MOLDOVA STATE UNIVERSITY
Center for Education and Research
in Mathematics and Computer Science
MRDA/CRDF

Theoretical and Applied Mathematics
Monograph Series

В.И.АРНАУТОВ

Г.Н.ЕРМАКОВА

КАРДИНАЛЬНЫЕ И ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

Chişinău ∗ 2008

УДК 10 М-15
L 82

Это издание написано на базе цикла лекций по теориии кардинальных и трансфинитных чисел, который читался в Приднестровском Государственном Университете для студентов физико-математического факультета.

Это издание будет полезно студентам математических специальностей физико-математических факультетов университетов, слушателям магистратуры и аспирантам, которым для проведения исследований необходимы знания по кардинальным и трансфинитным числам.

Authors: *В.И.Арнаутов, профессор, академик АН М*
Г.Н.Ермакова, доцент

Reviewer: *М.М.Чебан, профессор, академик АН М*

Recommended for publication by Scientific Council
of Center for Education and Research
in Mathematics and Computer Science

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

В.И.Арнаутов, Г.Н.Ермакова

Кардинальные и трансфинитные числа. Moldova State University, Center for Education and Research in Mathematics and Computer Science (MRDA/CRDF) – Ch.: CEP USM, 2008. – 133 p.

Bibliogr. p. 78 (3 tit.)
ISBN 978-9975-70-691-9
150 ex.

519.7

ISBN 978-9975-70-691-9

КАРДИНАЛЬНЫЕ И ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

Курс лекций

В.И.Арнаутов

Г.Н.Ермакова

ВВЕДЕНИЕ

Множество это первоначальное понятие и дать его определение невозможно, как невозможно дать определение точки, прямой или плоскости в геометрии. Хотя в некоторых книгах, особенно, предназначенных для школ делаются попытки дать понятие множества, или хотя бы некоторые пояснения, что такое множество.

Мы все однозначно понимаем понятие множество, когда идет речь о конкретном множестве. Например, когда говорим “множество всех столов в данной аудитории”, или “множество всех корней данного уравнения”.

А вот когда идет речь об абстрактном понятии “ множество”, то даже математики, которые занимаются научными исследованиями в области теории множеств, в это понятие вкладывают различный смысл.

Имеется раздел математики (правда не очень большой), в котором рассматриваются только конечные множества.

Различный смысл понимания множества привел к тому, что доказательства некоторых утверждений теории множеств не были настолько строгими, чтобы признавались всеми математиками, и более того, имелись вопросы, на которые нельзя было дать положительный или отрицательный ответ.

Одним из таких вопросов был вопрос “является ли континуум наименьшей несчетной мощностью?”, получивший в дальнейшем название “континуум проблемы”.

Складывалась ситуация, которая имела место в геометрии, и из которой геометры нашли выход, перейдя к аксиоматическому методу.

Аналогичный выход был найден и в теории множеств.

Имеются различные подходы к построению аксиоматической теории множеств.

Мы ниже приведем один из таких подходов, который на наш взгляд наиболее прост для понимания. При этом мы не ставим перед собой цель изложить весь материал этого курса с помощью аксиоматического подхода, а хотим только, чтобы читатель получил некоторое представление об аксиоматическом подходе в теории множеств.

Все результаты, включенные в это издание, имеются и в других изданиях, в частности в изданиях, которые указаны в разделе “Рекомендуемая литература”.

0. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

0.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

0.1.1. Имеются объекты трех видов: *элементы, множества* и *совокупности.* Причем всякое множество является совокупностью, но не всякая совокупность является множеством. Ниже (см. теорему I.2.10) будет показано, что совокупность всех множеств не является множеством.

Каждое множество состоит из элементов. Кроме того, в отличие от геометрии (где точка не является прямой и прямая не является точкой), в теории множеств каждое множество, в свою очередь, может быть элементом другого множества, и некоторые элементы некоторых множеств, в свою очередь, могут быть множествами.

0.1.2 Между некоторыми объектами имеется отношение *принадлежности,* причем любой объект не может принадлежать самому себе, т.е. в обозначениях, которые будут введены ниже, $a \notin a$ для любого объекта a.

Если объект a принадлежит некоторому объекту A, то он называется *элементом объекта* A.

Если a является элементом множества или совокупности A, то будем говорить, что *a принадлежит A*, и это будем записывать $a \in A$.

0.1.3. Иногда совокупность будем называть *классом* или *семейством.* Эти совокупности могут не быть множествами, но тоже состоят из элементов.

0.1.4. Примеры:

Совокупность всех множеств, семейство всех конечных множеств, класс всех групп не являются множествами, хотя и состоят из элементов. Их элементами являются: множества; конечные множества; группы, соответственно.

0.1.5. Если мы не знаем, является ли данный объект, состоящий из элементов, множеством, то мы будем его называть совокупностью. Но иногда и некоторые множества мы будем называть совокупностями, хотя знаем, что это множество.

Например: будем говорить “совокупность всех подмножеств данного множества”, хотя ниже будет доказано, что эта совокупность является множеством (см. теорему 0.2.12). Это не должно приводить к противоречию, ибо всякое множество является совокупностью.

0.1.6. Если все элементы множества или совокупности A обладают некоторым свойством α и всякий объект, обладающий свойством α, принадлежит A, то это будем записать: $A = \{a | a \textit{ обладает свойством } \alpha\}$.

В частности $\{a\}$ означает множество, состоящее из одного элемента a и $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает множество, состоящее из элементов a_i для $1 \leq i \leq n$.

0.1.7. Если любой элемент множества или совокупности A принадлежит множеству или совокупности B, то будем говорить, что A *содержится* в B, и это будем записывать $A \subseteq B$.

0.1.8. Если A и B - множества и $A \subseteq B$, то A называется *подмножеством* множества B.

0.1.9. Если A и B - множества или совокупности и f - некоторое правило, по которому каждому элементу из A ставится в соответствии некоторый единственный элемент из B, то f называется *отображением* совокупности A в совокупность B и это будем записывать $f : A \to B$.

Если различным элементам из совокупности A ставится в соответствии различные элементы из совокупности B, то это отображение называется *инъективным отображением* или *инъекцией.*

Если каждый элемент из совокупности B соответствует некоторому элементу из совокупности A, то это отображение называется *сюръективным отображением* или *сюръекцией.*

Если отображение является инъекцией и сюръекцией, то оно называется *биективным* отображением, или другими словами – биекцией.

0.1.10. Указанные выше объекты и понятия связаны между собой следующими аксиомами.

0.2. АКСИОМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

0.2.1. А.1 **Аксиома объемности (аксиома совпадения):**

Пусть A и B - произвольные множества. Если каждый элемент из первого множества принадлежит второму, а каждый элемент второго принадлежит первому множеству, то $A = B$, т.е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.

0.2.2. А.2 **Аксиома существования**:

Существует множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называют пустым множеством и обозначают $\emptyset$.

0.2.3.1. Замечание. Из аксиом А.1 и А.2 следует, что имеется только одно пустое множество.

0.2.4. А.3 **Аксиома пар:**

Если a, b некоторые объекты, то $\{a,\ b\}$ является множеством.

0.2.5. Замечание. Из аксиом А.2 и А.3 следует, что $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ является множеством, т.е. существует множество, состоящее из двух элементов.

0.2.6. Замечание. Если A - множество или совокупность и $a \in A$, то из аксиом А.3 и А.1 следует, что $\{a\} = \{a, a\}$ является множеством.

0.2.7. А.4 **Аксиома суммы (объединения) множеств:**

A – некоторое множество и задана совокупность $\{X_\alpha \,|\alpha \in A\}$ множеств, пронумерованных элементами из множества A. Тогда существует множество X, которое состоит из таких элементов, каждый из которых принадлежит некоторому множеству X_α и только из таких элементов. Множество X называется объединением множеств X_α из совокупности $\{X_\alpha \,|\alpha \in A\}$ и обозначается $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, т.е. $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является множеством.

0.2.8. Теорема. *Пусть A - множество и B - совокупность. Если $f : A \to B$, то $C = \{f(a)|a \in A\}$ является множеством.*

Доказательство. Согласно замечанию 0.2.6, $\{b\}$ является множеством для любого $b \in B$.

Для каждого элемента $a \in A$ рассмотрим множество $X_a = \{f(a)\}$. Тогда согласно аксиоме A.4, $C = \bigcup\limits_{a \in A} \{f(a)\} = \bigcup\limits_{a \in A} X_a$ является множеством.

0.2.9. Теорема. *Если A - множество и $B \subseteq A$, то B является множеством.*

Доказательство. Для каждого элемента $b \in A$ рассмотрим множество (см. замечание 0.2.6) $X_b = \{b\}$, если $b \in B$ и $X_b = \emptyset$, если $b \notin B$.

Тогда согласно аксиоме A.4, $B = \bigcup\limits_{b \in B} \{b\} = \bigcup\limits_{b \in A} X_b$ является множеством.

0.2.10. Теорема. *Если A и B - множества, то совокупность $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ всех упорядоченных пар (a,b) является множес*твом.

Доказательство. Для любого элемента $a \in A$ рассмотрим совокупности $B_a = \{(a,b) | b \in B\}$ и $B_a^* = \{\{\{a\}, \{a,b\}\} | b \in B\}$.

Заметим, что если $a = b$, то $\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{a\}, \{a,a\}\} = \{\{a\}\}$.

Согласно аксиоме A.3, $\{a,b\}$ является множеством, а согласно замечанию 0.2.6, $\{a\}$ является множеством, и значит, $\{a,b\}$ и $\{a\}$ являются объектами для любых $a \in A$ и $b \in B$. Тогда, согласно той же аксиоме A.3, $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ является множеством, и значит (см. аксиому A.4) $B_a^* = \{\{\{a\}, \{a,b\}\} | b \in B\} = \bigcup\limits_{b \in B} \{\{a\}, \{a,b\}\}$ является множеством.

Рассмотрим отображение $\psi : B_a^* \to B_a$, действующее по правилу $\psi(\{\{a\}, \{a,b\}\} = (a,b)$, если $a \neq b$ и $\psi(\{\{a\}\}) = (a,a)$, если $a = b$. Так как отображение $\psi : B_a^* \to B_a$ является сюръективнывм, то $B_a = \psi(B_a^*)$ является множеством (см. теорему 0.2.8). Тогда, согласно аксиоме A.4, $\{(a,b) | a \in A, b \in B\} = \bigcup\limits_{a \in A} B_a$ является множеством.

0.2.11. A.5 **<u>Аксиома степени</u>:**

Для любых множеств X и Y совокупность всех отображений множества X в множество Y является множеством, т.е. $\{f \,|\, f : X \to Y\}$ является множеством.

Это множество будем обозначать Y^X.

0.2.12. Теорема. *Если X – множество, то совокупность всех подмножеств множества X тоже является множеством, т.е. $Y = \{A \,|\, A \subseteq X\}$ является множеством.*

Доказательство. Согласно замечанию 0.2.5, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ является множеством, и согласно аксиоме А.5, $\Phi = \{f\,|f : X \to \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ является множеством. Для каждого $f \in \Phi$ рассмотрим $X_f = \{x \in X|f(x) = \emptyset\}$. Согласно теореме 0.2.8, X_f является множеством.

Кроме того, если $B \subseteq X$ то B является подмножеством множества X. Для каждого $x \in X$ положим $\varphi(x) = \emptyset$, если $x \in B$ и $\varphi(x) = \{\emptyset\}$, если $x \notin B$. Тогда $\varphi \in \Phi$, причем $X_\varphi = B$, и значит, $\{X_f|f \in \Phi\}$ является совокупностью всех подмножеств множества X, и согласно аксиоме А.4, $\{X_f|f \in \Phi\} = \bigcup\limits_{f\in\Phi} \{X_f\}$ является множеством.

Этим теорема полностью доказана.

0.2.13. А.6 **Аксиома бесконечности:**

Существует такое множество A, *для которого выполнены следующие условия:* $\emptyset \in A$ *и если* $x \in A$, *то* $\{x\} \in A$.

0.2.14. Замечание. Из аксиомы А.6 и того, что $a \notin a$ следует, что

$A \supseteq \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots, \}$, и значит, множество A является бесконечным множеством.

0.2.15. Замечание. Имеется раздел теории множеств, в котором нет аксиомы А.6.

В этом разделе нельзя доказать, что имеется бесконечные множества, и значит, всякое бесконечное множество (в обычном смысле) является совокупностью.

0.2.16. А.7 **Аксиома выбора:**

Пусть $\{A_\alpha\,|\alpha \in \Gamma\}$ *- любая совокупность непустых множеств* A_α, *таких, что выполнены условия:*

Γ *– множество и* $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ для $\alpha \neq \beta$.

Тогда из каждого множестваA_α *можно выбрать по одному элементу, и совокупность выбранных элементов образует множество* B.

0.2.17. Теорема. Если M - произвольное множество и $\widehat{M}$ - множество всех его непустых подмножеств, то существует такое отображение

$\psi : \widehat{M} \to M$, что $\psi(A) \in A$ для любого $A \in \widehat{M}$.

Доказательство. Для каждого $A \in \widehat{M}$ рассмотрим множество $B_A = \{(\{A\}, x)|x \in A\}$.

Тогда $B_A \cap B_C = \emptyset$ если $A \neq C$, и согласно аксиоме А.7, из каждого множества B_A можно выбрать элемент $(\{A\}, a)$. Если теперь множеству

A поставим в соответствие элемент a, который встречается в $(\{A\}, a)$, то получим отображение $\psi : \widehat{M} \to M$, причем $\psi(A) \in A$.

Этим теорема полностью доказана.

0.2.18. Замечание. Хотя аксиома А.7 выглядит естественно, и она применяется для доказательства многих теорем математики (не только теории множеств), но тем не менее, эта аксиома ставится под сомнение некоторыми математиками.

Дело в том, что с помощью этой аксиомы можно доказать некоторые утверждения, которые выглядят несколько странно.

В дальнейшем, мы в своих рассуждениях, как правило, не будем доходить (как это делали в этом параграфе) до указания тех аксиом, которые мы используем.

I. МНОЖЕСТВА И КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

I.1 . СВОЙСТВА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ.

I.1.1. **Определение.** Множество A называются *эквивалентным множеству* B, если существует биекция $\xi : A \to B$.

I.1.2. Определение. Множество A называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству N натуральных чисел.

I.1.3. Упражнение. Доказать верность следующих утверждений:

I.1.3.1. Множество A является счетным тогда и только тогда, когда его можно пронумеровать множеством всех натуральных чисел;

I.1.3.2. Подмножество счетного множества является либо конечным, либо счетным.

I.1.3.3. Если A - счетное множество и $f : A \to B$ - сюръективное отображение, то B является конечным или счетным множеством.

I.1.3.4. Если A - счетное множество и $f : B \to A$ - инъективное отображение, то B является конечным или счетным множеством.

I.1.3.5. Если множество A эквивалентно множеству B, а множество B эквивалентно множеству C, то множество A эквивалентно множеству C;

I.1.3.6. Если множество A эквивалентно множеству B, то множество B эквивалентно множеству A.

I.1.3.7. Если множество A эквивалентно множествуB, то множество $\widehat{A}$ всех подмножеств множества A эквивалентно множеству $\widehat{B}$ всех подмножеств множества B.

I.1.3.8. Конечные множества являются эквивалентными тогда и только тогда когда они имеют одинаковое число элементов, т.е. для конечных множеств понятие эквивалентности множеств равносильно тому, что они содержат одно и тоже число элементов.

I.1.3.9. Пусть A, B, C, D - такие множества, что A эквивалентно C, а B эквивалентно D. Если $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$, то множества $A \cup B$ и $C \cup D$ являются эквивалентными.

I.1.4. Упражнение. Доказать, что отношение эквивалентности разбивает класс всех множеств на попарно непересекающиеся классы эквивалентных между собой множеств, т.е. два множества являются эквивалентными тогда и только тогда, когда они приналежат одному и тому же класссу.

I.1.5. Теорема. *Пусть* $\{A_\gamma |\ \gamma \in \Gamma\}$ *– счетная или конечная совокупность (т.е.* Γ *является счетным или конечным множеством) конечных или счетных множеств* A_γ*. Тогда* $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *является конечным или счетным множеством.*

Доказательство. Если P – множество всех простых чисел, то P является бесконечным подмножеством множества всех натуральных чисел. Тогда, согласно упражнению I.1.3.2, P – счетное множество, и значит, его можно пронумеровать натуральными числами, т.е. $P = \{p_1, p_2, ...\}$.

Так как Γ является конечным или счетным множеством, то его можно пронумеровать натуральными числами, т.е. $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ...\}$ или $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m\}$.

Так как для каждого $\gamma_i \in \Gamma$ множество A_{γ_i} является конечным или счетным, то его можно пронумеровать натуральными числами, т.е. $A_{\gamma_i} = \{a_{\gamma_i,1}, a_{\gamma_i,2}, a_{\gamma_i,3}, ...\}$ или $\mathrm{A}_{\gamma_i} = \{a_{\gamma_i,1}, a_{\gamma_i,2}, \ldots a_{\gamma_i,m}\}$.

Пронумеруем элементы множества A следующим образом:

Если $a \in A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{\gamma_i}$, то $a \in A_{\gamma t}$ для некоторого натурального числа t. Пусть $k = \min\{t | a \in A_{\gamma t}\}$. Тогда $a \in A_{\gamma_k}$, и значит, $a = a_{\gamma_k,s}$ для некоторого натурального числа s. Присвоим элементу a номер p_k^s, т.е. положим $a = a_{p_k^s}$.

Так как для каждого $a \in A$, указанные выше числа k и s определяются однозначно, то каждому элементу из A присвоен единственный индекс.

Кроме того, поскольку все p_i являются простыми числами, то из равенства $p_k^s = p_j^n$ следует, что $k = j$ и $s = n$, и значит, различным элементам из A присвоены различные индексы.

Таким образом, мы получили, что каждый элемент $a \in A$ пронумерован единственным натуральным числом, причем различным элементам из A присвоены различные индексы.

Тогда множество A эквивалентно некоторому подмножеству множества всех натуральных чисел, и значит (см. упражнение I.1.3.2.), множество A является конечным или счетным.

Этим теорема полностью доказана.

I.1.6. Теорема. *Если A и B – счетные множества, то и множество $C = \{(a, b)|\ a \in A,\ b \in B\}$ является счетным.*

Доказательство. Для любого $a \in A$ рассмотрим множество $C_a = \{(a, b)|b \in B\}$. Так как отображение $\eta : B \to C_a$, отображающее элемент $b \in B$ в элемент $(a, b) \in C_a$ является биекцией, то множество C_a является счетным. Тогда

$C = \{(a, b)|a \in A, b \in B\} = \bigcup\limits_{a \in A} \{(a, b)|b \in B\} = \bigcup\limits_{a \in A} C_a$

является счетным множеством, как объединение счетного числа счетных множеств (см. теорему I.1.5).

Этим теорема полностью доказана.

I.1.7. Теорема. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел является счетным.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, и $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(k, n)|\ k, n \in \mathbb{N}\}$.

Если $\mathbb{Q}^+$ - множество всех положительных рациональных чисел и $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ такое отображение, что $\xi(a, b) = \frac{a}{b}$, то $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ является сюръективным отображением.

Так как, согласно теореме I.1.6, множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ является счетным и $\mathbb{Q}^+$ не является конечным множеством, то согласно упражнению I.1.3.3, множество $\mathbb{Q}^+$ является счетным.

Тогда и множество $\mathbb{Q}^- = \{-q|q \in \mathbb{Q}^+\}$ будет счетным, и значит, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ является счетным множеством.

I.1.8. Замечание. Позже (см. следствия I.2.15 и I.2.9) будет показано, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и множество всех подмножеств счетного множества не являются счетными.

I.1.9. Определение. Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

I.1.10. Упражнение. Доказать верность следующих утверждений:

I.1.10.1. Если $\{A_1, \ldots, A_n\}$ - конечная совокупность счетных множеств, то множество $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n)|a_i \in A_i \text{ для } 1 \leq i \leq n\}$ является счетным;

I.1.10.2. Множество всех конечных последовательностей из натуральных чисел является счетным;

I.1.10.3. Множество всех последовательностей $(k_1, k_2, \ldots)$, где $k_i \in \{0,1\}$ и для которых $\{i | k_i = 0\}$ - конечное множество, является счетным множеством;

I.1.10.4. Множество всех последовательностей $(k_1, k_2, \ldots)$, где $k_i \in \{0,1\}$ и для которых $\{i | k_i = 1\}$ - конечное множество, является счетным множеством;

I.1.10.5. Если A - счетное множество, n - натуральное число и $B_n = \{C \subseteq A |\ C\ \textit{содержит точно n элементов}\}$, то B_n является счетным множеством.

I.1.10.6. Если A – счетное множество и $\tilde{A}$ - совокупность всех его конечных подмножеств, то $\tilde{A}$ является счетным множеством;

I.1.10.7. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами является счетным множеством;

I.1.10.8. Множество всех алгебраических чисел (т.е. всех действительных чисел, каждое из которых является корнем некоторого ненулевого многочлена с целыми коэффициентами), является счетным множеством.

I.1.11. Замечание. С начала XVIII века стояла проблема: существуют ли неалгебраические действительные числа?

