & 0 & 0 & 20d \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12k & 12(2h+n) & 4(g+6m) & 4l & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12k & 4(2h+3n) & 8m & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4k & 4n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5g & 5l \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10h & 10(2g+m) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5k & 5(8h+n) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

$$
\left.\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
20e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
10(3c+2f) & 30e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
30d & 10(2c+3f) & 20e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20d & 5(c+4f) & 5e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5d & 5f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6c & 6e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 \\
20l & 0 & 0 & 0 & 6d & 6(5c+f) & 30e & 0 & 0 & 0 & 0 & 3e^2(f-c) \\
10(3g+4m) & 30l & 0 & 0 & 0 & 30d & 30(2c+f) & 60e & 0 & 0 & 0 & 3e[(c-f)^2-de] \\
20(3h+n) & 20(g+3m) & 20l & 0 & 0 & 0 & 60d & 60(c+f) & 60e & 0 & 0 & (f-c)[(c-f)^2-6de] \\
30k & 10(4h+3n) & 5(g+8m) & 5l & 0 & 0 & 0 & 60d & 30(c+2f) & 30e & 0 & 3d[de-(c-f)^2] \\
0 & 20k & 10(h+2n) & 10m & 0 & 0 & 0 & 0 & 30d & 6(c+5f) & 6e & 3d^2(f-c) \\
0 & 0 & 5k & 5n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6d & 6f & -d^3
\end{array}\right)
$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ G_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2eg + (f-c)l \\ (f-c)(g+2m) - 2dl + 4eh \\ (f-c)(2h+n) + 2ek - 4dm \\ (f-c)k - 2dn \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$