Ниже (см. теорема I.2.16) будет показано, что существуют неалгебраические действительные числа, причем их несчетное число.

I.2. СВОЙСТВА ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ.

I.2.1. Теорема. *Всякое бесконечное множество A содержит некоторое счетное подмножество.*

Доказательство.

Так как $A \neq \emptyset$, то выберем некоторый элемент $a_1 \in A$. Тогда $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, и значит, можем выбрать некоторый элемент $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Тогда $a_1 \neq a_2$ и $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$.

Продолжая этот процесс выбора элементов, мы для любого натурального числа k можем выбрать элемент $a_k \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Тогда $B = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq A$ и B является счетным множеством.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.2. Теорема. *Если A – бесконечное несчетное множество и B является его конечным или счетным подмножеством, то множества* A и A\B *являются эквивалентными.*

Доказательство. Заметим, что множество $A \setminus B$ не является конечным, ибо в противном случае $A = (A \setminus B) \cup B$ было бы счетным множеством (см. теорему I.1.5).

Тогда множество $A \setminus B$ содержит в себе счетное подмножество C.

Рассмотрим множество $D = (A \setminus B) \setminus C$. Тогда $A = D \cup (B \cup C)$ и $A \setminus B = D \cup C$. Так как множества $B \cup C$ и C являются счетными, то существует биекция $\eta : B \cup C \to C$.

Определим отображение $\xi : A \to A \setminus B$ следующим образом:

Если $a \in D$, то положим $\xi(a) = a$ и, если $a \in B \cup C$, то положим $\xi(a) = \eta(a)$. Так как $(B \cup C) \cap D = \emptyset$, то $\xi : (B \cup C) \cup D \to C \cup D$ является биекцией, и значит, $\xi : A \to A \setminus B$ является биекцией, т.е. множества $A = D \cup (B \cup C)$ и $A \setminus B = D \cup C$ являются эквивалентными.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.3. Теорема. *Если M – бесконечное множество и A – конечное или счетное множество, то множества $M \cup A$ и M являются эквивалентными.*

Доказательство. Если M является счетным, то и множество $M \cup A$ будет счетным, и значит, множества $M \cup A$ и M являются эквивалентными.

Пусть теперь множество M не является счетным. Не нарушая общности, можем считать, что $M \cap A = \emptyset$ (в противном случае, вместо множества A можем взять множество $A' = A \backslash M$, так как $M \cup A = M \cup A'$).

По теореме I.2.1. множество M содержит счетное подмножество B, а согласно теореме I.2.2, множества M и $M \backslash B$ будут эквивалентными. Так как множества B и $B \cup A$ являются счетными, то существует биекция $\xi : B \to B \cup A$.

Определим отображение $\eta : M \to M \cup A$ следующим образом: $\eta(x) = x$, если $x \in M \backslash B$ и $\eta(x) = \xi(x)$, если $x \in B$.

Так как $(M \backslash B) \cap B = \emptyset$, то η является отображением, и поскольку $M \cap A = \emptyset$, то $\eta : M \to M \cup A$ является биективным отображением.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.4. Теорема. *Множество M является бесконечным тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому собственному подмножеству.*

Доказательство.

Необходимость. Если M – бесконечное множество и $a \in M$, то множество $M' = M \backslash \{a\}$ является бесконечным собственным подмножеством. По теореме I.2.3 множества M' и $M' \cup \{a\} = M$ являются эквивалентными.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество M эквивалентно некоторому собственному подмножеству M'.

Если M - конечное множество, т.е. $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, то M' содержит меньше чем m элементов, и значит, M и M' не могут быть эквивалентными. Получили противоречие. Значит множество M не может быть конечным.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.5. Определение: Пусть X – произвольное непустое множество. Любое отображение $f : X \to \{0, 1\}$ называется *характеристической функцией на множестве X*.

I.2.6. Упражнение. Доказать, что если X – конечное множество, и оно содержит n элементов (т.е. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$), то множество F всех характеристических функций на множестве X, состоит из 2^n элементов.

I.2.7. **Теорема.** *Пусть A произвольное множество, $\widehat{A} = \{B | B \subseteq A\}$ (т.е. $\widehat{A}$ является множеством всех подмножеств множества A) и F – множество всех характеристических функций, заданных на A. Тогда существует биективное отображение $\xi : F \to \widehat{A}$.*

Доказательство. Если $f \in F$, то определим $\xi\,(f) = \{a \in A\,|f\,(a) = 1\}$ и покажем, что ξ - требуемое биективное отображение.

Так как для каждого $f \in F$ множество $\xi(f)$ определено однозначно, то ξ является отображением множества F в множество $\widehat{A}$.

Пусть теперь $f : A \to \{0, 1\}$ и $\varphi : A \to \{0, 1\}$, причем $f \neq \varphi$. Тогда существует такой элемент $a_0 \in A$, что $f(a_0) \neq \varphi(a_0)$.

Допустим, для определенности, что $f(a_0) = 1$ и $\varphi(a_0) = 0$. Тогда $a_0 \in \xi(f)$ и $a_0 \notin \xi(\varphi)$, и значит, $\xi(f) \neq \xi(\varphi)$. Следовательно ξ является инъекцией.

Проверим, что $\xi : F \to \widehat{A}$ - сюрьективное отображение:

Если $C \in \widehat{A}$, то $C \subseteq A$. Определим отображение $f : A \to \{0, 1\}$ следующим образом:

Положим $f\,(x) = 1$, если $x \in C$ и $f\,(x) = 0$, если $x \notin C$. Тогда легко заметить, что $\xi\,(f) = \{b \in A\,|f\,(b) = 1\} = C$, т.е. $\xi : F \to \widehat{A}$ является биекцией.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.8. **Теорема**. *Пусть A – произвольное множество и F – множество всех характеристических функций на множестве A. Тогда верны следующие утверждения:*

I.2.8.1. *С*уществует инъективное отображение $\varphi : A \to F$;

I.2.8.2. . *Не существует инъективного отображения множества F в множество A.*

Доказательство.

I.2.8.1. Для каждого элемента $a \in A$ рассмотрим характеристическую функцию f_a из F действующую по правилу $f_a(x) = 1$, если $x = a$ и $f_a(x) = 0$, если $x \neq a$.

Если $\varphi : A \to F$ - такое отображение, что $\varphi(a) = f_a$ для любого $a \in A$, то $\varphi : A \to F$ является инъективным отображением.

Этим утверждение I.2.8.1 доказано.

I.2.8.2. Допустим противное, т.е. существует некоторое инъективное отображение $\xi : F \to A$.

Определим отображение $\eta : A \to \{0,1\}$ следующим образом:

Если $a \in \xi(F)$, то $a = \xi(f)$ для некоторого $f \in F$. Положим $\eta(a) = \eta(\xi(f)) = k \in \{0,1\}$, где $k \neq f(a) = f(\xi(f))$ и $\eta(a) = 0$ если $a \notin \xi(F)$.

Тогда $\eta \in F$ и $\eta(\xi(f)) \neq f(\xi(f))$ для любого $f \in F$, и в частности, $\eta(\xi(\eta)) \neq \eta(\xi(\eta))$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения I.2.8.2.

Этим теорема полностью доказана.

Из теоремы I.2.7 и утверждения I.1.8.2 следует:

I.2.9. Следствие. *Для любого множества X не существует инъективного отображения множества $\bar{X} = \{A|\ A \subseteq X\}$ всех подмножеств множества X в множество X.*

I.2.10. Теорема. *Совокупность Ω всех множеств не является множеством.*

Доказательство. Допустим противное, т.е., что Ω является множеством, и рассмотрим множество $\widehat{\Omega}$ всех подмножеств множества Ω, т.е. $\widehat{\Omega} = \{A|\ A \subseteq \Omega\}$. Тогда любой элемент $A \in \widehat{\Omega}$ является множеством, и значит, он принадлежит Ω, т.е. $\widehat{\Omega} \subseteq \Omega$, и значит, существует инъективное отбражение множества $\widehat{\Omega}$ в множество Ω.

Получили противоречие с утверждением следствия I.2.9.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.11. Теорема. (теорема Кантора-Бернштейна) *Если A и B – такие множества, что существуют инъективные отображения $f : A \to B$ и $\varphi : B \to A$, то множества A и B являются эквивалентными.*

Доказательство. Заметим, что отображение $\eta = \varphi \circ f : A \to A$ (как суперпозиция инъективных отображений) является инъективным отображением.

По индукции построим последовательность множеств $A_0, A_1, A_2, ...$ следующим образом:

$A_0 = A$, $A_1 = \varphi(B)$ и $A_{k+2} = \eta(A_k)$ для любого неотрицательного, целого числа k.

Проверим, что $A_{k+1} \subseteq A_k$ для любого k.

В самом деле, $A_1 = \varphi(B) \subseteq A = A_0$ и $A_2 = \eta(A_0) = f(\varphi(A)) \subseteq f(B) = A_1$.

Допустим, что $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_k$ для натурального числа $k \geq 2$. Тогда $A_{k+1} = \eta(A_{k-1}) \subseteq \eta(A_{k-2}) = A_k$.

Следовательно, $A_{k+1} \subseteq A_k$ и $\eta : A_k \backslash A_{k+1} \to \eta(A_k)\backslash\eta(A_{k+1}) = A_{k+2}\backslash A_{k+3}$ является биективным отображением для любого неотрицательного целого числа k.

Если $C = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то легко заметить, что

$A = A_0 = (\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_k\backslash A_{k+1}))\cup C = (\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k}\backslash A_{2k+1}))\cup(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}\backslash A_{2k+2}))\cup C$

и $A_1 = (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (A_k\backslash A_{k+1}))\cup C = (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (A_{2k}\backslash A_{2k+1}))\cup(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}\backslash A_{2k+2}))\cup C = (\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k+2}\backslash A_{2k+3}))\cup(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}\backslash A_{2k+2}))\cup C$.

Для каждого элемента $a \in A$ положим:

$\psi(a) = a$, если $a \in (\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}\backslash A_{2k+2}))\cup C$ и

$\psi(a) = \eta(a)$, если $a \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_{2k}\backslash A_{2k+1})$.

Так как $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$, то $(A_k\backslash A_{k+1}) \cap (A_i\backslash A_{i+1}) = \emptyset$, если $k \neq i$. Тогда $\psi : A \to A_1$ является биективным отображением.

Поскольку $\varphi^{-1} : \varphi(B) = A_1 \to B$ является биекцией, то $\varphi^{-1}\circ\psi : A \to B$ является биективным отображением.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.12. Теорема. *Если A - множество всех счетных последовательностей, составленных из 0 и 1, т.е.* $A = \{(k_1, k_2, \ldots)|$ *где* $k_i \in \{0, 1\}\}$, *то A эквивалентно множеству $\widehat{\mathbb{N}}$ всех подмножеств множества всех натуральных чисел.*

Доказательство. Пусть $\bar{\mathbb{N}}$ - множество всех характеристических функций на множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, т.е. $\bar{\mathbb{N}} = \{f|f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$.

Если каждой последовательности $(k_1, k_2, ...) \in A$ поставим в соответствие такое отображение $f \in \bar{\mathbb{N}}$, что $f(i) = k_i$ для любого натурального числа i, то мы получим биективное отображение множества A на множество $\bar{\mathbb{N}}$, т.е. множества A и $\bar{\mathbb{N}}$ являются эквивалентными.

Согласно теореме I.2.7, множества $\widehat{\mathbb{N}}$ и $\bar{\mathbb{N}}$ являются эквивалентными, и значит, множества $\widehat{\mathbb{N}}$ и A являются эквивалентными.

Этим теорема полностью доказана.

I.2.13. Упражнение. Доказать, что множество B всех таких счетных последовательностей $(k_1, k_2, \ldots)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ что $\{i|k_i = 0\}$ и $\{i|k_i = 1\}$ являются бесконечными множествами, эквивалентно множеству $\widehat{\mathbb{N}}$ всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.

I.2.14. Теорема. *Множество* $\mathbb{R}$ *всех действительных чисел эквивалентно множеству* $\widehat{\mathbb{N}}$ *всех подмножеств множества* $\mathbb{N}$ *всех натуральных чисел.*

Доказательство. Если $\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел, то согласно теореме I.1.7 множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ являются эквивалентными. Тогда множества $\widehat{\mathbb{N}} = \{B | B \subseteq \mathbb{N}\}$ и $\widehat{\mathbb{Q}} = \{C | C \subseteq \mathbb{Q}\}$ тоже будут эквивалентными (ибо если $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ – биекция, то $\widehat{\xi} : \{B | \ B \subseteq \mathbb{N}\} \to \{C | \ C \subseteq \mathbb{Q}\}$, где $\widehat{\xi}(A) = \xi(A)$ будет биекцией).

Если любому действительному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие множество всех рациональных чисел $r < \alpha$ (т.е. множество $\{r \in \mathbb{Q} | r < \alpha\}$), то получим инъективное отображение $\eta : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{Q}}$.

Построим теперь инъективное отображение $\psi : \widehat{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. Так как множества $\widehat{\mathbb{Q}}$ и $\widehat{\mathbb{N}}$ являются эквивалентными и множество $\widehat{\mathbb{N}}$ является эквивалентным множеству $\bar{\mathbb{N}}$ всех счетных последовательностей, элементы которых являются 0 или 1 (см. теорему I.2.12, то достаточно построить некоторое инъективное отображение $\delta : \bar{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$.

Каждой последовательности $\{k_1, k_2, \ldots\} \in \bar{\mathbb{N}}$ поставим в соответствии число $r = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 4^{-i}$ (так как $\lim\limits_{s\to\infty} \sqrt[s]{k_s \cdot 4^{-s}} \leq \frac{1}{4} < 1$, то по признаку Коши ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 4^{-i}$ сходится). Получили отображение $\delta : \bar{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$.

Проверим, что построенное отображение $\delta : \bar{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ является инъекцией.

Пусть $(k_1, k_2, ...) \neq (k'_1, k'_2, ...)$ и $n = \min\{i | k_i \neq k'_i\}$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $k_n = 0$ и $k'_n = 1$. Тогда $k_i = k'_i$ для $i < n$, и значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k_i + 0 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k_i + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i <$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k_i + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k'_i + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n + \sum_{s=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^s \cdot k'_s = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^i k'_i,$$

т.е. $\delta : \bar{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ является инъективным отображением. Значит, существует инъективное отображение $\psi : \widehat{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$.

Тогда согласно теореме I.2.11, множества $\mathbb{R}$ и $\widehat{\mathbb{Q}}$ являются эквивалентными.

Так как множества $\widehat{\mathbb{Q}}$ и $\widehat{\mathbb{N}}$ являются эквивалентными, то множества $\mathbb{R}$ и $\widehat{\mathbb{N}}$ будут эквивалентными.

Этим теорема полностью доказана.

Из теоремы I.2.7, утверждения I.2.8.2 и предыдущей теоремы следует:

I.2.15. Следствие. *Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел не является счетным.*

I.2.16. Теорема. *Существуют неалгебраические числа.*

Доказательство. Согласно упражнению I.1.10.8, множество A всех алгебраических чисел является счетным, а согласно предыдущей теореме множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел не является счетным.

Так как $A \subseteq \mathbb{R}$, то (см. теорему I.2.2), множества $\mathbb{R} \backslash A$ и $\mathbb{R}$ являются эквивалентными.

Значит, существуют неалгебраические числа и их несчетное число.

I.2.17. Упражнение. Доказать, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел эквивалентно:

I.2.17.1. Множеству $\Re = \{(r_1, r_2, ...)| \ r_i \in \mathbb{R}\}$ всех счетных последовательностей действительных чисел;

I.2.17.2. Множеству $\tilde{\mathbb{R}} = \{A \subseteq \mathbb{R}| \quad ||A|| = \aleph_0\}$ всех счетных подмножеств множества всех действительных чисел.

I.3. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

I.3.1. Определение. Говорим, что на множестве A задан *частичный порядок* "$<$", если для некоторых пар элементов определено бинарное отношение $a < b$, причем выполняются следующие аксиомы:

1. Одновременно $a < b$ и $b < a$ не выполняются ни для каких элементов $a, b \in A$ (условие антикоммутативности);

2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (условие транзитивности).

I.3.2. Определение. Если на множестве A задан частичный порядок "$<$", то пара $(A, <)$ называется *частично упорядоченным множеством.*

Иногда, если ясно из контекста, о каком порядке идет речь, то вместо $(A, <)$ будем писать просто A.

I.3.3. Замечание. Иногда на множестве A вместо бинарного отношения $a < b$ рассматривают бинарное отношение вида $a \leq b$, и множество A тоже называют *частично упорядоченным* (см. следующее замечание), если это отношение удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $a \leq a$ для любого элемента $a \in A$

2) Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $b = a$;

3) Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

I.3.4. Замечание. Пусть на некотором множестве A задано бинарное отношение "$<$", удовлетворяющее аксиомам 1 и 2 определения I.3.1. Определим на этом множестве A отношение " $\leq$ " следующим образом: считаем, что $a \leq b$, если $a < b$ или $a = b$.

Тогда введенное отношение " $\leq$ " удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3, указанным в замечании I.3.3.

Если же на множестве A задано бинарное отношение "$\leq$", удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3, указанным в замечании I.3.3, то определим на этом множестве бинарное отношение "$<$", следующим образом:

Считаем, что $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$.

Тогда введенное бинарное отношение "$<$" удовлетворяет аксиомам 1 и 2 указанным в определении I.3.1.

I.3.5. Замечание. Из замечания I.3.4 следует, что понятия частично упорядоченного множеств данных в определение I.3.2 и в замечания I.3.3 одинаковые.

I.3.6. Определение. Частично упорядоченное множество $(A, <)$ будем называть *линейно упорядоченным*, если для любых различных элементов $a, b \in A$, либо $a < b$, либо $b < a$.

I.3.7. Определение. Пусть $(A, <)$ - частично упорядоченное множество, и $M \subseteq A$. Элемент $b \in A$ называется:

– *минимальным элементом* в множестве M, если $b \in M$ и в M не существует такой элемент a, что $a < b$;

– *наименьшим элементом* в множестве M, если $b \in M$ и $b \leq a$ для любого элемента $a \in M$;

– *максимальным элементом* в множестве M, если $b \in M$ и в M не существует такой элемент a, что $a > b$;

– *наибольшим элементом* в множестве M, если $b \in M$ и $b \geq a$ для любого элемента $a \in M$.

I.3.8. Упражнение. Доказать, что частично упорядоченное множество является линейно упорядоченным в каждом из следующих случаев:

– Любое конечное подмножество имеет наименьший элемент;

– Любое конечное подмножество имеет наибольший элемент.

I.3.9. Определение. Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

I.3.10. Теорема. *Если A – конечное, линейно упорядоченное множество, то оно является вполне упорядоченным.*

Доказательство. Пусть A – конечное, линейно упорядоченное множество и $\emptyset \neq \mathrm{B} \subseteq A$. Если B является одноэлементным множеством, то этот элемент является наименьшим в B.

Допустим, что всякое непустое подмножество множества A, содержащее k элементов, имеет наименьший элемент.

Если $B = \{b_1, \ldots, b_{k+1}\} \subseteq A$, то рассмотрим элемент b_{k+1}. Тогда, либо b_{k+1} является наименьшим элементом в B и в этом случае теорема доказана, либо существует такое $1 \leq s \leq k$, что $b_s < b_{k+1}$.

Согласно допущению в множестве $B' = \{b_1, \ldots, b_k\}$ имеется наименьший элемент, и пусть b_t будет этим наименьшим элементом.

Тогда $b_t \leq b_s < b_{k+1}$, и значит $b_t \leq b_i$ для любого $1 \leq i \leq k+1$, т.е. b_t является наименьшим элементом в множестве B.

Этим теорема полностью доказана.

I.3.11. Упражнение. Доказать, что:

I.3.11.1. Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел с обычным порядком "$<$" является линейно упорядоченным множеством.

I.3.11.2. Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел с обычным порядком "$<$" является вполне упорядоченным множеством.

I.3.11.3. Произвольное множество A, в котором никакие два различных элемента не сравнимы между собой, является частично упорядоченным множеством.

I.3.12. Упражнения. Выяснить являются ли следующие множества, с указанными бинарными отношениями, частично упорядоченными или линейно упорядоченными:

I.3.12.1. Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел. Определим на $\mathbb{N}$ бинарное отношение следующим образом:

Считаем, что $a \leq b$, если число b делится на число a.

I.3.12.2. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел. Определим на $\mathbb{Z}$ бинарное отношение следующим образом:

Считаем, что $a \leq b$, если число b делится на число a.

I.3.12.3. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел. Определим на $\mathbb{Z}$ бинарное отношение следующим образом:

Считаем, что $a \leq b$, если $b = a^k$ для некоторого целого числа $k \in \mathbb{Z}$.

I.3.13. Упражнения. Найти наименьший (минимальный) элемент в множестве M или доказать, что они не существуют в каждом из следующих случаях:

I.3.13.1. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с обычным порядком и M множество рациональных чисел из интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

I.3.13.2. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с обычным порядком и M - множество рациональных чисел из отрезка $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

I.3.13.3. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с порядком, который был определен **в** I.3.12.1 для $M = \mathbb{N}$ и для $M = \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

I.3.14. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

I.3.14.1. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с обычным порядком $\leq$ не является вполне упорядоченным.

I.3.14.2. Множество действительных чисел из отрезка $[0,1]$ с обычным порядком $\leq$ не является вполне упорядоченным.

I.3.15. Определение. Частично упорядоченные множества $(A,<)$ и $(B,<)$ называются *подобными,* если существует такая биекция $\xi : A \to B$, что $a_1 < a_2$ тогда и только тогда когда $\xi(a_1) < \xi(a_2)$ для любых $a_1, a_2 \in A$.

I.3.16. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

I.3.16.1. Множество действительных чисел $(\mathbb{R},<)$ с обычным порядком является подобным интервалу $((0,1),<)$ с обычным порядком.

I.3.16.2. Множество действительных чисел $(\mathbb{R},<)$ с обычным порядком не является подобным отрезку $([0,1],<)$ с обычным порядком.

I.3.16.3. Множество рациональных чисел $(\mathbb{Q},<)$ с обычным порядком не является подобным множеству целых чисел $(\mathbb{Z},<)$ с обычным порядком.

I.3.16.4. Пусть $(A,<)$, $(B,<)$ и $(C,<)$ – частично упорядоченные множества. Если отображения $\xi : (A,<) \to (B,<)$ и $\eta : (B,<) \to (C,<)$ являются подобиями, то и отображения $\xi^{-1} : (B,<) \to (A,<)$ и $\eta \circ \xi : (A,<) \to (C,<)$ являются подобиями.

I.3.17. Замечание. Из определений I.3.15. и I.1.1 следует, что подобные частично упорядоченные множества являются эквивалентными. А из упражнения I.3.16.3 и теоремы I.1.7 следует, что эквивалентные множества могут не быть подобными.

I.3.18. Теорема. *Пусть $(A,<)$ и $(B,<)$ являются конечными линейно упорядоченными множествами. Если множества A и B эквивалентны, т.е. имеют одинаковое число элементов, то упорядоченные множества $(A,<)$и $(B,<)$ являются подобными*

Доказательство. Пусть множества $(A,<)$ и $(B,<)$ имеют одинаковое число элементов, и n - число элементов каждого из этих множеств.

По индукции построим возрастающие последовательности $a_1 < \ldots < a_n$ и $b_1 < \ldots < b_n$ элементов из множеств A и B, соответственно, следующим образом:

Согласно теореме I.3.10 множества $(A,<)$ и $(B,<)$ являются вполне упорядоченными, и значит, в каждом из них имеется наименьший элемент.

В качестве a_1 и b_1 возьмем наименьшие элементы множеств A и B, соответственно.

Допустим, что для натурального числа $k < n-1$ уже определены возрастающие последовательности элементов $a_1 < \ldots < a_k$ и
$b_1 < \ldots < b_k$.

В качестве a_{k+1} и b_{k+1} возьмем наименьшие элементы множеств $A\setminus\{a_1,\ldots,a_k\}$ и $B\setminus\{b_1,\ldots,b_k\}$, соответственно.

Тогда $a_1 < \ldots < a_k < a_{k+1}$ и $b_1 < \ldots < b_k < b_{k+1}$ (ибо на каждом шаге мы выбирали наименьший элемент).

Итак, мы построили возрастающие последовательности $a_1 < \ldots < a_n$ и $b_1 < \ldots < b_n$.

Тогда отображение, которое элементу $a_i \in A$ ставит в соответствие элемент $b_i \in B$ (т.е. элемент с тем же индексом) является биективным отображением, сохраняющим порядок.

Этим теорема полностью доказана.

II. КАРДИНАЛЬНЫЕ И ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА.

II.1. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И

ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

II.1.1. Определение. *Мощностью множества* A называется то общее, что имеется у всех множеств эквивалентных множеству A.

В качестве мощности множества A можно рассмотреть, например, класс всех множеств, которые эквивалентны множеству A или ему присвоить некоторый символ.

II.1.2. Обозначение. Для любого множества A его мощность будем обозначать $||A||$.

– Мощность счетного множества, как правило, обозначается через $\aleph_0$ (читается алф ноль).

Так как конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число элементов, то для конечного множества A будем считать, что $||A|| = n$, где n - число элементов множества A.

II.1.3. Определение. Мощности множеств будем называть еще *кардинальными числами.*

В частности, если A - произвольное множество, то его мощность будем называть *кардинальным числом, которое соответствует множеству* A.

II.1.4. Обозначения. Кардинальные числа будем обозначать:

– Для конечных множеств - буквами n, k (возможно с индексами);

– Для счетных множеств - буквой $\aleph_0$;

– Для множества $\mathbb{R}$ всех действительных чисел - буквой $\boldsymbol{c}$, и это кардинальное число называется *мощностью континуума*;

– Для произвольных множеств - буквами $\boldsymbol{m},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ и другими буквами (возможно с индексами).

II.1.5. Определение. Пусть $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{s}$ - кардинальные числа, A и B - такие множества, что $||A|| = \boldsymbol{m}$ и $||B|| = \boldsymbol{s}$. Будем говорить, что кардинальное число $\boldsymbol{m}$ меньше или равно кардинальному числу $\boldsymbol{s}$ (будем писать $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{s}$), если существует инъективное отображение $\varphi : A \to B$.

II.1.6. Замечание. Из определения II.1.5 следует, что если$A \subseteq B$, то $||A|| \leq ||B||$.

II.1.7. Теорема. Если Ω - некоторое множество кардинальных чисел, и $\leq$ – бинарное отношение, которое было введено в II.1.5, то $(\Omega, \leq)$ является частично упорядоченным множеством.

Доказательство. Проверим, что бинарное отношение $\leq$ удовлетворяет аксиомам 1), 2) и 3), указанных в замечании I.3.3.

Так как для любого множества A тождественное отображение $\varepsilon : A \to A$ является инъективным отображением, то $||A|| \leq ||A||$, т.е. бинарное отношение $\leq$ удовлетворяет первой аксиоме.

Пусть теперь A и B - такие множества, что $||A|| \leq ||B||$ и $||B|| \leq ||A||$.

Тогда существуют инъективные отображения $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to A$. Согласно теореме I.2.11, множества A и B будут эквивалентными, и значит, $||A|| = ||B||$, т.е. бинарное отношение $\leq$ удовлетворяет и второй аксиоме.

Пусть теперь A, B, C - такие множества, что $||A|| \leq ||B||$ и $||B|| \leq ||C||$. Тогда существуют инъективные отображения $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$. Так как $\psi \circ \varphi : A \to C$ является инъективным отображением (как суперпозиция инъективных отображений), то $||A|| \leq ||C||$, и значит, бинарное отношение $\leq$ удовлетворяет и третьей аксиоме.

Этим теорема полностью доказана.

II.1.8. Замечание. Позже (см. теорему II.2.22) будет доказано, что *любое множество кардинальных чисел является вполне упорядоченным множеством.*

II.1.9. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

II.1.9.1. $n < \aleph_0$ для любого натурального числа n;

II.1.9.2. $\aleph_0 < \boldsymbol{c}$ и $\aleph_0 \leq \boldsymbol{m}$ для любого бесконечного кардинального числа $\boldsymbol{m}$;

II.1.9.3. $||A|| < ||\{B | B \subseteq A\}||$ для любого множества A;

II.1.9.4. Не существует наибольшего кардинального числа.

II.1.10. Замечание.

На протяжении почти 100 лет существовала, так называемая, *континуум проблема*, которая состоит в следующем:

Существуют ли такое кардинальное число $\boldsymbol{m}$, *что* $\aleph_0 < \boldsymbol{m} < \boldsymbol{c}$.

И только после того, как была развита аксиоматическая теория множеств удалось решить эту проблему.

А именно были построены модели теории множеств, в которых между $\aleph_0$ и $\boldsymbol{c}$ нет никаких кардинальных чисел и были построены модели теории множеств, в которых между $\aleph_0$ и $\boldsymbol{c}$ имеются кардинальные числа. Причем для каждого конечного числа n и для $\aleph_0$ имеются модели, в которых между $\aleph_0$ и $\boldsymbol{c}$ имеются в точности n или $\aleph_0$, соответственно, кардинальных чисел.

В связи с этим в теории множеств иногда рассматривают еще одну аксиому (или ее разновидность), так называемую *континуум гипотезу,* состоящая в том, что:

Утверждается что между $\aleph_0$ и $\boldsymbol{c}$ *нет никаких кардинальных чисел.*

II.1.11. Определение. Пусть $\mathbf{m}$ и $\mathbf{t}$ – произвольные кардинальные числа и пусть A и B - такие множества, что $||A||=\mathbf{m}$ и $||B||=\mathbf{t}$. Если $A\cap B=\emptyset$, то рассмотрим множества:

$C=A\cup B,\quad D=A\times B=\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$ и $M=\{f|f:A\to B\}$. Тогда:

$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{t}$ называется кардинальное число $||A\cup B||$;

произведением $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{t}$ называется кардинальное число $||A\times B||$;

степенью $\mathbf{t}^m$ называется кардинальное число $||\{f|f:A\to B\}||$.

II.1.12. Упражнение. Пусть $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ – произвольные натуральные числа и пусть A и B - такие множества, что $||A||=\mathbf{n}$ и $||B||=\mathbf{k}$. Если $M=\{f|f:A\to B\}$, то индукцией по числу **n,** доказать, что $||M||=\mathbf{k}^n$**.**

II.1.13. Замечание. Если кардинальные числа $\mathbf{m}$ и $\mathbf{t}$ являются натуральными числами, то их сумма и их произведение как кардинальных чисел равны их сумме и их произведению, соответственно, как натуральных чисел.

Кроме того, из упражнения II.1.12 следует, что если кардинальные числа $\mathbf{m}$ и $\mathbf{t}$ являются натуральными числами, то их степень как кардинальных чисел равна их степени как натуральных чисел.

II.1.14. Упражнение. Доказать верность следующих утверждений:

II.1.14.1. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

II.1.14.2. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

II.1.15. Теорема. Если $\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел, то $||\mathbb{R}|| = 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Из теорем I.2.7 и I.2.14 следует, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел эквивалентно множеству всех характеристических функций на множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, и значит, $||\mathbb{R}|| = ||\{f|\, f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}||$. Так как $||\{f|\, f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}|| = 2^{\aleph_0}$ (см. определение II.1.8), то $||\mathbb{R}|| = 2^{\aleph_0}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.1.16. Упражнение. Если **m, s, t** – произвольные кардинальные числа, то доказать верность следующих утверждений:

II.1.16.1. $\mathbf{m}+ \mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{m}$, т.е. сложение является коммутативным;

II.1.16.2. $(\mathbf{m}+\mathbf{s})+\mathbf{t} = \mathbf{m} +(\mathbf{s}+\mathbf{t})$, т.е. сложение является ассоциативным;

II.1.16.3. $\mathbf{m}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{s}\cdot\mathbf{m}$, т.е. умножение является коммутативным;

II.1.16.4. $(\mathbf{m}\cdot\mathbf{s})\cdot\mathbf{t} = \mathbf{s} \cdot(\mathbf{m}\cdot\mathbf{t})$, т.е. умножение является ассоциативным;

II.1.16.5. $(\mathbf{m}+\mathbf{s}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{s}\cdot\mathbf{t} +\mathbf{m}\cdot \mathbf{t}$ и $\mathbf{t}\cdot(\mathbf{m}+\mathbf{s}) = \mathbf{t}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{t}\cdot\mathbf{s}$, т.е. операции сложение и умножение удовлетворяют дистрибутивным законам;

II.1.16.6. $\mathbf{m}\leq \mathbf{m}+\mathbf{s}$;

II.1.16.7. Если $\mathbf{s}\neq\mathbf{0}$, **то** $\mathbf{m}\leq \mathbf{m}\cdot\mathbf{s}$ **и** $\mathbf{m}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

II.1.16.8. Если $\boldsymbol{m}_1 \leq \boldsymbol{m}_2$ и $\boldsymbol{s}_1 \leq \boldsymbol{s}_2$ то $\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{s}_1 \leq \boldsymbol{m}_2+\boldsymbol{s}_2$ и $\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{s}_1 \leq \boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{s}_2$.

II.1.17. Замечание. В дальнейшем будет доказано (см. теорему II.3.8 и следствие II.4.11), что если хотя бы одно из кардинальных чисел **m** или **s** является бесконечным, то $\mathbf{m}+ \mathbf{s}=\max\{\mathbf{m}, \mathbf{s}\}$ и $\mathbf{m}\cdot \mathbf{s}=\max\{\mathbf{m}, \mathbf{s}\}$.

II.1.18. Замечание. Определения суммы и произведения двух кардинальных чисел, данные в II.1.11, могут быть обобщены на произвольное (возможно и бесконечное) число слагаемых и сомножителей, соответственно, следующим образом:

Пусть $\{m_\alpha|\ \alpha \in A\}$ – некоторое множество кардинальных чисел, и пусть $\{B_\alpha|\ \alpha \in A\}$ - такое множество множеств A_α, что $|A_\alpha| = m_\alpha$. Считаем, что $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$.

Рассмотрим множество $B = \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ кардинальное число $m = ||B||$. называется *суммой* множества $\{m_\alpha|\ \alpha \in A\}$ кардинальных чисел m_α и обозначается $m = \sum\limits_{\alpha\in A} m_\alpha$.

Так как $B_\gamma \subseteq B$ для любого $\gamma \in A$, то $m_\gamma \leq \sum\limits_{\alpha\in A} m_\alpha$ для любого $\gamma \in A$.

Кроме того, рассмотрим множество
$C = \prod\limits_{\alpha\in A} B_\alpha = \{f|f : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha, f(\alpha) \in B_\alpha$ для любого $\alpha \in A\}$.
Кардинальное число $||C||$ называется *произведением* множества $\{m_\alpha|\ \alpha \in A\}$ кардинальных чисел m_α и обозначается $m = \prod\limits_{\alpha\in A} m_\alpha$.

II.1.19. Определение. Кардинальное число m называется *регулярным*, если его нельзя представить в виде суммы меньшего чем m кардинальных чисел m_α, каждое из которых меньше чем m.

В противном случае кардинальное число называется *иррегулярным.*

II.1.20. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

II.1.20.1. Натуральное число является регулярным, тогда и только тогда, когда оно равно 1 или 2;

II.1.20.2. Кардинальное число $\aleph_0$ является регулярным;

II.1.21. **Теорема**. Пусть $\{\boldsymbol{m}_\alpha|\ \alpha \in A\}$ – некоторое множество кардинальных чисел, причем $\boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{m}$ для любого $\alpha \in A$. Тогда $\sum\limits_{\alpha\in A} \boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{m}\cdot||A||$.

Доказательство. Если B – некоторое множество мощности $\boldsymbol{m}$, то $B \times A = \{(b,a)|\ b \in B,\ a \in A\}$, и согласно определению II.1.11, $||\{(b,a)|\ b \in B,\ a \in A\}|| = \mathbf{m}\cdot||A||$.

Для каждого $a \in A$ рассмотрим $B_a = \{(b,a)|\ b \in B\}$. Тогда $||B_a|| = ||B|| = \boldsymbol{m}{=}\boldsymbol{m}_a$. Так как $B_a \cap B_c = \emptyset$ для $a \neq c$ и $B \times A = \bigcup\limits_{a\in A} B_a$, то $||B \times A|| = ||\bigcup\limits_{a\in A} B_a|| = \sum\limits_{a\in A} \boldsymbol{m}_a$.

II.1.22. **Теорема**. Пусть $\{m_\alpha|\ \alpha\in A\}$ – некоторое множество кардинальных чисел, причем $\boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{m}$ для любого $\alpha\in A$. Тогда $\prod\limits_{\alpha\in A}\boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{m}^{||A||}$.

Доказательство. Если B – некоторое множество мощности $\boldsymbol{m}$, то $\boldsymbol{m}^{||A||} = ||\{f|f: A\to B\}||$ (см определение II.1.11).

Для каждого элемента $a\in A$ рассмотрим множество $B_a = B$ и возьмем $\widehat{B} = \prod\limits_{a\in A} B_a$. Тогда $||\widehat{B}|| = \prod\limits_{\alpha\in A}\boldsymbol{m}_a$ (см. замечание II.1.18).

Определим отображение $\psi: \{f|f: A\to B\}\to\prod\limits_{a\in A} B_a$ следующим образом:

Каждому отображению $f: A\to B$ поставим в соответствие такой элемент $\varphi\in\prod\limits_{a\in A} B_a$, что $\varphi(a) = f(a)$ для любого $a\in A$. Тогда легко заметить, что $\psi: \{f|f: A\to B\}\to\prod\limits_{a\in A} B_a$ является биекцией, и значит, $\prod\limits_{\alpha\in A}\boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{m}^{||A||}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.2. ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА.

II.2.1. Определение. *Порядковым типом частично упорядоченного множества* называется то общее, что имеется у всех частично упорядоченных множеств, которые ему подобны (см. определение I.3.15).

В качестве порядкового типа частично упорядоченного множества можно взять, например, класс всех частично упорядоченных множеств подобных данному частично упорядоченному множеству, или ему присвоить некоторый символ.

Порядковый тип частично упорядоченного множества $(A, \leq)$ будем обозначать $|(A, \leq)|$.

II.2.2. Определение. *Трансфинитными числами* называются порядковые типы вполне упорядоченных множеств (см. определение **I.**3.9).

Таким образом, трансфинитным числом α, соответствующем вполне упорядоченному множеству $(A, \leq)$, называется то общее, что имеется у всех вполне упорядоченных множеств, которые подобны множеству $(A, \leq)$.

II.2.3. Обозначения. Трансфинитные числа будем обозначать:

– Так как конечные, вполне упорядоченные множества являются подобными тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов (см. теорему I.3.18), то трансфинитные числа для конечных вполне упорядоченных множеств (как и для кардинальных чисел, которые соответствуют конечным множествам) будем обозначать натуральными числами $n,\ k, l$ возможно с индексами;

– Так как множество $(\mathbb{N}, \leq)$ всех натуральных чисел с обычным порядком является вполне упорядоченным множеством, то трансфинитное число, которое соответствует $(\mathbb{N}, \leq)$, будем обозначать через ω_0;

– Для произвольного вполне упорядоченного множества $(M, \leq)$ трансфинитное число, которое ему соответствует, будем обозначать через $|(M, \leq)|$ или греческими буквами α, β, γ (возможно с индексами).

II.2.4. Замечание. Пусть α - произвольное трансфинитное число и $(M, \leq)$ - вполне упорядоченное множество, которое соответствует трансфинитному числу α.

Так как подобные множества являются эквивалентными (см. замечание I.3.17), то мощность $||M||$ множества M определяется однозначно трансфинитным числом α, и поэтому будем писать

$||M|| = |\alpha| = ||(M, \leq)||$.

II.2.5. Теорема. *Пусть* $(A, <)$ *– вполне упорядоченное множество и* $\varnothing \neq B \subseteq A$. *Тогда верно следующее утверждение:*

II.2.5.1. *Множество* $(B, <)$ *является вполне упорядоченным;*

II.2.5.2. *Если отображение* $\xi : (A, <) \to (B, <)$ *является подобием, то* $\xi(a) \geq a$ *для любого элемента* $a \in A$.

Доказательство.

II.2.5.1. Так как $\varnothing \neq B \subseteq A$ и множество $(A, <)$ является линейно упорядоченным, то и $(B, <)$ будет линейно упорядоченным множеством.

Если $\varnothing \neq C \subseteq B$, то $\emptyset \neq C \subseteq A$. Так как множество A является вполне упорядоченным, то C имеет наименьший элемент, и значит, B является вполне упорядоченным множеством.

Этим утверждение II.2.5. 1 доказано.

II.2.5. 2. Допустим противное, т.е. что существует такой элемент $a_0 \in A$, что $\xi(a_0) < a_0$.

Рассмотрим подмножество $C = \{a \in A | \, \xi(a) < a\}$.

Так как $a_0 \in C$, то $C \neq \varnothing$, и значит, в подмножестве C существует наименьший элемент, т.е. такой элемент $c_0 \in C$, что $c_0 \leq x$ для любого элемента $x \in C$.

Так как $c_0 \in C$, то $\xi(c_0) < c_0$. Тогда $\xi(\xi(c_0)) < \xi(c_0)$ (ибо отображение $\xi : (A, <) \to (B, <)$ является подобием), и значит, $\xi(c_0) \in C$, причем $\xi(c_0) < c_0$.

Получили противоречие с тем, что c_0 является наименьшим элементом в множестве C.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.6. Определение. Пусть $(A, <)$ – вполне упорядоченное множество, и $a_0 \in A$. Тогда:

– Множество $\{a \in A | \; a < a_0\}$ называется *отрезком, отсеченным элементом* a_0.

– Множество $\{a \in A | \; a \geq a_0\}$ называется *хвостом, отсеченным элементом* a_0.

II.2.7. Теорема. *Пусть* $(A, <)$ *– вполне упорядоченное множество,* $(B, <) \subseteq (A, <)$ и $a \in B$. *Если* $C = \{x \in B | x < a\}$ *- отрезок, отсеченный элементом* a *в множестве* $(B, <)$, *то не существует отображения* $f : (A, <) \to (C, <)$, которое является подобием.

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует отображение $f:(A,<)\to(C,<)$, которое является подобием. Тогда $f(a)\in f(A)=C=\{x\in B|x<a\}$, и значит, $f(a)<a$.

Получили противоречие с утверждением II.2.5.2**.**

Этим теорема полностью доказана.

II.2.8. Теорема. *Пусть* $(A,<)$ *– вполне упорядоченное множество. Если* B и C *– два различных отрезка в множестве* $(A,<)$, *то множество* $(B,<)$ и $(C,<)$ *не могут быть подобными.*

Доказательство. Пусть b и c такие элементы из множества A, что $B=\{a\in A|\, a<b\}$, и $C=\{a\in A|\ a<c\}$. Тогда $b\neq c$.

Так как множество $(A,<)$ является вполне упорядоченным, то элементы b и c сравнимы между собой.

Допустим, для определенности, что $c<b$. Тогда $C=\{a\in A|\ a<c\}=\{d\in B|\ d<c\}$. Значит C является отрезком в множестве B. Тогда по теореме II.2.7, множества B и C не не могут быть подобными.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.9. Теорема. *Если вполне упорядоченные множества* $(A,<)$ и $(B,<)$ *являются подобными, то существует единственное отображение* $f:(A,<)\to(B,<)$, *которое является подобием.*

Доказательство. Так как вполне упорядоченные множества $(A,<)$ и $(B,<)$ являются подобными, то существует отображение $f:(A,<)\to(B,<)$, которое является подобием. Докажем его единственность.

Допустим противное, т.е. что существует еще одно отображение $\varphi:(A,<)\to(B,<)$, которое тоже является подобием, причем $\varphi\neq f$. Тогда $f(a)\neq\varphi(a)$ для некоторого элемента $a\in A$.

Так как B является вполне упорядоченным множеством, то элементы $f(a)$ и $\varphi(a)$ сравнимы между собой. Допустим, для определенности, что $f\,(a)<\varphi\,(a)$.

Так как отображения $\varphi^{-1}:(B,<)\to(A,<)$ и $\varphi^{-1}\circ f:A\to A$ являются подобиями (см. упражнение I.3.16.4.), то $\varphi^{-1`}\circ f(a)=\varphi^{-1}\,(f(a))<\varphi^{-1}\,(\varphi(a))=a$.

Получили противоречие с утверждением II.2.5.2.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

II.2.10. Следствие. *Если* $(A,<)$ *- вполне упорядоченное множество и отображение* $f:(A,\,<)\to(A,<)$ *является подобием, то отображение* $f:A\to A$ *является тождественным.*

В самом деле, тождественное отображение $\varepsilon : (A,<) \to (A,<)$ является подобием, и согласно предыдущей теореме, $\varepsilon = f$.

II.2.11. Определение. Пусть α и β – трансфинитные числа и $(A,<)$ и $(B,<)$ – такие вполне упорядоченные множества, что $|(A,<)| = \alpha$ и $|(B,<)| = \beta$. Говорим, что $\alpha < \beta$, если вполне упорядоченное множество $(A,<)$ подобно некоторому отрезку вполне упорядоченного множества $(B,<)$, т.е. $\alpha = |\{x \in B | x < b\}|$ для некоторого элемента $b \in B$.

II.2.12. Теорема. *Любое множество* Δ *трансфинитных чисел является частично-упорядоченным множеством относительно бинарного отношения* $<$, *определенного в определении* II.2.11.

Доказательство. Докажем, что бинарное отношение $<$, определенное в определении II.2.11 удовлетворяет условиям 1 и 2 определения I.3.1.

Проверим вначале выполнения условия 1 определения I.3.1.

Допустим противное, т.е. что $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ для некоторых $\alpha, \beta \in \Delta$.

Если $(A,<)$ и $(B,<)$ – такие вполне упорядоченные множества, что $|(A,<)| = \alpha$ и $|(B,<)| = \beta$, то существуют такие элементы $a \in A$ и $b \in B$, и такие отображения

$\xi : A \to \{x \in B | x < b\}$ и $\eta : B \to \{y \in A | y < a\}$, которые являются подобиями. Тогда отображение $\eta \circ \xi : A \to A$ является инъективным, причем $x < z$ тогда и только тогда, когда $\eta \circ \xi(x) < \eta \circ \xi(z)$.

Так как $\eta \circ \xi(A) = \eta(\{y \in B | y < b\}) = \{x \in A | x < \eta(b)\}$, то отображение $\eta \circ \xi : A \to \{x \in A | x < \eta(b)\}$ является подобием, т.е. вполне упорядоченные множества $(A,<)$ подобно некоторому своему отрезку. Получили противоречие с теоремой II.2.7, и значит условие 1 определения I.3.1 выполнено.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ - такие трансфинитные числа, что $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Если $(A,<)$, $(B,<)$ и $(C,<)$ – такие вполне упорядоченные множества, что $|(A,<)| = \alpha$, $|(B,<)| = \beta$ и $|(C,<)| = \gamma$, то существуют такие элементы $a \in A$ и $c \in C$ и такие отображения $\xi : A \to \{x \in B | x < b\}$, $\eta : B \to \{y \in C | y < c\}$, которые являются подобиями.

Так как $\eta \circ \xi(A) = \eta(\{y \in B | y < b\}) = \{x \in A | x < \eta(b)\}$, то отображение $\eta \circ \xi : A \to \{z \in C | z < \eta(b)\}$ является подобием, т.е. вполне упорядоченные множества $(A,<)$ подобно некоторому отрезку вполне упорядоченного множества $(C,<)$, и значит, $\alpha < \gamma$.

Следовательно, выполнено и условие 2 определения I.3.1 выполнено.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.13. Теорема. *Пусть $(A,<)$ – вполне упорядоченное множество и $\alpha = |(A,<)|$. Если $W(\alpha) = \{\gamma|\ \gamma$ - трансфинитное число и $\gamma < \alpha\}$, то множество $(A,<)$ подобно множеству $(W(\alpha),<)$.*

Доказательство. Определим отображение $\xi : A \to W(\alpha)$ следующим образом: $\xi(a) = |(\{x \in A|x < a\},<)|$ для каждого $a \in A$.

Так как $\{x \in A|x < a\}$является отрезком в $(A,<)$, то $\xi(a) < \alpha$, т.е. $\xi(a) \in W(\alpha)$. Значит $\xi : A \to W(\alpha)$ является отображением.

Проверим, что построенное отображение $\xi : (A,<) \to (W(\alpha),<)$ является подобием.

Докажем вначале, что $\xi : A \to W(\alpha)$ – инъекция.

Если $a, b \in A$ и $a \neq b$, то элементы a и b сравнимы между собой. Допустим, для определенности, что $a < b$. Тогда $\{x \in A|x < a\} \subseteq \{x \in A|x < b\}$. Так как $a \in \{x \in A|x < b\}$ и $a < b$, то $\{x \in A|x < a\}$ является отрезком в множестве $\{x \in A|x < b\}$, и значит, $\xi(a) < \xi(b)$.

Итак, мы доказали, что отображение $\xi : A \to W(\alpha)$ является инъективным, причем из неравенства $a < b$ следует, что $\xi(a) < \xi(b)$.

Покажем теперь, что отображение $\xi : A \to W(\alpha)$ является сюрьекцией.

Если $\beta \in W(\alpha)$, то $\beta < \alpha$, и значит, существует такой элемент $c \in A$, что $\beta = |\{x \in A|x < c\}|$ (см. определение II.2.11). Тогда $\xi(c) = \beta$, т.е. отображение $\xi : A \to W(\alpha)$ является сюрьективным.

Осталось показать, что отображение $\xi : A \to W(\alpha)$ является подобием.

Раньше мы показали, что из $a < b$ следует, что $\xi(a) < \xi(b)$.

Пусть теперь $\xi(a) < \xi(b)$ для некоторых элементов $a, b \in A$. Так как $\xi(a) = |\{x \in A|x < a\}|$ и $\xi(b) = |\{x \in A|x < b\}|$, то $\{x \in A|x < a\}$ является отрезком в множестве $\{x \in A|x < b\}$, и значит, $a \in \{x \in A|x < b\}$, т.е. $a < b$.

Эти теорема полностью доказана.

II.2.14. Следствие. *Если γ - трансфинитное число, то $(W(\gamma),<)$ является вполне упорядоченным множеством и γ является его порядковым типом, т.е. $\gamma = |(W(\gamma),<)|$.*

В самом деле, если $(A,<)$ - такое вполне упорядоченное множество, что $\gamma = |(A,<)|$, то, согласно предыдущей теореме, вполне упорядоченное множество $(A,<)$ подобно множеству $(W(\gamma),<)$.

Значит $(W(\gamma),<)$ является вполне упорядоченным множеством, причем $|(W(\gamma),<)| = |(A,<)| = \gamma$.

II.2.15. Теорема. *Пусть* α, β *– произвольные трансфинитные числа, тогда они сравнимы между собой, т.е.* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\beta < \alpha$.

Доказательство. Если $W(\alpha) = \{\gamma | \gamma < \alpha\}$, $W(\beta) = \{\gamma | \gamma < \beta\}$ и $D = W(\alpha) \cap W(\beta) = \{\gamma | \ \gamma < \alpha, \ \gamma < \beta\}$, то из утверждения II.2.5.1 и следствия II.2.14, следует, что $(D, <)$ является вполне упорядоченным множеством, и значит, существует такое трансфинитное число ρ, что $\rho = |(D, <)|$.

Тогда либо $D = W(\alpha)$, либо $D \subset W(\alpha)$.

Если $D = W(\alpha)$, то $\rho = \alpha$.

Пусть теперь $D \subset W(\alpha)$. Тогда $W(\alpha) \setminus D \neq \emptyset$. Так как, согласно следствию II.2.14, множество $(W(\alpha), <)$ является вполне упорядоченным множеством, то в множестве $W(\alpha) \setminus D$ имеется наименьший элемент γ.

Покажем, что $D = W(\gamma)$. Если $\mu \in D$, то $\mu \in W(\alpha) \cap W(\beta)$, и значит, $\mu < \alpha$ и $\mu < \beta$. Так как множество $(W(\alpha), <)$ является вполне упорядоченным и $\gamma, \mu \in W(\alpha)$, то $\mu < \gamma$ либо $\mu = \gamma$, либо $\gamma < \mu$.

Если $\mu < \gamma$, то $\mu \in W(\gamma)$.

Если же $\mu = \gamma$, то (см. определение элемента γ) $\mu = \gamma \in W(\alpha) \setminus D$. Получили противоречие с выбором элемента $\mu \in D$. Следовательно, случай $\mu = \gamma$ невозможен.

Если же $\gamma < \mu$, то $\gamma < \mu < \alpha$ и $\gamma < \mu < \beta$, т.е. $\gamma \in W(\alpha) \cap W(\beta) = D$.

Получили противоречие тому, что $\gamma \in W(\alpha) \setminus D$. Следовательно, и случай $\gamma < \mu$ невозможен.

Итак, мы доказали, что $\mu \in W(\gamma)$. Из произвольности элемента μ следует, что $D \subseteq W(\gamma)$.

Покажем теперь, что $W(\gamma) \subseteq D$. Допустим противное, т.е. $W(\gamma) \not\subseteq D$, и пусть $\mu \in W(\gamma) \setminus D$. Тогда $\mu < \gamma$. Так как $\gamma \in W(\alpha) \setminus D$, то $\gamma < \alpha$, и значит, $\mu < \gamma < \alpha$, т.е. $\mu \in W(\alpha)$, причем $\mu \notin D$. Тогда $\mu \in W(\alpha) \setminus D$. Получили противоречие с тем, что γ – наименьший элемент в $W(\alpha) \setminus D$. Следовательно, $W(\gamma) \subseteq D$.

Итак доказали, что $D = W(\gamma)$. Тогда $\rho = |(D, <)| = |(W(\gamma), <)| = \gamma \leq \alpha$.

Аналогично доказывается, что $\rho \leq \beta$.

Возможно следующие четыре случая:

1. $\rho = \alpha$ и $\rho = \beta$, тогда $\alpha = \beta$;

2. $\rho = \alpha$ и $\rho < \beta$, тогда $\alpha < \beta$;

3. $\rho < \alpha$ и $\rho = \beta$, тогда $\beta < \alpha$;

4. $\rho < \alpha$ и $\rho < \beta$, тогда $\rho \in W(\alpha)$ и $\rho \in W(\beta)$, и значит $\rho \in W(\alpha) \cap W(\beta) = D$.

Но выше было доказано, что $\rho = \gamma \in W(\alpha) \setminus D$. Получили противоречие, следовательно, четвертый случай невозможен.

Так как в каждом из первых трех случаев имеем, что трансфинитные числа α и β сравнимы между собой, то теорема полностью доказана.

II.2.16.Теорема. *Любое множество трансфинитных чисел является вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Пусть A – некоторое множество трансфинитных чисел. Так как, согласно теореме II.2.15, любые два трансфинитных числа сравнимы между собой, то $(A, <)$ является линейно упорядоченным множеством.

Пусть теперь $\emptyset \neq \mathrm{B} \subseteq A$ и $\beta \in B$.

Если β является наименьшим элементом в B, то теорема доказана.

Если же β не является наименьшим элементом в B, то существует такое $\gamma \in B$, что $\gamma < \beta$. Тогда $\gamma \in B \cap W(\beta)$, и значит, $B \cap W(\beta) \neq \emptyset$. Так как, согласно следствию II.2.14, множество $W(\beta)$ является вполне упорядоченным, то в множестве $B \cap W(\beta)$ имеется наименьший элемент μ.

Покажем, что μ является наименьшим элементом и в B.

Пусть $\alpha \in B$. Тогда, согласно теореме II.2.15, числа α и β сравнимы между собой.

Если $\alpha < \beta$, то $\alpha \in B \cap W(\beta)$, и значит $\mu \leq \alpha$ (см. определение μ). Если же $\beta \leq \alpha$, то $\mu < \beta \leq \alpha$.

Итак, мы доказали, что μ является наименьшим элементом в множестве B.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.17. Теорема. (Цермело) *Если M – произвольное множество, то на множестве M можно определить такой порядок $<$, что $(M, <)$ станет вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Если $\widehat{M}$ - множество всех непустых подмножеств множества M, то согласно теореме 0.2.10, существует такое отображение $\psi : \widehat{M} \to M$, что $\psi(A) \in A$ для любого $A \in \widehat{M}$.

Непустое подмножество $A \subseteq M$ будем называть *отмеченным*, если в нем можно задать такой порядок $\prec_A$, что $(A, \prec_A)$ станет вполне упорядоченным множеством, причем $a = \psi(M \backslash \{x \in A | x \prec_A a\})$ для всякого $a \in A$.

Так как в одноэлементном множестве $\{\psi(M)\}$можно определить только тривиальный порядок $\prec_{\{\psi(M)\}}$, причем $(\{\psi(M)\}, \prec_{\{\psi(M)\}})$ будет вполне упорядоченным, и

$\psi(M) = \psi(M \backslash \emptyset) = \psi(M \backslash \{x \in \{\psi(M)\} | x \prec_{\{\psi(M)\}} \psi(M)\}$,
то одноэлементное множество $\{\psi(M)\}$ является отмеченным.

Кроме того, если подмножество $A \subseteq M$ является отмеченным и a является наименьшим элементом в $(A. \prec_A)$, то $\psi(M) = \psi(M \backslash \emptyset) = \psi(M \backslash \{x \in A | x \prec_A a\} = a$, т.е. $\psi(M)$ является наименьшим элементом в любом отмеченном подмножестве $A \subseteq M$.

Если b - наименьший элемент в $A \backslash \{\psi(M)\}$, то $\{\psi(M)\} = \{x \in A$ $| x <_A b\}$, и значит, $\{\psi(M)\}$ является отрезком во вполне упорядоченном множестве $(A, \prec_A)$.

Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

I. Покажем, что для любых двух различных отмеченных подмножеств A и B, одно из них является отрезком в другом, причем на меньшем из них порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают.

Пусть A и B - два различных отмеченных подмножества, и пусть C равно объединению всех подмножеств множества $A \cap B$, каждое из которых является отрезком в $(A, \prec_A)$ и в $(B, \prec_B)$, причем на каждом из них порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают.

Так как $\{\psi(M)\} \subseteq A \cap B$ и $\{\psi(M)\}$ является отрезком в каждом из вполне упорядоченных множеств $(A, \prec_A)$ и $(B, \prec_B)$, причем на одноэлементном множестве $\{\psi(M)\}$ порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают, то $C \neq \emptyset$.

Кроме того, поскольку для любых двух отрезков вполне упорядоченного множества один из них содержится в другом, то из определения множества C следует, что на множестве C порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают.

Если $C \neq A$, то $A \backslash C \neq \emptyset$, и значит, в A существует элемент a, который является наименьшим элементом в $(A \backslash C, \prec_A)$. Тогда $\{x \in A | x \prec_A a\} \subseteq C$

Так как C является объединением некоторых подмножеств множества A, каждое из которых является отрезком в $(A, \prec_A)$ и $a \notin C$, то a не может быть меньше или равен никакому элементу из C (ибо, в противном случае, элемент a, принадлежал бы некоторому из этих отрезков, и тогда элемент a принадлежал бы C). Значит, $c \prec_A a$ для любого $c \in C$, т.е. $C \subseteq \{x \in A | x \prec_A a\} \subseteq C$. Следовательно, $C = \{x \in A | x \prec_A a\}$ т.е. C является отрезком в $(A, \prec_A)$, который отсекается элементом a.

Поскольку A является отмеченным множеством, то $\psi(M\backslash C) = \psi(M\backslash\{x \in A | x \prec_A a\}) = a$, т.е. C будет отрезком в $(A, \prec_A)$, который отсекается элементом $\psi(M\backslash C)$.

Кроме того, если $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset A$ и a' - наименьший элемент в $(A\backslash(C \cup \{\psi(M\backslash C)\}), \prec_A)$, то a' не может быть меньше или равным никакому элементу из $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$(в противном случае $a' \in C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$).

Так как $(A, \prec_A)$ является вполне упорядоченным множеством и a' - наименьший элемент в $(A\backslash(C \cup \{\psi(M\backslash C)\}), \prec_A)$, то $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} = \{x \in A | x \prec_A a'\}$, т.е $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$ является отрезком в $(A, \prec_A)$, который отсекается элементом a'.

Аналогично, если $C \neq B$, то $\psi(M\backslash C) \in B$ и C будет отрезком в $(B, \prec_B)$, который отсекается элементом $\psi(M\backslash C)$, причем если $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset B$ и b' является наименьшим элементом в $(B\backslash(C \cup \{\psi(M\backslash C)\}), \prec_B)$, то $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$ является отрезком в $(B, \prec_B)$, который отсекается элементом b'.

Так как $A \neq B$(см. выбор множеств A и B), то возможны только следующие 3 случая:

1) $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset A$ и $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset B$, и значит, множество $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$ является отрезком в $(A, \prec_A)$ и в $(B, \prec_B)$;

2) $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} = A$ и $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset B$, и значит, множество A является отрезком в $(B, \prec_B)$;

3) $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset A$ и $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} = B$, и значит, множество B является отрезком в $(A, \prec_A)$.

Покажем, что первый случай невозможен.

Допустим противное, т.е. $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset A$ и $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subset B$. Тогда множество $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$ будет отрезком в $(A, \prec_A)$ и в $(B, \prec_B)$. Так как на C порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают, причем $c \prec_A \psi(M\backslash C)$ и $c \prec_B \psi(M\backslash C)$ для любого $c \in C$, то на множестве $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$ порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ тоже будут совпадать.

Из определения множества C следует, что $C \cup \{\psi(M\backslash C)\} \subseteq C$, т.е. $\psi(M\backslash C) \in C$. Получили противоречие с тем, что $\psi(M\backslash C) \in M\backslash C$. Следовательно, этот случай невозможен.

Итак, мы получили, что для любых двух различных отмеченных подмножеств множества M возможны только случаи 2) и 3), и значит, одно из них является отрезком другого, причем меньшее из них равно $C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$.

Кроме того, поскольку на C порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают, причем $c \prec_A \psi(M\backslash C)$ и $c \prec_B \psi(M\backslash C)$ для любого $c \in C$, то и на множестве

$C \cup \{\psi(M\backslash C)\}$ порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ тоже будут совпадать. Значит на меньшем из этих отмеченных множеств порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают.

Этим I этап доказан.

II. Определим на множестве L, которое равно объединению всех отмеченных подмножеств множества M, порядок $\prec$ и покажем, что множество $(L, \prec)$ будет вполне упорядоченным.

Пусть $a, b \in L$. Будем считать, что $a \prec b$ в $(L, \prec)$, если существует такое отмеченное подмножество B, что $a, b \in B$ и $a \prec_B b$ в $(B, \prec_B)$.

Так как для любых двух отмеченных подмножеств A и B, согласно уже доказанному этапу I, одно из этих них является отрезком в другом, причем на меньшем из них порядки $\prec_A$ и $\prec_B$ совпадают, то введенный на множестве L порядок $\prec$, не зависит от выбранного подмножества B.

Значит на множестве L порядок $\prec$ определен корректно.

Проверим, что $(L, \prec)$ является линейно упорядоченным множеством.

Если $a, b \in L$, то существуют такие отмеченные подмножества A и B, что $a \in A$ и $b \in B$. Но согласно уже доказанному этапу I, одно из этих отмеченных подмножеств является отрезком в другом. Значит, оба эти элемента принадлежат одному и тому же отмеченному множеству, которое является вполне упорядоченным. Следовательно, эти элементы сравнимы между собой в этом вполне упорядоченном множестве, и значит они сравнимы в $(L, \prec)$.

Из произвольности элементов a и b следует, что множество $(L, \prec)$ является линейно упорядоченным.

Пусть теперь $\emptyset \neq C \subseteq L$. Тогда существует такое отмеченное подмножество B, что $\emptyset \neq D = C \cap B$, и поскольку $(B, \prec_B)$ является вполне упорядоченным множеством, то множество D обладает наименьшим элементом d.

Докажем, что d является наименьшим элементом в C.

Допустим противное, т.е. d не является наименьшим элементом в C. Тогда, поскольку $(L, \prec)$ является линейно упорядоченным множеством, то существует такой элемент $c \in C$, что $c \prec d$, и значит, $c \notin B$. Существует такое отмеченное множество A, что $c \in A$. Так как $c \notin B$, то (см. I этап доказательства теоремы) B будет отрезком в$(A, \prec_A)$, т.е. $B = \{x \in A | x \prec_A a\}$ для некоторого элемента $a \in A$. Тогда $c \prec d \prec_A a$, и значит, $c \in B$. Получили противоречие. Следовательно, d является наименьшим элементом в C.

Этим мы доказали, что множество $(L, \prec)$ является вполне упорядоченным.

III. Покажем, что определенное выше множество L, является отмеченным подмножеством (см. начало доказательства теоремы).

Пусть $a \in L$. Тогда $a \in B$ для некоторого отмеченного подмножества B. Покажем в начале, что $\{x \in B | x \prec_B a\} = \{x \in L | x \prec a\}$.

Допустим противное, т.е. что $\{x \in B | x \prec_B a\} \neq \{x \in L | x \prec a\}$.

Так как $B \subseteq L$, то $\{x \in B | x \prec_B a\} \subseteq \{x \in L | x \prec a\}$. Тогда существует такой элемент $c \in \{x \in L | x \prec a\}$, что $c \notin \{x \in B | x \prec_B a\}$.

Из определения множества L следует, что существует такое отмеченное подмножество C, что $c \in C$. Так как $C \not\subset B$, то, согласно I этапу доказательства этой теоремы, B является отрезком в множестве C, т.е. $B = \{x \in C | x \prec_C d\}$ для некоторого элемента $d \in C$, и значит, $a \prec_C d$. Тогда $c \prec_C a \prec_C d$, и значит, $c \in B$.

Так как на множестве B порядки $\prec_B$ и $\prec_C$ совпадают, то $c \in \{x \in B | x \prec_B a\}$. Получили противоречие с выбором элемента c. Следовательно $\{x \in B | x \prec_B a\} = \{x \in L | x \prec a\}$.

Тогда $\psi(M \backslash \{x \in L | x \prec a\}) = \psi(M \backslash \{x \in B | x \prec_B a\}) = a$ (ибо B является отмеченным подмножеством).

Итак, мы доказали, что $a = \psi(M \backslash \{x \in L | x \prec a\})$ для любого элемента $a \in L$, т.е. L является отмеченным подмножеством.

IV. Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $L = M$.

Допустим противное, т.е. $L \neq M$. Тогда $M \backslash L \in \widehat{M}$ (определение $\widehat{M}$ см. в начале доказательства теоремы). Пусть $y = \psi(M \backslash L)$ и $L' = L \cup \{y\}$.

Доопределим на L' порядок $\prec$, заданный на L, следующим образом:

Будем считать, что $x \prec y$ для любого $x \in L$.

Тогда из того, что $(L, \prec)$ является вполне упорядоченным множеством следует, что и $(L', \prec)$ будет вполне упорядоченным множеством.

Кроме того, $y = \psi(M \backslash L) = \psi(M \backslash \{x \in L' | x \prec y\})$ и $a = \psi(M \backslash \{x \in L | x \prec a\}) = \psi(M \backslash \{x \in L' | x \prec a\})$ для любого $a \in L'$ и $a \neq y$. Значит L' будет отмеченным подмножеством в множестве M, причем $L \subset L'$.

Получили противоречие с определением множества L.

Следовательно $L = M$, и значит, $(M, \prec)$ будет вполне упорядоченным множеством.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.18. Обозначение. Пусть $(A, <)$ – вполне упорядоченное множество, и $\alpha = |\,(A, <)\,|$. Если $\boldsymbol{m}$ – мощность множества A, т.е. $\boldsymbol{m} = |\,|A|\,|$, то будем писать $|\alpha| = \boldsymbol{m}$.

II.2.19. Теорема. *Если* α и β *– трансфинитные числа, то верны следующие утверждения:*

II.2.19.1. *Если* $|\alpha| < |\beta|$, *то* $\alpha < \beta$;

II.2.19.2. *Если* $\alpha \leq \beta$, *то* $|\alpha| \leq |\beta|$;

II.2.19. 3. *Если* $\alpha = \beta$, *то* $|\alpha| = |\beta|$;

II.2.19. 4. *Если* $|\alpha| = |\beta|$, *то о трансфинитных числах* α *и* β *ничего нельзя сказать, т.е. может быть любая из следующих трех возможностей* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\alpha > \beta$.

Доказательство.

II.2.19.1. Допустим противное, т.е. что α не меньше чем β. Тогда, согласно теореме II.2.15**,** либо $\alpha = \beta$, либо $\beta < \alpha$.

Если $\alpha = \beta$, то существует отображение $\psi : W(\alpha) \to W(\beta)$, которое является подобием. Тогда $\psi : W(\alpha) \to W(\beta)$ является биекцией, и значит, $|\alpha| = ||W(\alpha)|| = ||W(\beta)|| = \beta$.

Получили противоречие.

Следовательно, и этот случай невозможен.

Значит $\beta < \alpha$. Тогда $(W(\beta), <)$ подобно некоторому отрезку $(S, <)$ вполне упорядоченного множества $(W(\alpha), <)$, и значит, множество $W(\beta)$ эквивалентно подмножеству S множества $W(\alpha)$. Тогда $|\beta| = ||W(\beta)|| = ||S|| \leq ||W(\alpha)|| = |\alpha|$.

Получили противоречие с условием утверждения.

Следовательно, и этот случай невозможен.

Этим утверждение II.2.19.1 доказано.

II.2.19.2. Если $\alpha \leq \beta$, то вполне упорядоченное множество $(W(\alpha), <)$ подобно множеству $(W(\beta), <)$ либо подобно некоторому его отрезку, и значит, существует инъективное отображение $\psi : W(\alpha) \to W(\beta)$. Тогда $|\alpha| = ||W(\alpha)|| \leq ||W(\beta)|| = |\beta|$.

Этим утверждение II.2.19.2 доказано.

II.2.19.3. Если $\alpha = \beta$, то $W(\alpha) = W(\beta)$, и значит, $|\alpha| = ||W(\alpha)|| = ||W(\beta)|| = |\beta|$.

Этим утверждение II.2.19.3 доказано.

Верность утверждения II.2.19.4 будет доказано в следующем параграфе, (см. замечание II.3.4) после того как будет определена операция сложения трансфинитных чисел.

II.2.20 . Замечание. Если α и β – конечные трансфинитные числа, то согласно II.2.3, из равенства $|\alpha| = |\beta|$ следует, что $\alpha = \beta$.

II.2.21. Теорема. *Любые два кардинальных числа сравнимы между собой.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{m} \neq \mathbf{s}$ – произвольные кардинальные числа и A и B - такие множества, что $||A|| = \mathbf{m}$ и $||B|| = \mathbf{s}$. Согласно теореме Цермело (см. II.2.17), в каждом из множеств A и B можно определить такой порядок, что $(A, <)$ и $(B, <)$ будут вполне упорядоченными множествами.

Если $\alpha = |(A, <)|$ и $\beta = |(B, <)|$, то согласно теореме II.2.15, трансфинитные числа α и β сравнимы между собой. Допустим, для определенности, что $\alpha \leq \beta$. Тогда, согласно утверждению II.2.19.2, $\mathbf{m}=||A|| = |\alpha| \leq |\beta| = ||B|| = \mathbf{s}$, и поскольку $\mathbf{m} \neq \mathbf{s}$, **то** $\mathbf{m} < \mathbf{s}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.22. Теорема. *Любое множество Δ кардинальных чисел является вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Согласно теореме II.2.21, $(\Delta, <)$ является линейно упорядоченным множеством.

Пусть теперь $\emptyset \neq \Lambda \subseteq \Delta$.

Для каждого кардинального числа $\mathbf{m} \in \Lambda$ рассмотрим такое множество $A_{\boldsymbol{m}}$, что $||A_{\boldsymbol{m}}||=\mathbf{m}$.

Согласно теореме Цермело (см. II.2.17) в каждом из множеств $A_{\boldsymbol{m}}$ можно задать такой порядок $<$, что это множество станет вполне упорядоченным множеством. Если $\alpha_{\boldsymbol{m}} = |(A_{\boldsymbol{m}} <)|$ и $\Omega = \{\alpha_{\boldsymbol{m}} \,|\, \boldsymbol{m} \in \Lambda\}$, то $\boldsymbol{m} = ||A_{\boldsymbol{m}}|| = ||(A_{\boldsymbol{m}} <)|| = |\alpha_{\boldsymbol{m}}|$.

Согласно теореме II.2.16, множество $(\Omega, <)$ является вполне упорядоченным множеством, и значит, Ω содержит наименьший элемент $\alpha_{\boldsymbol{m}\,0}$. Тогда $\boldsymbol{m}_0 \in \Lambda$ и $\boldsymbol{m}_0 = |\alpha_{\boldsymbol{m}\,0}| \leq |\alpha_{\boldsymbol{m}}| = \boldsymbol{m}$ для любого $\boldsymbol{m} \in \Lambda$ т.е. Λ имеет наименьший элемент.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.23. Теорема. *Для любого кардинального числа* $\boldsymbol{m}$ *существует такое кардинальное число* $\boldsymbol{m}'$, *что* $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{m}'$ *и между кардинальными числами* $\boldsymbol{m}$ *и* $\boldsymbol{m}'$ *нет никаких других кардинальных чисел.*

Доказательство. Согласно упражнению II.1.9.3,
$2^{\boldsymbol{m}} = ||\{A|A \subseteq M\}|| > \mathbf{m}$, и значит, $M' = \{\boldsymbol{t} \,|\, \boldsymbol{m} < \boldsymbol{t} \leq 2^{\boldsymbol{m}}\} \neq \emptyset$.

Так как согласно теореме II.2.22, множество M' является вполне упорядоченным, то в нем имеется наименьший элемент $\boldsymbol{m}'$. Тогда $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{m}'$ и между $\boldsymbol{m}$ *и* $\boldsymbol{m}'$ нет никаких кардинальных чисел.

Этим теорема полностью доказано.

II.2.24. Замечание. Согласно теореме II.2.23 для кардинального числа $\aleph_0$ (мощности счетного множества) существует кардинальное число $\aleph_1$ такое, что. $\aleph_0 < \aleph_1$ и между ними нет никаких других кардинальных чисел, т.е. $\aleph_1$ является наименьшим бесконечным, несчетным, кардинальным числом.

Аналогично, для кардинального числа $\aleph_1$ существует такое кардинальное число $\aleph_2$, что $\aleph_1 < \aleph_2$ и между ними нет никаких других кардинальных чисел.

Продолжая этот процесс, мы построим такую возрастающую цепочку $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$ кардинальных чисел, что между ними нельзя вставить никакие другие кардинальные числа.

Позже (см. теорему II.4.7) будет показано, что эта цепочка может быть продолжена таким образом, что каждое трансфинитное число будет индексом некоторого кардинального числа, и всякое кардинальное число будет входить в эту цепочку с некоторым индексом, причем $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

Учитывая вышеизложенное, континуум проблема (см. замечание II.1.10) звучит следующим образом:

Верно ли, что мощность континуума $\mathbf{c}$ равна $\aleph_1$?

И как было отмечено в замечании II.1.10, для каждого натурального числа k имеется модель теории множеств, в которой $\mathbf{c}=\aleph_k$ и имеется модель, в которой $\mathbf{c}> \aleph_s$ для любого натурального числа s.

II.2.25. Теорема. *Для любого кардинального числа $\boldsymbol{m}$ существует такое трансфинитное число $\omega(\boldsymbol{m})$*, что для него выполнены следующие условия:

1. $|\omega(\boldsymbol{m})| = \boldsymbol{m}$;

2. $|\alpha| <\boldsymbol{m}$ *для любого трансфинитного числа* $\alpha < \omega(\boldsymbol{m})$.

Доказательство. Рассмотрим множество Δ всех трансфинитных чисел мощности $\boldsymbol{m}$, т.е. $\Delta = \{\alpha|\ |\alpha| = \boldsymbol{m}\}$.

Из теоремы Цермело (см. II.2.17) следует, что $\Delta \neq \emptyset$. Согласно теореме II.2.16, множество $(\Delta, <)$ является вполне упорядоченным и, следовательно, в нем существует наименьший элемент $\omega(\boldsymbol{m})$. Так как $\omega(\boldsymbol{m}) \in \Delta$, то $|\omega(\boldsymbol{m})|=\boldsymbol{m}$.

Если теперь $\alpha < \omega(\boldsymbol{m})$, то из того, что кардинальное число $\omega(\boldsymbol{m})$ является наименьшим в множестве Δ следует, что $\alpha \notin \Delta$, и значит, $|\alpha| \neq \boldsymbol{m}$.

Так как согласно утверждению II.2.19.2, $|\alpha| \leq |\omega(\boldsymbol{m})| = \boldsymbol{m}$, то $|\alpha| < \boldsymbol{m}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.2.26. Теорема. *Если* ω_0 *- порядковый тип множества* $(\mathbb{N}, <)$ *всех натуральных чисел с обычным порядком, то* $\omega_0 \leq \alpha$ *для любого бесконечного трансфинитного числа* α.

Доказательство. Согласно теореме II.2.14 трансфинитные числа ω_0 и α сравнимы между собой. Так как любой отрезок в множестве $(\mathbb{N}, <)$ имеет вид $\{k|k < n\}$, где n - натуральное число, т.е. является конечным, то α не может быть меньше чем ω_0, и значит, $\omega_0 \leq \alpha$.

II.2.27. Замечание. Из теорем II.2.25 и II.2.26 следует, что $\omega(\aleph_0) = \omega_0$.

II.3. ОПЕРАЦИИ НАД ТРАНСФИНИТНЫМИ ЧИСЛАМИ

II.3.1. Теорема. *Пусть* $(A,<)$ *и* $(B,<)$ *- такие вполне упорядоченные множества, что* $A\cap B=\emptyset$. *Если* $C=A\cup B$, *то рассмотрим на множестве* C *бинарное отношение* $\prec$, *определенное следующим образом:*

Для любых элементов $a,b\in C$ *будем считать, что* $a\prec b$, *если* $a,b\in A$ *и* $a<b$, *или* $a,b\in B$ *и* $a<b$, *или* $a\in A$ *и* $b\in B$.
Тогда множество $(C,\prec)$ *будет вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Из определения бинарного отношения $\prec$ легко следует, что $(C,\prec)$ является линейно упорядоченным множеством.

Пусть теперь $\emptyset\neq D\subseteq C$. Тогда $D\cap A\neq\varnothing$, либо $D\subseteq B$.

Если $D\cap A\neq\varnothing$, то из того, что множество $(A,<)$ является вполне упорядоченным множеством следует, что в множестве $D\cap A$ имеется наименьший элемент d. Тогда для любого элемента $a\in A\cap D$, $d\prec a$ или $d=a$. Кроме того, $d\prec b$ для любого элемента $b\in B$, и значит, для любого элемента $c\in(D\cap A)\cup B\supseteq D\cap(A\cup B)=D$, $d\prec c$ или $d=c$ т.е. d является наименьшим элементом в множестве D.

Если же $D\cap A=\emptyset$, то $D\subseteq B$, и поскольку $(B,<)$ является вполне упорядоченным множеством, то в D имеется наименьший элемент.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.2. Определение. (Сложение трансфинитных чисел). Пусть α и β –трансфинитные числа и $(A,<)$ и $(B,<)$ – такие вполне упорядоченные множества, что $A\cap B=\emptyset$ и $|\,(A,<)\,|=\alpha$ и $|\,(B,<)\,|=\beta$. Если $C=A\cup B$ и $\prec$ порядок, определенный в теореме II.3.1, то трансфинитное число $\gamma=|(C,\prec)|$ называется *суммой* $\alpha+\beta$ *трансфинитных чисел* α и β.

II.3.3. Теорема. *Пусть* α,β *и* γ *- произвольные трансфинитные числа. Тогда верны следующие утверждения:*

II.3.3.1. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$;

II.3.3.2. *Если* $\beta\neq 0$, *то* $\alpha<\alpha+\beta$;

II.3.3.3. $\beta\leq\alpha+\beta$;

II.3.3.4. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, *т.е. сложение трансфинитных чисел ассоциативно;*

II.3.3.5. *Если* $\alpha < \beta$, *то* *существует и притом единственное трансфинитное число* δ *такое, что* $\alpha+\delta = \beta$, *т.е уравнение* $\alpha+x = \beta$ *разрешимо и притом единственным способом.;*

II.3.3.6. *Если* ω_0 *- наименьшее бесконечное трансфинитное число, то* $k + \omega_0 = \omega_0$ *для любого натурального числа* k;

II.3.3.7. *Если* β *- бесконечное трансфинитное число, то* $k+\beta = \beta$ *для любого натурального числа* k;

II.3.3.8. *Если* $\beta < \gamma$, *то* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Доказательства:

II.3.3.1. Пусть $(A, <)$ и $(B, <)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $A \cap B = \emptyset$ и $|\,(A, <)\,| = \alpha$ и $|\,(B, <)\,| = \beta$. Тогда $||A|| = |\alpha|$ и $||B|| = |\beta|$.

Если $C = A \cup B$ и $\prec$ - порядок, определенный в теореме II.3.1, то $|\alpha + \beta| = ||(C, \prec)|| = ||A \cup B|| = |\alpha| + |\beta|$.

Этим утверждение II.3.3.1 доказано.

II.3.3.2. $(A, <)$ и $(B, <)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $A \cap B = \emptyset$ и $|\,(A, <)\,| = \alpha$ и $|\,(B, <)\,| = \beta$. Из того, что $\beta \neq 0$, следует, что $B \neq \emptyset$, и значит, в B существует наименьший элемент $b_0 \in B$.

Если $C = A \cup B$ и $\prec$ -порядок, указанный в теореме II.3.1, то $A = \{c \in C | c \prec b_0\}$, и значит, A является отрезком в $(C, \prec)$, т.е. $\alpha < \alpha + \beta$.

Этим утверждение II.3.3.2 доказано.

II.3.3.3. Допустим противное. Тогда, согласно теореме II.2.15, $\alpha+\beta < \beta$.

Если $(A, <)$ и $(B, <)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $\alpha = |(A, <)|$ и $\beta = |(B, <)|$, то $\alpha+\beta = |(A \cup B, \prec)|$ (см. II.3.2), и значит (см. II.2.11.), вполне упорядоченное множество $(A \cup B, \prec)$ подобно некоторому отрезку вполне упорядоченного множества $(B, <)$, причем $(B, <) \subseteq (A \cup B, \prec)$. Получили противоречие с теоремой II.2.7.

Этим утверждение II.3.3.3 доказано.

II.3.3.4. Пусть $(A, <)$, $(B, <)$ и $(C, <)$ - такие попарно не пересекающиеся вполне упорядоченные множества, что $\alpha = |\,(A, <)\,|$, $\beta = |\,(B, <)\,|$ и $\gamma = |\,(C, <)\,|$.

Если $(\alpha + \beta) + \gamma = |((A \cup B) \cup C, \prec)|$ и $\alpha + (\beta + \gamma) = |(A \cup (B \cup C), \prec')|$, то для любых $a, b \in (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$, рассматривая различные случаи ($a, b \in A$ и $a < b$, либо $a \in A$ и $b \notin A$, либо $a, b \in B$ и $a < b$, либо $a \in B$ и $b \in C$, либо $a, b \in C$ и $a < b$), легко проверяется, что $a \prec b$ тогда и только тогда когда $a \prec' b$. Значит, $((A \cup B) \cup C, \prec) = (A \cup (B \cup C), \prec')$. Тогда

$(\alpha + \beta) + \gamma = |((A \cup B) \cup C, \prec)| = |(A \cup (B \cup C), \prec')| = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Этим утверждение II.3.3.4 доказано.

II.3.3.5. Пусть $(A, <)$ и $(B, <)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $\alpha = |(A, <)|$ и $\beta = |(B, <)|$. Так как $\alpha < \beta$, то существует такой элемент $b \in B$, что множество $(A, <)$ подобно отрезку $(\{x \in B | x < b\}, <)$, и значит, $\alpha = |(\{x \in B | x < b\}, <)|$.

Если $\delta = |(\{x \in B | x \geq b\}, <)|$, то из того, что $\{x \in B | x < b\} \cap \{x \in B | x \geq b\} = \emptyset$ и $\{x \in B | x < b\} \cup \{x \in B | x \geq b\} = B$ следует, что $\alpha + \delta = |(\{x \in B | x < b\}, <)| + |(\{x \in B | x \geq b\}, <)| = |(B, <)| = \beta$.

Проверим теперь единственность трансфинитного числа δ.

Допустим противное, т.е. что $\beta = \alpha + \delta$ и $\beta = \alpha + \sigma$, причем $\delta \neq \sigma$.

Так как любые трансфинитные числа сравнимы между собой, то не нарушая общности, можем считать, что $\delta < \sigma$. Тогда, согласно доказанному выше, существует такое трансфинитное число λ, что $\sigma = \delta + \lambda$, причем $\lambda \neq 0$.

Так как сложение трансфинитных чисел ассоциативно (см. утверждение II.3.3.4), то $\beta = \alpha + \sigma = \alpha + (\delta + \lambda) = (\alpha + \delta) + \lambda = \beta + \lambda$. Получили противоречие с утверждением II.3.3.2.

Этим утверждение II.3.3.5 полностью доказано.

II.3.3.6. Согласно теореме II.2.26, ω_0 является порядковым типом множества $(\mathbb{N}, <)$ всех натуральных чисел с обычным порядком, т.е. $\omega_0 = |(\mathbb{N}, <)|$.

Рассмотрим некоторое множество $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, состоящее из k элементов и такое, что $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Определим на A порядок следующим образом: считаем, что $a_i < a_s$, если $i < s$. Тогда $k = |(A, <)|$ (см. II.2.3).

Согласно определению II.3.2, $k + \omega_0 = |(A \cup \mathbb{N}, \prec)|$.

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathrm{N} \to A \cup \mathbb{N}$, переводящее натуральное число t в элемент a_t, если $1 \leq t \leq k$ и в число $t - k$, если $t > k$.

Из определения порядка $\prec$ на множестве $A \cup \mathbb{N}$ (см. определение II.3.2) следует, что $\varphi : (\mathbb{N}, <) \to (A \cup \mathbb{N}, \prec)$ является подобием, и значит, $\omega_0 = |(\mathbb{N}, <)| = |(A \cup \mathbb{N}, \prec)| = k + \omega_0$.

Этим утверждение II.3.3.6 доказано.

II.3.3.7. Пусть β - бесконечное трансфинитное число и $(B, <)$ - такое вполне упорядоченное множество , что $\beta = |(B, <)|$. Если k - натуральное число и $(A, <)$ - такое вполне упорядоченное множество, что $k = |(A, <)|$ и $A \cap B = \emptyset$, то $k + \beta = |(A \cup B, \prec)|$ (см. определение II.3.2).

Так как, согласно утверждению II.3.3.6, $k + \omega_0 = \omega_0$, то, не нарушая общности, можем считать, что $\omega_0 < \beta$.

Согласно утверждению II.3.3.6, существует такое трансфинитное число δ, что $\beta = \omega_0 + \delta$. Тогда, учитывая утверждения II.3.3.4 и II.3.3.6, получим, что $k + \beta = k + \omega_0 + \delta = \omega_0 + \delta = \beta$.

Этим утверждение II.3.3.7 доказано.

II.3.3.8. Согласно утверждению II.3.3.5, $\gamma = \beta + \sigma$ для некоторого ненулевого трансфинитного числа σ. Тогда $\alpha + \gamma = \alpha + \beta + \sigma$, и согласно утверждению II.3.3.2, $\alpha + \beta < \alpha + \beta + \sigma = \alpha + \gamma$.

Этим утверждение II.3.3.8 доказано.

II.3.4. Замечание. Из утверждений II.3.3.2 и II.3.3.1 следует, что $\omega_0 < \omega_0 + 1$ и $|\omega_0| = \aleph_0 = \aleph_0 + 1 = |\omega_0 + 1|$.

II.3.5. Определение. Трансфинитное число α называется *непредельным*, если существует такое трансфинитное число γ, что $\alpha = \gamma + 1$.

В противном случае трансфинитное число α называется *предельным.*

II.3.6. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

II.3.6. 1. Любое натуральное число является непредельным;

II.3.6. 2. Конечное трансфинитное число является предельным тогда и только тогда, когда оно равно 0;

II.3.6.3. Для любого бесконечного кардинального числа $\mathbf{m}$ наименьшее трансфинитное число $\omega(\mathbf{m})$ мощности $\mathbf{m}$ является предельным.

В частности трансфинитное число $\omega_0 = \omega(\aleph_0)$ является предельным.

II.3.7. Теорема. *Если α – бесконечное трансфинитное число, то верны следующие утверждения:*

II.3.7.1. *Если α – непредельное трансфинитное число, то существуют такое натуральное число n и такое предельное трансфинитное число α_0, что $\alpha = \alpha_0 + n$;*

II.3.7.2. *Если α – предельное трансфинитное число, то $\beta + \omega_0 \leq \alpha$ для любого трансфинитного числа $\beta < \alpha$.*

Доказательство.

II.3.7.1. Так как трансфинитное число α является непредельным, то $\alpha = \gamma + 1$ для некоторого трансфинитного числа γ.

Если Ω - множество всех таких трансфинитных чисел σ, что $\alpha = \sigma + k$, где k - натуральное число, то $\Omega \neq \emptyset$ (ибо $\gamma \in \Omega$), и значит, Ω содержит наименьший элемент α_0.

Покажем, что α_0 является предельным числом.

Допустим противное, т.е. что $\alpha_0 = \gamma_0 + 1$. Так как $\alpha_0 \in \Omega$, то $\alpha = \alpha_0 + n_0$ для некоторого натурального числа n_0. Тогда $\gamma_0 < \alpha_0$ (см. II.3.3.2) и $\alpha = (\gamma_0 + 1) + n_0 = \gamma_0 + (1 + n_0)$. Получили противоречие с выбором числа α_0, и значит, α_0 является предельным трансфинитным числом.

Этим утверждение II.3.7.1 доказано.

II.3.7.2. Допустим противное, т.е. что $\beta < \alpha$ и $\alpha < \beta + \omega_0$ для некоторого трансфинитного числа β. Тогда (см. утверждение II.3.3.5) $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторого трансфинитного числа $\gamma \neq 0$.

Так как для любого натурального числа n трансфинитное число $\beta + n$ является непредельным, то из предельности числа α следует, что γ является бесконечным трансфинитным числом, и значит $\omega_0 \leq \gamma$. Тогда (см. утверждение II.3.3.8) $\alpha < \beta + \omega_0 \leq \beta + \gamma = \alpha$. Получили противоречие.

Этим утверждение II.3.7.2 доказано.

II.3.8. Теорема. *Если* $\boldsymbol{s}$ *и* $\boldsymbol{m}$ *- такие кардинальные числа, что хотя бы одно из них является бесконечным трансфинитным числом, то* $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{m} = max\ \{\boldsymbol{s}, \mathbf{m}\}$

Доказательство. В начале докажем теорему для случая $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{m}$.

Пусть $\omega(\boldsymbol{m})$ - наименьшее трансфинитное число мощности $\boldsymbol{m}$ и $W(\omega(\boldsymbol{m})) = \{\gamma | \gamma$ *- трансфинитное число и* $\gamma < \omega(\boldsymbol{m})\}$.

Если A и B - такие множества, что $A \cap B = \emptyset$ и $||A|| = ||B|| = \boldsymbol{m}$, то $||A \cup B|| = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}$. Так как (см. теорему II.2.25) $\boldsymbol{m} = |\omega(\boldsymbol{m})| = ||W(\omega(\boldsymbol{m}))||$, то существуют биективные отображения $f : A \to W(\omega(\boldsymbol{m}))$ и $\varphi : B \to W(\omega(\boldsymbol{m}))$.

Согласно утверждению II.3.7.1, для каждого трансфинитного числа $\gamma \in W(\omega(\boldsymbol{m}))$ существуют такое предельное трансфинитное число $\zeta(\gamma)$ и такое неотрицательное целое число $k(\gamma)$, что $\gamma = \zeta(\gamma) + k(\gamma)$ (если γ - натуральное число, то возьмем $\zeta(\gamma) = 0$ и если γ - предельное трансфинитное число, то возьмем $k(\gamma) = 0$).

Определим отображение $\psi : A \cup B \to W(\omega(\boldsymbol{m}))$ следующим образом:

Если $a \in A$, то положим $\psi(a) = \zeta(f(a)) + 2 \cdot k(f(a))$, и если $a \in B$, то положим $\psi(a) = \zeta(\varphi(a)) + 2 \cdot k(\varphi(a)) + 1$.

Легко заметить, что отображение $\psi : A \cup B \to W(\omega(\boldsymbol{m}))$ является биекцией. Тогда $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} = ||A \cup B|| = ||W(\omega(\boldsymbol{m}))|| = \boldsymbol{m}$.

Этим теорема доказана для случая, когда $\mathbf{s} = \mathbf{m}$.

Докажем теперь теорему для общего случая.

Пусть A и B - такие множества, что $A \cap B = \emptyset$, $||A|| = \mathbf{s}$ $||B|| = \mathbf{m}$. Тогда $||A \cup B|| = \mathbf{s} + \mathbf{m}$.

Не нарушая общности, можем считать, что $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{m}$. Расширим множество A до такого множества C, что $C \cap B = \emptyset$ и $||C|| = \boldsymbol{m}$. Тогда $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{s} + \boldsymbol{m} = ||A \cup B|| \leq ||C \cup B|| = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} = max\ \{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}\}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.9. Следствие. *Для любого натурального числа* k и любых кардинальных чисел $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, ..., \boldsymbol{m}_k$, среди которых имеется хотя бы одно бесконечное число, $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + ... + \boldsymbol{m}_k = \max\{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, ..., \boldsymbol{m}_k\}$.

II.3.10. Теорема. *Пусть* $(A, <)$ *и* $(B, <)$ *- произвольные вполне упорядоченные множества, и* $C = A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. *Рассмотрим на множестве* C *бинарное отношение* $\prec$, *определенное следующим образом:*

Для любых элементов $(a, c) \neq (b, d) \in C$ *будем считать что* $(a, c) \prec (b, d)$, *если* $a < b$ *(*c *и* d *произвольные), или* $a = b$ *и* $c < d$.
Тогда множество $(C, \prec)$ *будет вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Из определения бинарного отношения $\prec$ легко следует , что $(C, \prec)$ является линейно упорядоченным множеством.

Проверим теперь, что $(, \prec)$ является вполне упорядоченным множеством.

Пусть $\emptyset \neq D \subseteq C$ и $A_1 = \{a \in A\ |\exists b_a \in B,\ (a, b_a) \in D\}$. Так как $D \neq \varnothing$, то $A_1 \neq \emptyset$, и поскольку $(A, <)$ является вполне упорядоченным множеством, то в множестве A_1 имеется наименьший элемент a_0.

Рассмотрим множество $B_1 = \{b \in B |\ (a_0, b) \in D\}$. Тогда $B_1 \neq \emptyset$, и поскольку $(B, <)$ является вполне упорядоченным множеством, то в множестве B_1 существует наименьший элемент b_0.

Покажем теперь, что (a_0, b_0) является наименьшим элементом в множестве D.

Ясно, что $(a_0, b_0) \in D$. Возьмем произвольный элемент $(a, b) \in D)$ и $(a, b) \neq (a_0, b_0)$. Тогда $a \in A_1$, и значит $a_0 \leq a$.

Если $a_0 < a$, то $(a_0, b_0) \prec (a, b)$ (см.формулировку теоремы, определение бинарного отношения в $\prec$).

Если же $a_0 = a$, то $b \neq b_0$, и значит $b_0 < b$. Тогда $(a_0, b_0) \prec (a, b)$.

Итак, мы доказали, что элемент (a_0, b_0) является наименьшим элементом в множестве D. Из произвольности множества D следует, что $(C, \prec)$ является вполне упорядоченным множеством.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.11. Определение (Произведение трансфинитных чисел). Пусть α и β – произвольные трансфинитные числа и $(A,<)$ и $(B,<)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $|(A,<)| = \alpha$ и $|(B,<)| = \beta$. Если $C = A \times B = \{(a,b)|\ a \in A,\ b \in B\}$ и на этом множестве определен порядок $\prec$, указанный в теореме II.3.10, то трансфинитное число $|(C,\prec)|$ называется *произведением трансфинитного числа* α *на трансфинитное число* β и обозначается $\alpha \cdot \beta$.

II.3.12. Теорема. *Если* α, β, γ *– произвольные трансфинитные числа, то* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Доказательство. Пусть $(A,<)$, $(B,<)$ и $(C,<)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $\alpha = |\,(A,<)\,|$, $\beta = |\,(B,<)\,|$ и $\gamma = |\,(C,<)\,|$. Тогда $|((A \times B) \times C, \prec)| = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ и $|(A \times (B \times C), \prec')| = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Так как $(A \times B) \times C = \{(a,b,c)|\ a \in A,\ b \in B,\ c \in C\} = A \times (B \times C)$, то для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что порядок $\prec$ и порядок $\prec'$ совпадают.

Пусть $(a_1,b_1,c_1) \prec (a_2,b_2,c_2)$. Тогда:

Либо $(a_1,b_1) < (a_2,b_2)$ и c_1, c_2 - произвольные элементы из C;

Либо $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ и $c_1 < c_2$.

Если $(a_1,b_1) < (a_2,b_2)$, то либо $a_1 < a_2$ и b_1, b_2, c_1, c_2 - произвольные элементы из B, либо $a_1 = a_2$ и $b_1 < b_2$.

Следовательно, возможны следующие три случая:

$a_1 < a_2$ и b_1, b_2, c_1, c_2 - произвольные элементы;

$a_1 = a_2, \quad b_1 < b_2$ и c_1, c_2 - произвольные элементы из C;

$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$ и $c_1 < c_2$.

Тогда, рассматривая в отдельности каждый из этих трех случаев, легко проверяется, что $(a_1,b_1,c_1) \prec' (a_2,b_2,c_2)$.

Аналогично проверяется, что если $(a_1,b_1,c_1) \prec' (a_2,b_2,c_2)$, то $(a_1,b_1,c_1) \prec (a_2,b_2,c_2)$, и значит, порядки $\prec$ и $\prec'$ совпадают.

Тогда $|(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = |((A \times B) \times C, \prec)| = |(A \times (B \times C), \prec')| = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.13. Теорема. *Если* α, β, γ *– произвольные трансфинитные числа, то* $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

Доказательство. Пусть $(A,<)$, $(B,<)$ и $(C,<)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $\alpha = |\,(A,<)\,|$, $\beta = |\,(B,<)\,|$ и $\gamma = |\,(C,<)\,|$.

Тогда $|((A\cup B)\times C),\prec)| = (\alpha+\beta)\cdot\gamma)$ и $|(A\times C)\cup(B\times C),\prec')| = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$. Так как $(A\cup B)\times C) = \{(a,b)|\ a\in A\cup B, b\in C\} = \{(a,b)|\ a\in A,\ b\in C\}\cup\{(a,b)|\ a\in B,\ b\in C\} = (A\times C)\cup(B\times C)$, то для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что порядки $\prec$ и $\prec'$ совпадают.

Пусть $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$в $((A\cup B)\times C),\prec)$. Тогда:

Либо $a_1<a_2$ в $(A\cup B,<)$ и b_1,b_2 - произвольные элементы из C;

Либо $a_1=a_2$ и $b_1<b_2$ в $(C,<)$.

Пусть $a_1<a_2$ в $(A\cup B,<)$.

Если $a_1,a_2\in A$ или $a_1,a_2\in B$, то $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C,\prec')$ или $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(B\times C,\prec')$, соответственно.

Если же $a_1\in A$ и $a_2\in B$, то $(a_1,b_1)\in A\times C$ а $(a_2,b_2)\in B\times C$, и значит, $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C)\cup(B\times C),\prec')$.

Если же $a_2\in A$ а $a_1\in B$, то $a_2<a_1$ в $(A\cup B,<)$, но это не так, ибо $a_1<a_2$, и значит, этот последний случай не может быть.

Итак, мы доказали, что если $a_1<a_2$, то $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C)\cup(B\times C),\prec')$.

Пусть теперь $a_1=a_2$ и $b_1<b_2$ в $(C,<)$. Тогда $a_1=a_2\in A$, и значит, $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times C$, причем $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C,\prec')$ или $a_1=a_2\in B$, и значит, $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in B\times C$, причем $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(B\times C,\prec')$. Следовательно, $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C)\cup(B\times C),\prec')$.

Итак, мы доказали, что из неравенства $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$ следует неравенство $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$.

Обратно, пусть $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C)\cup(B\times C),\prec')$.

Если $(a_1,b_1)\in A\times C$ и $(a_2,b_2)\in B\times C$, то $a_1\in A$ и $a_2\in B$. Тогда $a_1<a_2$ в $(A\cup B,<)$, и значит $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$в $((A\cup B)\times C),\prec)$.

Если (a_1,b_1) и $(a_2,b_2)\in A\times C$, то $a_1,a_2\in A$ и $a_1<a_2$ в $(A,<)$, и значит, $a_1<a_2$ в $(A\cup B,<)$. Тогда $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$в $((A\cup B)\times C),\prec)$. Аналогично, если (a_1,b_1) и $(a_2,b_2)\in B\times C$, то $a_1,a_2\in B$ и $a_1<a_2$ в $(B,<)$, и значит, $a_1<a_2$ в $(A\cup B,<)$. Тогда $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$в $((A\cup B)\times C),\prec)$.

Если $(a_1,b_1)\in A\times C$ и $(a_2,b_2)\in B\times C$, то $a_1\in A$ и $a_2\in B$. Тогда $a_1<a_2$ в $(A\cup B,<)$, и значит, $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$ в $((A\cup B)\times C),\prec)$.

Если же $(a_1,b_1)\in B\times C$ и $(a_2,b_2)\in A\times C$, то $a_1\in A$ и $a_2\in B$, и значит, $(a_2,b_2)\prec'(a_1,b_1)$ в $(A\times C)\cup(B\times C),\prec')$. Получили противоречие, ибо по допущению, $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ в $(A\times C)\cup(B\times C),\prec')$. Значит этот последний случай невозможен.

Итак, мы доказали, что из неравенства $(a_1,b_1)\prec'(a_2,b_2)$ следует неравенство $(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$.

Значит порядки $\prec$ и $\prec'$ совпадают.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.14. Теорема. $\omega_0 \cdot 2 = \omega_0$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2\}$ и $a_1 < a_2$. Если $(\mathbb{N}, <)$ - множество всех натуральных чисел с обычным порядком, то $|(\mathbb{N} \times A, \prec)| = \omega_0 \cdot 2$.

Определим отображение $f : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$f(k, a_i) = 2 \cdot (k - 1) + i$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, 2\}$

и проверим, что отображение $f : (\mathbb{N} \times A, \prec) \to (\mathbb{N}, <)$ являются подобием.

В самом деле, если $k \neq n$, то неравенство $f(k, a_i) = 2 \cdot (k - 1) + i < 2 \cdot (n - 1) + j = f(n, a_j)$ выполняется тогда и только тогда, когда $k < n$ и $i, j \in \{1, 2\}$ - любые.

Кроме того, $f(s, a_1) = 2 \cdot (s - 1) + 1 < 2 \cdot (s - 1) + 2 = f(s, a_2)$ для любого $s \in N$.

Значит, отображение $f : (\mathbb{N} \times A, \prec) \to (\mathbb{N}, <)$ являются подобием, а потому $\omega_0 \cdot 2 = \omega_0$.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.15. Теорема *Если α и β – произвольные трансфинитные числа, то* $|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|$.

Доказательство. Пусть $(A, <)$ и $(B, <)$ - такие вполне упорядоченные множества, что $|\,(A, <)\,| = \alpha$ и $|\,(B, <)\,| = \beta$.

Тогда $|\alpha \cdot \beta| = |(|\,(A, <)\,| \cdot |\,(B, <)\,|)| = ||\,(A, <)\,|| \cdot ||\,(B, <)\,|| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Этим теорема полностью доказана.

II.3.16. Замечание. Определение суммы двух трансфинитных чисел, данное в II.3.2, может быть обобщено и на бесконечное число трансфинитных чисел следующим образом:

Пусть δ - произвольное трансфинитное число, $\{\alpha_\gamma | \gamma < \delta\}$ - множество трансфинитных чисел α_γ, пронумерованное трансфинитными числами $\gamma < \delta$ и $\{(A_\gamma, <) | \gamma < \delta\}$ - такое множество вполне упорядоченных множеств $(A_\gamma, <)$, что $|(A_\gamma, <)| = \alpha_\gamma$ и $A_\gamma \cap A_\rho = \emptyset$, если $\gamma \neq \rho$.

Рассмотрим множество $A = \bigcup\limits_{\gamma < \delta} A_\gamma$, и определим на A порядок $\prec$ следующим образом:

Считаем, что $a \prec b$ если $a \in A_\lambda$, $b \in A_\sigma$ и $\lambda < \sigma$ или $\lambda = \sigma$ и $a < b$ в $(A_\lambda, <)$.

Тогда аналогично доказательству теоремы II.3.1, доказывается, что $(A, \prec)$ является вполне упорядоченным множеством. Положим $\sum\limits_{\gamma<\delta} \alpha_\gamma = |(A, \prec)|$.

II.3.17. Теорема. *Если все трансфинитные числа* α_γ, *указанные в замечании* II.3.16, *равны между собой* (т.е. $\alpha_\gamma = \alpha$ *для любого* $\gamma < \delta$), *то* $\sum\limits_{\gamma<\delta} \alpha_\gamma = \delta \cdot \alpha$.

Доказательство. Пусть $B = W(\delta) = \{\gamma | \gamma < \delta\}$ и $(A, <)$ - такое вполне упорядоченное множество, что $|(A, <)| = \alpha$. Если $C = B \times A$ и $\prec$ - порядок, указанный в теореме II.3.10, то $|(C, \prec)| = \delta \cdot \alpha$.

Для каждого $\gamma < \delta$ рассмотрим множество $A_\gamma = \{(\gamma, a) | a \in A\}$. Легко заметить, что множества $(A, <)$ и $(A_\gamma, \prec)$ являются подобными и $C = \bigcup\limits_{\gamma<\delta} A_\gamma$. Если $\prec'$ - порядок на C, определенный согласно замечанию II.3.16, то $|(C, \prec')| = \sum\limits_{\gamma<\delta} \alpha_\gamma$.

Из определения порядков $\prec$ и $\prec'$ легко следует, что $(\lambda, a) \prec' (\sigma, b)$ тогда и только тогда, когда $(\lambda, a) \prec (\sigma, b)$, и значит $\sum\limits_{\gamma<\delta} \alpha_\gamma = |(C, \prec')| = |(C, \prec)| = \delta \cdot \alpha$.

Этим теорема полностью доказана.

II.4. МЕТОД ТРАНСФИНИТНОЙ ИНДУКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ.

Еще со школьной скамьи, всем хорошо известны два варианта формулировки метода математической индукции. Обе эти формулировки эквивалентны между собой в том смысле, что если некоторое утверждение может быть доказано с использованием одной из них, то это утверждение может быть доказано и с помощью второй.

Ниже мы приведем обе формулировки этого метода.

Хотя, как было отмечено выше, эти формулировки метода математической индукции эквивалентны, мы покажем ниже, как одна из этих формулировок может быть обобщена на трансфинитые числа, и поясним, почему другую из формулировок нельзя обобщить на трансфинитные числа.

II.4.1. Метод математической индукции *(I вариант).*

Если некоторое утверждение S верно для натурального числа n_0 (база индукции) и из допущенияят, что это утверждение верно для натурального числа $n \geq n_0$ можно доказать, что S верно и для натурального числа $n+1$, то утверждение S верно для всех натуральных чисел $k \geq n_0$.

II.4.2.Метод математической индукции *(II вариант).*

Если некоторое утверждение S верно для натурального числа n_0 и из допущения, что это утверждение верно для всех натуральных чисел k таких, что $n_0 \leq k < n$, можно доказать, что утверждение S верно и для натурального числа n, то S верно для всех натуральных чисел $k \geq n_0$.

II.4.3. Замечание. Так предельные трансфинитные числа нельзя записать в виде $\alpha + 1$, то, приведенную в II.4.1 формулировку метода математической индукции, нельзя обобщит на трансфинитные числа. А вот формулировку метода математической индукции, приведенную в II.4.2, почти дословно можно обобщить на трансфинитные числа, и мы прийдем к методу трансфинитной индукции (см. II.4.4).

II.4.4. Теорема. (Метод трансфинитной индукции). *Если некоторое утверждение S верно для трансфинитного числа α_0 и из допущения, что это утверждение верно для всех трансфинитных чисел γ таких, что $\alpha_0 \leq \gamma < \beta$ можно доказать, что утверждение S верно и для трансфинитного числа β, то утверждение S верно для всех трансфинитных чисел $\lambda \geq \alpha_0$.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. некоторое утверждение S верно для трансфинитного числа α_0 и из допущения, что это утверждение верно для всех трансфинитных чисел γ таких, что $\alpha_0 \leq \gamma < \beta$ можно доказать, что утверждение S верно и для трансфинитного числа β, но это утверждение не является верным для некоторого трансфинитного числа $\alpha \geq \alpha_0$. Тогда $\alpha > \alpha_0$.

Если Ω - множество всех таких трансфинитных чисел γ, что $\alpha_0 < \gamma \leq \alpha$ и для которых, утверждение S не является верным. Тогда $\Omega \neq \emptyset$, и значит, Ω имеет наименьший элемент γ_0, ибо $(\Omega, <)$ является вполне упорядоченным множеством.

Тогда для любого трансфинитного числа $\alpha_0 \leq \gamma < \gamma_0$ утверждение S является верным. Согласно условию теоремы, утверждение S будет верным и для трансфинитного числа γ_0. Получили противоресие.

Этим теорема полностью доказана.

II.4.5. Применение метода трансфинитной индукции для определения бесконечных степеней трансфинитных чисел.

Пусть α – произвольное трансфинитное число. Для любого трансфинитного числа $\gamma \geq 1$ определим трансфинитное число α^γ следующим образом:

Если $\gamma = 1$, то положим $\alpha^1 = \alpha$. Допустим, что для всех трансфининых чисел $\rho < \sigma$ определены α^ρ. Тогда определим α^σ следующим образом:

Если $\sigma = \delta + 1$ (т.е. σ не является предельным), то степень α^δ уже определена, и мы возьмем $\alpha^\sigma = \alpha^{\delta+1} = \alpha^\delta \cdot \alpha$.

Если σ - предельное число (т.е. σ нельзя представить в виде $\delta+1$), то в качестве α^σ возьмем наименьшее из трансфинитных чисел, которые больше чем любое из чисел α^ρ для $\rho < \sigma$ (числа α^ρ для $\rho < \sigma$, по допущению уже определены).

Итак, мы определили трансфинитное число α^γ для любого трансфинитного числа $\gamma \geq 1$.

II.4.6. Упражнение. Доказать верность следующих утверждений:

II.4.6. 1. $k^{\omega_0} = \omega_0$ для любого натрального числа $k > 1$;

II.4.6. 2. $|k^{\omega_0}| = \aleph_0$ для любого натрального числа $k > 1$.

II.4.7. Теорема. *Если Ω - совокупность всех трансфинитных чисел и Δ - совокупность всех бесконечных кардинальных чисел, то существует такое биективное отображение $\psi : \Omega \to \Delta$, что $\psi(\alpha) < \psi(\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\alpha < \gamma$, т.е. отображение $\psi : (\Omega, <) \to (\Delta, <)$ является подобием.*

Доказательство. Определим отображение $\psi : \Omega \to \Delta$ следующим образом:

Положим $\psi(0) = \aleph_0$ и допустим, что для кажого $\gamma < \alpha$ определено кардинальное число $\psi(\gamma)$.

Согласно замечанию II.1.18, $\psi(\sigma) \le \sum\limits_{\gamma<\delta} \psi(\gamma)$ для любого $\sigma < \alpha$, и значит, существуют такие кардинальные числа $\boldsymbol{m}$, что $\psi(\sigma) < \boldsymbol{m}$ для любого $\sigma < \alpha$.

Возьмем в качестве $\psi(\alpha)$ наименьшее из этих кардинальных чисел.

Итак, для любого трансфинитного числа λ мы определили кардинальное число $\psi(\lambda)$, причем $\psi(\lambda) < \psi(\eta)$, есди $\lambda < \eta$, и значит, отображение $\psi : \Omega \to \Delta$ является инъективным.

Для завершения доказательства теоремы, осталось проверить, что отображение $\psi : \Omega \to \Delta$ является сюръективным.

Допустим противное, и пусть $\boldsymbol{m}$ – наименьшее из таких кардинальных чисел, что $\boldsymbol{m} \notin \psi(\Omega)$.

Рассмотрим множество $\Lambda = \{\gamma \in \Omega | \psi(\gamma) < \boldsymbol{m}\}$ и пусть ν - такое трансфинитное число, что $\nu > \gamma$ для каждого $\gamma \in \Lambda$. Тогда при определении числа $\psi(\nu)$, мы должны были бы взять $\psi(\nu) = \boldsymbol{m}$.

Получили противоречие с выбором числа $\boldsymbol{m}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.4.8. _Обозначения. Для каждого трансфинитного числа α обозначим через:

$\aleph_\alpha$ - кардинальное число $\psi(\alpha)$, построенное в теореме II.4.7;

$\omega_\alpha = \omega(\aleph_\alpha)$, т.е. ω_α - наименьшее трансфинитное число мощности $\aleph_\alpha$ (см. II.2.25).

II.4.9. Теорема. Для любого кардинального числа $\aleph_\alpha$ множество Ω_α всех трансфинитных чисел мощности $\aleph_\alpha$ имеет мощность $\aleph_{\alpha+1}$, т.е. $||\{\gamma|\ |\gamma| = \aleph_\alpha\}|| = \aleph_{\alpha+1}$.

Доказательство. Пусть $||\{\gamma|\ |\gamma| = \aleph_\alpha\}|| = \boldsymbol{m}_\alpha$.

Так как $\{\gamma|\gamma < \omega(\aleph_{\alpha+1})\} = \{\gamma|\gamma < \omega(\aleph_\alpha)\} \cup \{\gamma|\omega(\aleph_\alpha) \le \gamma < \omega(\aleph_{\alpha+1})\} = \{\gamma|\gamma < \omega(\aleph_\alpha)\} \cup \{\gamma|\ |\gamma| = \aleph_\alpha\}$, то $\aleph_{\alpha+1} = ||\omega(\aleph_{\alpha+1})|| = \{\gamma|\gamma < \omega(\aleph_{\alpha+1})\} = ||\{\gamma|\gamma < \omega(\aleph_\alpha)\} \cup \{\gamma|\ |\gamma| = \aleph_\alpha\}|| = \aleph_\alpha + \boldsymbol{m}_\alpha$.

Но, согласно теореме II.3.8, $\aleph_\alpha + \boldsymbol{m}_\alpha = \max\{\aleph_\alpha, \boldsymbol{m}_\alpha\}$, и значит, $\aleph_{\alpha+1} = \boldsymbol{m}_\alpha$, т.е. $||\{\gamma|\ |\gamma| = \aleph_\alpha\}|| = \aleph_{\alpha+1}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.4.10. Теорема. *Если* $\boldsymbol{m}$ *- бесконечное кардинальное число, то* $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}$.

Доказательство. Доказательство проведем методом трансфинитной индукции.

Если $\boldsymbol{m} = \aleph_0$, то согласно теореме I.1.6, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Допусти, что $\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$ для всех трансфинитных чисел $\gamma < \alpha$, и пусть A и B - множества мощности $\aleph_\alpha$.

Так как $\aleph_\alpha = ||\{a_\gamma|\ \gamma < \omega_\alpha\}||$, то множества A и B можно пронумеровать трансфинитными числами, которые меньше чем $\omega_\alpha = \omega(\aleph_\alpha)$, т.е. $A = \{a_\gamma|\ \gamma < \omega_\alpha\}$ и $B = \{b_\gamma|\ \gamma < \omega_\alpha\}$.

Тогда $A \times B = \{(a_\sigma, b_\gamma)|\ \sigma < \omega_\alpha,\ \gamma < \omega_\alpha\}$ и $||A \times B|| = m \cdot m$.

Пронумеруем элементы множества $A \times B$ трансфинитными числами, которые меньше чем ω_α следующим образом:

Положим $(a_0, b_0) = c_0$ и допустим, что для трансфинитного числа $\xi < \omega_\alpha$ все элементы (a_σ, b_γ), где $\sigma < \xi$ и $\gamma < \xi$, уже пронумерованы трансфинитными числами μ, которые меньше чем некоторое трансфинитное число $\nu \leq \omega_\alpha$, т.е. $\{(a_\sigma, b_\gamma)\,|\sigma, \gamma < \xi\} = \{c_\rho|\rho < \nu\}$.

Так как $\xi < \omega_\alpha$, то $|\xi| < \aleph_\alpha$, и согласно индуктивному допущению, $||\{c_\rho|\rho < \nu\}|| = ||\{(a_\sigma, b_\gamma)\,|\sigma, \gamma < \xi\}|| < \aleph_\alpha$, и значит, $\nu < \omega_\alpha$.

Положим: $(a_\xi, b_\gamma) = c_{\nu+\gamma}$ и $(a_\sigma, b_\xi) = c_{\nu+\xi+\sigma}$, $(a_\xi, b_\xi) = c_{\nu+\xi+\xi}$ для любых $\sigma, \gamma < \xi$. Если $\sigma, \gamma < \xi$, то элемент (a_σ, b_γ) уже был пронумерован раньше, и за ним сохраним этот же номер.

Так как (см. теорему II.3.3) $\nu \leq \nu + \gamma < \nu + \xi \leq \nu + \xi + \sigma < \nu + \xi + \xi < \nu + \xi + \xi + 1$ для любых $\sigma, \gamma < \xi$, то мы пронумеруем все элементы (a_σ, b_γ), где $\sigma < \xi + 1,\ \gamma < \xi + 1$ трансфинитными числами, которые меньше чем трансфинитное число $\nu + \xi + \xi + 1$.

Согласно утверждению II.3.3.1 и теореме II.3.8 $|\nu + \xi + \xi + 1| = |\nu| + |\xi| + |\xi| + 1 = \max\{|\nu|, |\xi|, |\xi|, 1\} < \aleph_\alpha$, и значит, $\nu + \xi + \xi + 1 < \omega_\alpha$.

Следовательно, элементы множества $\{(a_\sigma, b_\gamma)|\ \sigma < \xi + 1,\ \gamma < \xi + 1\} = \{(a_\sigma, b_\gamma)|\ \sigma \leq \xi,\ \gamma \leq \xi\}$ пронумерованы трансфинитными числами, которые меньше чем трансфинитное число ω_α.

Тогда, согласно методу трансфинитной индукции, для любого трансфинитного числа $\beta < \omega_\alpha$ все элементы множества $\{(a_\sigma, b_\gamma)|\ \sigma < \beta,\ \gamma < \beta\}$ можно пронумеровать трансфинитными числами, которые меньше чем трансфинитное число ω_α.

Так как $A \times B = \{(a_\sigma, b_\gamma)|\, \sigma < \omega_\alpha,\ \gamma < \omega_\alpha\} = \bigcup\limits_{\beta < \omega_\alpha} \{(a_\sigma, b_\gamma)|\, \sigma < \beta,\ \gamma < \beta\}$, то все элементы множества $A \times B$ можно пронумеровать трансфинитными числами, которые меньше чем трансфинитное число ω_α, и значит,
$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = ||A \times B|| = |\omega_\alpha| = \aleph_\alpha = \boldsymbol{m}$.

Итак, мы доказали что $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ и из того, что $\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$ для всех трансфинитных чисел $\gamma < \alpha$ следует, что $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Тогда, согласно трансфинитной индукции $\aleph_\rho \cdot \aleph_\rho = \aleph_\rho$ для любого трансфинитного числа ρ, и значит $\boldsymbol{m}\cdot \boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}$ для любого кардинальгого числа $\boldsymbol{m}$.

Этим теорема полностью доказана.

II.4.11. Следствие. Для любого натурального числа k и любых кардинальных чисел $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, ..., \boldsymbol{m}_k$, среди которых имеется хотябы одно бесконечниое число, $\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2 \cdot ... \cdot \boldsymbol{m}_k = \max\{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, ..., \boldsymbol{m}_k\}$.

В частности, $\boldsymbol{m}^k = \boldsymbol{m}$ для любого бесконечного кардинального числа $\boldsymbol{m}$.

II.4.12. Теорема. (Куратовского-Цорна). *Пусть $(M, <')$ - такое частично упорядоченное множество, что для любого линейно упорядоченного подмножества $(A, <')$ существует такой элемент $b \in M$, что $x \leq' b$ для любого $x \in A$. Тогда для любого элемента $a \in M$ существует такой максимальный элемент d в $(M, <')$, что $a \leq' d$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{m}=||M||$ и $\omega(\boldsymbol{m})$ - наименьшее трансфинитное число мощности $\boldsymbol{m}$.

Из теоремы II.2.13 следует, что множества M и $W(\omega(\boldsymbol{m})) = \{\gamma|\gamma < \omega(\boldsymbol{m})\}$ являются эквивалентными, и значит, множество M можно пронумеровать трансфинитными, которые меньше чем $\omega(\boldsymbol{m})$, т.е. $M = \{x_\gamma|\gamma < \omega(\boldsymbol{m})\}$.

Если $a \in M$, то для любого трансфинитного числа γ определим элемент a_γ следующим образом:

Возмем $a_0 = a_{\gamma_0}$, где γ_0 наименьшее из трансфинитных чисел $\gamma < \omega(\boldsymbol{m})$ для которых $a \leq' a_\gamma$. Тогда $0 \leq \gamma_0$.

Допустим, что элементы a_α уже определены для любого трансфинитного числа $\alpha < \rho$, причем выполняются следующее условие:

Если $\beta < \sigma$, то $a_\beta <' a_\sigma$, т.е. $\{a_\alpha|\alpha < \rho\}$ является линейно упорядоченным подмножеством в $(M, <')$ и $a_\alpha = x_{\gamma_\alpha}$, причем $\alpha \leq \gamma_\alpha$ для любого $\alpha < \rho$.

Согласно условию теоремы, существует такой элемент $b \in M$, что $a_\alpha \leq' b$ для любого $\alpha < \rho$.

Если b является максимальным элементом в $(M, <')$, то теорема доказана.

Если же b не является максимальным элементом в $(M, <')$, то существует такой элемент $b' \in M$, что $b <' b'$.

Тогда $\{\gamma < \omega(m) | b <' x_\gamma\} \neq \emptyset$, и если γ_ρ является наименьшим элементом в $\{\gamma < \omega(m) | b <' x_\gamma\} \neq \emptyset$, то возьмем $a_\rho = x_{\gamma_\rho}$.

Тогда $a_\gamma <' a_\rho$ для любого $\gamma < \rho$, и значит, $\{a_\alpha | \alpha < \rho\}$ является линейно упорядоченным подмножеством в $(A, <')$.

Кроме того, $\rho \leq \gamma_\rho$, ибо в пртивном случае, было бы $\gamma_\rho < \rho$. И так как $\alpha \leq \gamma_\alpha$, то элемент x_{γ_ρ} был бы выбран при определении элемента a_α для $\alpha = \gamma_\rho$.

Итак, мы указали способ, при котором мы либо построили бы требуемый максимальный элемент b, либо для любого трансфинитного чила α можно было бы определить элемент $a_\alpha = x_{\gamma_\alpha}$, причем $\alpha \leq \gamma_\alpha$.

Так как элементы x_γ определены только для трансфинитных числел $\gamma < \omega(m)$, то построение элементов a_α должно оборваться для некоторого трансфинитного числа $\alpha < \omega(m)$. А это произойдет только в том случае, когда построенный элемент b будет максимальным.

Этим теорема полностью доказана.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ

I.1.3.1. Необходимость. Если A – счетное множество, существует биективное отображение $f : A \to \mathbb{N}$. Элементу $a \in A$ присвоим номер $f(a)$. Тогда получим нумерацию множества A множеством всех натуральных чисел.

Достаточность. Пусть множество A таково, что его элементы можно пронумеровать множеством всех натуральных чисел, т.е. $A = \{a_k | k \in \mathbb{N}\}$. Если определить $f(a_k) = k$, то получим биекцию $f : A \to \mathbb{N}$.

I.1.3.2. Пусть A – счетное множество, т.е. $A = \{a_k | k \in \mathbb{N}\}$ и пусть $B \subseteq A$.

Если B – конечно, то утверждение верно.

Если B не является конечным, то для любого натурального числа s по индукции определим такое натуральное число k_s, что $a_{k_s} \in B$ и $k_s = \min\{j | a_j \in B\}$ и положим $a_{k_s} = b_s$. Тогда $B = \{b_s | s \in \mathbb{N}\}$, т.е. B является счетным множеством.

I.1.3.3. Для каждого элемента $b \in B$ возьмем $k_b = \min\{i | f(a_i) = b\}$. Тогда $\{a_{k_b} | b \in B\} \subseteq A$, и значит, $\{a_{k_b} | b \in B\}$ является конечным или счетным множеством (см. I.1.3.2), причем $f : \{a_{k_b} | b \in B\} \to B$ является биекцией, и значит, множество B является конечным или счетным.

I.1.3.4. Согласно I.1.3.2, множество $\{f(b) | b \in B\} \subseteq A$ является конечным или счетным, причем отображение $f : B \to \{f(b) | b \in B\}$ является биекцией, и значит, B является счетным множеством.

I.1.3.5. Если отображения $f : A \to B$ и $\varphi : B \to C$ являются биекциями, то и отображение $\varphi \circ f : A \to C$ будет биекцией, и значит, множество A является эквивалентным множеству C.

I.1.3.6. Если отображения $f : A \to B$ является биекцией, то и отображение $f^{-1} : B \to A$ будет биекцией, и значит, множество B является эквивалентным множеству A.

I.1.3.7. Если отображения $f : A \to B$ является биекцией, то отображение $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$, переводящее подмножество $C \subseteq A$ в подмножество $f(C) = \{f(x) | x \in C\} \subseteq B$, будет биекцией.

I.1.3.8. Необходимость. Пусть конечные множества A и B являются эквивалентными, и $f : A \to B$ - биекция. Если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ то, присвоив элементу $b = f(a_k) \in B$ индекс k, получим, что $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, т.е. множества A и B содержат одинаковое число элементов.

Достаточность. Если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, то, отобразив элемент $a_k \in A$ в элемент $b_k \in B$, построим биективное отображение множества A на множество B.

I.1.3.9. Если $f : A \to C$ и $\varphi : B \to C$ - биективные отображения, то легко заметить, что отображение $\psi : A \cup B \to C \cup D$, действующее по правилу, $\psi(a) = f(a)$, если $a \in A$ и $\psi(a) = \varphi(a)$, если $a \in B$, является биекцией.

I.1.4. Легко следует из упражнений I.1.3.5 и I.1.3.6.

I.1.10.1. Если $n = 1$, то $B = A_1$, и значит B - счетное множество.

Допустим, что $B = A_1 \times \ldots \times A_n$ является счетным и $C = A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$. Тогда $C = B \times A_{n+1}$, согласно теореме I.1.6, множество C будет счетным.

I.1.10.2. Согласно I.1.10.1, для каждого натурального числа k множество $\tilde{\mathbb{N}}_k$ всех последовательностей $(r_1, \ldots, r_k)$ натуральных чисел длины k является счетным.

Тогда по теореме I.1.5, множество $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{N}}_k$, которое совпадает с множеством всех конечных последовательностей натуральных чисел, является счетным.

I.1.10.3. Каждой конечной последовательности $(s_1, \ldots, s_n)$ натуральных чисел поставим в соответствие такую последовательность $(k_1, k_2, \ldots)$, что $k_i = 0$, если $s_i = 1$ и $k_i = 1$ в остальных случаях. Мы получим сюръективное отображение множества всех конечных последовательностей натуральных чисел в множество всех последовательностей $(k_1, k_2, \ldots)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ и $\{i | k_i = 0\}$ является конечным.

Тогда из упражнений I.1.3.3 и I.1.10.2 следует счетность указанного в упражнении I.1.10.3 множества.

I.1.10.4. Доказательство проводится аналогично доказательству упражнения I.1.10.3.

I.1.10.5. Согласно упражнению I.1.10.3, множество $\tilde{A}_n = (a_1, \ldots, a_n) | a_i \in A\}$ является счетным.

Если каждому элементу $(a_1, \ldots, a_n) \in \tilde{A}_n$ поставим в соответствие элемент $\{a_1, \ldots, a_n\} \in B_n$, то получим сюръективное отображение множества $\tilde{A}_n$ в множество B_n. Тогда из упражнения I.1.3.3 следует счетность множества B_n.

I.1.10.6. Так как $\tilde{A} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \tilde{A}_k$, то из теоремы I.1.5 следует счетность множества $\tilde{A}$.

I.1.10.7. Так как, согласно теореме I.1.7, множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел является счетным, то из упражнения I.1.10.2 следует, что множество $\tilde{\mathbb{Q}}$ всех конечных последовательностей рациональных чисел является счетным.

Если каждой последовательности $(r_1, \ldots, r_n) \in \tilde{\mathbb{Q}}$ поставим в соответствие многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x^{i-1}$, то получим сюръективное отображение множества $\tilde{\mathbb{Q}}$ в множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Тогда согласно упражнению I.1.3.3, указанное в упражнении I.1.10.7 множество, является счетным.

I.1.10.8. Так как всякий ненулевой многочлен с целыми коэффициентами имеет в множестве всех действительных чисел только конечное число корней, то из теоремы I.1.5 следует, что множество всех алгебраических чисел является счетным.

I.2.6. Если $n = 1$, т.е. $X = \{x_1\}$, то множество F_1 всех характеристических функций состоит из двух функций $f_1(x_1) = 0$ и $f_1(x_1) = 1$.

Допустим, что для множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ множество F_n содержит 2^n фнкций, и пусть $Y = X \bigcup \{x_{n+1}\}$. Для каждой функции $f \in F_n$ определим функции φ_0 и φ_1 следующим образом $\varphi_{f,0}(x) = \varphi_{f,1}(x) = f(x)$ для любого $x \in X$ и $\varphi_{f,0}(x_{n+1}) = 0$ и $\varphi_{f,1}(x_{n+1}) = 1$. Тогда множество $\{\varphi_{i,f} | f \in F_n, ^i \in \{0,1\}\}$ является множеством всех характеристических функций множества Y и оно содержит 2^{n+1} функций.

I.2.13. Пусть:

A - множество всех счетных последовательностей, составленных из 0 и 1;

B - множество всех счетных последовательностей, составленных из 0 и 1, в которых множество нулей и множество единиц являются бесконечными;

C_0 и C_1 - множества всех счетных последовательностей, составленных из 0 и 1, в которых, соответственно, множество нулей и множество единиц являются конечными.

Тогда $A = B \cup C_0 \cup C_1$. Так как, согласно I.1.10.1 $||C_0|| = ||C_1|| = \aleph_0$, то согласно теореме I.2.3 $||A|| = ||B||$. Тогда из теоремы I.2.12 следует, что множество B эквивалентно множеству всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.

I.2.17.1. Так как множество $\Re$ содержит в себе множество $\{(r, r, \ldots)|r \in \mathbb{R}\}$, а это множество эквивалентно множеству $\mathbb{R}$, то существует инъективное отображение $\psi : \mathbb{R} \to \Re$.

Согласно теореме I.2.11 достаточно построить инъективное отображение $\varphi : \Re \to \mathbb{R}$.

Пусть $A = \{(k_1, k_2, \ldots)|k_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N}\}$ и $\Delta = \{p_1, p_{2,\ldots}\}$ - множество всех простых чисел. Из теорем I.2.12 и I.2.14 следует, что существует биективное отображение $f : A \to \mathbb{R}$.

Если $\tilde{r} = (r_1, \ldots) \in \Re$ и $f^{-1}(r_i) = (k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots) \in A$, то положим $\varphi(\tilde{r}) = f((q_1, \ldots))$, где $q_i = k_{s,t}$, если $i = p_s^t$ для некоторых $s, t \in \mathbb{N}$ и $q_i = 0$ если $i \notin \{p_s^t|s, t \in \mathbb{N}\}$.

Так как $p_i^n \neq p_j^k$ если $i \neq j$, то отображение $\varphi : \Re \to \mathbb{R}$ определено корректно.

Покажем, что построенное отображение φ является инъекцией.

Если $\tilde{r} = (r_1, \ldots) \neq \tilde{r}' = (r'_1, r'_2 \ldots)$, то $r_s \neq r'_s$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$.

Тогда $f^{-1}(r_s) = (k_{s,1}, k_{s,2}, \ldots) \neq f^{-1}(r'_s) = (k'_{s,1}, k'_{s,2}, \ldots)$, и значит, $k_{s,t} \neq k'_{s,t}$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$.

Если $f^{-1}(\varphi(\tilde{r})) = (q_1, \ldots)$ и $f^{-1}(\varphi(\tilde{r}')) = (q'_1, \ldots)$, то $q_i \neq q'_i$ для $i = p_s^t$, и значит, $\varphi(\tilde{r}) = f((q_1, \ldots)) \neq f((q'_1, \ldots)) = \varphi(\tilde{r}')$.

I.2.17.2. Так как множества $\mathbb{R}$ и $\{\{r\}|r \in \mathbb{R}\}$ являются эквивалентными и $\{\{r\}|r \in \mathbb{R}\} \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$, то существует инъективное отображение $\psi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$.

Согласно теореме I.2.11 достаточно построить инъективное отображение $\varphi : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

Для каждого подмножества $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ рассмотрим множество Δ_A всех таких счетных последовательностей $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots)$ действительных чисел, что $A = \{r_i|i \in \mathbb{N}\}$, и из каждого множества Δ_A выберем по одному элементу $\bar{r}_A$.

Если мы поставим в соответствие подмножеству A последовательность $\bar{r}_A$, то получим инъективное отображение множества $\tilde{\mathbb{R}}$ в множество $\Re$ (см. I.2.17.1), и поскольку множества $\Re$ и $\mathbb{R}$ являются эквивалентными (см. I.2.17.1), то существует инъективное отображение $\varphi : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

I.3.8. Если $(A, <)$ - такое частично упорядоченное множество, что каждое конечно подмножество имеет наименьший (наибольший) элемент, для любых двух элементов $a, b \in A$ множество $\{a, b\}$ обладает наименьшим (наибольшим) элементом, и значит, эти элементы сравнимы между собой, т.е. множество $(A, <)$ является линейно упорядоченным.

I.3.11.1. Так как любые два рациональных числа сравнимы между собой, то $(\mathbb{Q}, <)$ является линейно упорядоченным множеством.

I.3.11.2. Так как любые два натуральных числа сравнимы между собой, то $(\mathbb{N}, <)$ является линейно упорядоченным множеством.

Пусть теперь $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ и $n \in A$. Так как $\{k \in A | k \leq n\}$ является конечным множеством, то согласно теореме I.3.10 в этом множестве имеется наименьший элемент k_0. Тогда k_0 будет наименьшим элементом и в A.

I.3.11.3. Очевидно, что аксиомы определения I.3.1 выполняются.

I.3.12.1. Так как любое натуральное число n делится на n, то $n \leq n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. аксиома 1) замечания I.3.3 выполняется.

Если $n \leq m$ и $m \leq k$, то m делится на n и k делится на m.Тогда k делится на n, и значит, $n \leq k$, т.е. аксиома 2) замечания I.3.3 выполняется.

Если $n \leq m$ и $m \leq n$, то m делится на n и n делится на m. Тогда $m = kn$ и $n = ms$, и значит, $n = ksn$, т.е. $ks = 1$. Так как k и s - натуральные числа, то $k = s = 1$, и значит, $n = m$ т.е. и аксиома 3) замечания I.3.3 выполняется.

Следовательно, $(\mathbb{N}, \leq)$ является частично упорядоченным множеством.

Так как 2 не делится на 3 и 3 не делится на 2, то натуральные числа 2 и 3 не сравнимы между собой в $(\mathbb{N}, \leq)$, т.е. $(\mathbb{N}, \leq)$ не является линейно упорядоченным множеством.

I.3.12.2. Так как 2 делится на -2 и -2 делится на 2, то $2 \leq -2$ и $-2 \leq 2$, но $2 \neq -2$, и значит, аксиома 3) замечания I.3.3 не выполняется, т.е. $(\mathbb{Z}, \leq)$ не является частично упорядоченным множеством.

I.3.12.3. Так как $n = n^1$, то $n \leq n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, т.е. аксиома 1) замечания I.3.3 выполняется.

Если $n \leq m$ и $m \leq k$, то $m = n^s$ и $k = m^s$. Тогда $k = n^{st}$, и значит, $n \leq k$, т.е. аксиома 2) замечания I.3.3 выполняется.

Если $n \le m$ и $m \le n$, то $m = n^s$ и $n = m^t$. Тогда $n = n^{s \cdot t}$, и значит $s \cdot t = 1$, т.е. $s = t = \pm 1$.

Если $n = \pm 1$, то $n = (\pm 1)^{\pm 1} = n^s = m$. Если же $n \ne \pm 1$, то $s \ne -1$, и значит, $s = 1$. Тогда $m = n^1 = n$, т.е. аксиома 3) замечания I.3.3 выполняется.

Следовательно, $(\mathbb{Z}, \le)$ является частично упорядоченным множеством.

Так как 2 не является степенью числа 3 и 3 не является степенью числа 2, то натуральные числа 2 и 3 не сравнимы между собой в $(\mathbb{Z}, \le)$, т.е. $(\mathbb{Z}, \le)$ не является линейно упорядоченным множеством.

I.3.13.1. В множестве M нет ни минимальных и тем более наименьших элементов, ибо для любого рационального числа $r \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ имеется рациональное число $\sqrt{2} < q < r$.

I.3.13.2. Как и в I.3.13.1 доказывается, что в множестве M нет ни минимальных и тем более наименьших элементов.

I.3.13.3. Так как любое натуральное число делится на 1, то число 1 является наименьшим в множестве $M = \mathbb{N}$, и значит, является минимальным элементом.

Для множества $\mathbb{N} \backslash \{1\}$ всякое простое число является минимальным элементом, но в этом множестве нет наименьших элементов.

I.3.14.1. Так как само множество $\mathbb{Q}$, которое является непустым подмножеством в $\mathbb{Q}$, не имеет наименьшего элемента, то $(\mathbb{Q}, \le)$ не является вполне упорядоченным множеством.

I.3.14.2. Так как $\emptyset \ne (0,1) \subseteq [0,1]$ и интервал $(0,1)$ не имеет наименьшего элемента, то $([0,1], \le)$ не является вполне упорядоченным множеством.

I.3.16.1. Каждому действительному числу r поставим в соответствии число $\frac{r}{2 \cdot |r| + 1} + \frac{1}{2}$. Легко заметить, что получим отображение $f : \mathbb{R} \to (0,1)$.

Так как $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{2t-1}{4t}) = t$ для любого $0 < t < \frac{1}{2}$ и $f(\frac{2t-1}{4-4t}) = t$ для любого $\frac{1}{2} < t < 1$, то $f : \mathrm{R} \to (0,1)$ является сюръективным отображением.

Проверим теперь, что $f : (\mathbb{R}, <) \to ((0,1), <)$ является подобием.

Пусть $r_1 < r_2$. Если r_2 и r_1 имеют разные знаки, то $r_2 > 0$ и $r_1 < 0$. Тогда $f(r_2) > \frac{1}{2}$ и $f(r_1) < \frac{1}{2}$, и значит, $f(r_2) - f(r_1) > 0$, т.е. $f(r_2) > f(r_1)$. Если же r_2 и r_1 имеют один и тот же знак, то $r_2 \cdot 2 \cdot |r_1| = r_1 \cdot 2 \cdot |r_2|$, и значит $f(r_2) - f(r_1) = \frac{r_2}{2\cdot|r_2|+1} - \frac{r_1}{2\cdot|r_1|+1} = \frac{r_2\cdot(2|r_1|+1)-r_1\cdot(2|r_2|+1)}{(2\cdot|r_2|+1)(2\cdot|r_1|+1)} = \frac{r_2-r_1}{(2\cdot|r_2|+1)(2\cdot|r_1|+1)} > 0$, т.е. $f(r_2) > f(r_1)$.

Следовательно, отображение f сохраняет порядок. Тогда $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ является инъекцией, и значит, $f : (\mathbb{R}, <) \to ((0,1), <)$ является подобием.

I.3.16.2. Так как множество $(\mathbb{R}, <)$ не имеет наименьшего элемента, а множество $([0,1], <)$ имеет наименьший элемент, то эти множества не могут быть подобными.

I.3.16.3. Так как в множестве $(\mathbb{Z}, <)$ между числами 1 и 2 нет никаких чисел, а в множестве $(\mathbb{Q}, <)$ между любыми двумя разными рациональными числами имеется некоторое рациональное число, то эти множества не могут быть подобными.

I.3.16.4. Легко следует из определения подобия.

II.1.9.1. Так как $\{1,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$, то $n = ||\{1,\ldots,n\}|| \leq ||\mathbb{N}|| = \aleph_0$, и поскольку множества $\mathbb{N}$ и $\{1,\ldots,n\}$ не являются эквивалентными, то $n < \aleph_0$.

II.1.9.2. Так как всякое бесконечное множество содержит некоторое счетное подмножество (см. I.2.1), то $\aleph_0 \leq m$ для любого бесконечного кардинального числа $\boldsymbol{m}$, и в частности, $\aleph_0 \leq c$. Согласно следствию I.2.15, множество $\mathbb{R}$ не является счетным, и значит $\boldsymbol{c} = ||\mathbb{R}|| \neq \aleph_0$, т.е. $\aleph_0 < \boldsymbol{c}$.

II.1.9.3. Следует из теорем I.2.7 и I.2.8.

II.1.9.4. Пусть $\boldsymbol{m}$ - произвольное кардинальное число и M - такое множество, что $||M|| = \boldsymbol{m}$.

Тогда согласно упражнению II.1.9.3, $\boldsymbol{m} = |||M|| < ||\{A|A \subseteq M\}||$, и значит, для любого кардинального числа $\boldsymbol{m}$ существует кардинальное число, которое больше чем $\boldsymbol{m}$.

II.1.12. Пусть $A = \{x_1,\ldots,x_n\}$ и $B = \{b_1,\ldots,b_k\}$.

Если $n = 1$, т.е. $A = \{x_1\}$, то множество F_1 всех характеристических функций состоит из k функций $f_1(x_1) = b_1$,..., $f_k(x_1) = b_k$.

Допустим, что для множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ множество F_n содержит k^n функций, и пусть $Y = X \bigcup \{x_{n+1}\}$. Для каждой функции $f \in F_n$ определим характеристические функции $\varphi_{f,1}, \dots, \varphi_{f,k}$ на Y, положив $\varphi_{f,i}(x) = f(x)$ для любых $1 \leq i \leq k$ и $x \in X$ и $\varphi_{f,i}(x_{n+1}) = b_i$.

Тогда множество $\{\varphi_{i,f} | f \in F_n, ^1\leq i \leq k\}$ является множеством всех характеристических функций на множестве Y и оно содержит k^{n+1} функций.

II.1.14.1. Так как объединение двух счетных множеств является счетным множеством (см. теорему I.1.5), то $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

II.1.14.2. Так как произведение двух счетных множеств является счетным множеством (см. теорему I.1.6), то $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

II.1.16.1. Так как $A \cup B = B \cup A$, то $||A|| + ||B|| = ||A \cup B|| = ||B \cup A|| = ||B|| + ||A||$.

II.1.16.2. Так как $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, то $(||A|| + ||B||) + ||C|| = ||A|| + (||B|| + ||C||)$.

II.1.16.3. Так как отображение $f : A \times B \to B \times A$, переводящее элемент $(a, b) \in A \times B$ в элемент $(b, a) \in B \times A$ является биекцией, то $||A|| \cdot ||B|| = \quad ||A \times B|| = ||B \times A|| = ||B|| \cdot ||A||$.

II.1.16.4. Так как $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, то $(||A|| \cdot ||B||) \cdot ||C|| = ||A|| \cdot (||B|| \cdot ||C||)$.

II.1.16.5. Так как $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$ и $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$, то $(||A|| + ||B||) \cdot ||C|| = ||A|| \cdot ||C|| + ||B|| \cdot ||C||$ и $||A|| \cdot (||B|| + ||C||) = ||A|| \cdot ||B|| + ||A|| \cdot ||C||$.

II.1.16.6. Так как $A \subseteq A \cup B$, то $||A|| \leq ||A \cup B|| = ||A|| + ||B||$.

II.1.16.7. Если $B \neq \emptyset$ и $b \in B$, то множество A является эквивалентным подмножеству $A \times \{b\} \subseteq A \times B$, и значит $||A|| = ||A \times \{b\}|| \leq ||A \times B|| = ||A|| \cdot ||B||$.

Кроме того $||A|| \cdot 0 = ||A|| \cdot ||\emptyset|| = ||A \times \emptyset|| = ||\emptyset|| = 0$.

II.1.16.8. Пусть множество A эквивалентно подмножеству $A_1 \subseteq B$ и множество C эквивалентно подмножеству $C_1 \subseteq D$. Тогда $A \cup C$ эквивалентно подмножеству $A_1 \cup C_1 \subseteq B \cup D$, и значит, $||A|| + ||C|| = ||A \cup C|| \leq ||B \cup D|| = ||B|| + ||D||$.

Аналогично, $A \times C$ эквивалентно подмножеству $A_1 \times C_1 \subseteq B \times D$, и значит, $||A|| \cdot ||C|| = ||A \times C|| \leq ||B \times D|| = ||B|| \cdot ||D||$.

II.1.20.1. Так как любое натуральное число $n > 2$ можно представить в виде суммы дух слагаемых $n-1$ и 1, каждое из которых меньше чем n, то любое натуральное число $n > 2$ является иррегулярным.

Кроме того, очевидно, что если $n = 1$ или $n = 2$, то число n нельзя представить в виде суммы меньшего чем n слагаемых, каждое из которых является неотрицательным целым числом меньше чем n, и значить, числа 1 и 2 являются регулярными.

II.1.20.2. Так как любое кардинальное число, которое меньше чем $\aleph_0$ является конечным числом, и сумма конечного числа конечных чисел является конечным, то $\aleph_0$ нельзя представить в виде конечной суммы конечных чисел, т.е. $\aleph_0$ является регулярным числом.

II.3.6.1. Так как $n = (n-1) + 1$ для любого натурального числа n, то n не является предельным трансфинитным числом.

II.3.6.2. Так как 0 нельзя представить в виде суммы неотрицательного числа и 1, то 0 является предельным трансфинитным числом. Кроме того, согласно II.3.6.1 любое натуральное число не является предельным трансфинитным числом.

II.3.6.3. Допустим противное, т.е. что $\omega(\boldsymbol{m}) = \gamma + 1$ для некоторого бесконечного кардинального числа $\boldsymbol{m}$.

Согласно утверждению II.3.3.2 $\gamma < \omega(\boldsymbol{m})$, и значит, $|\gamma| < \boldsymbol{m}$. Тогда, согласно теореме I.2.3, $\boldsymbol{m} = |\omega(\boldsymbol{m})| = |\gamma + 1| = |\gamma| < \boldsymbol{m}$. Получили противоречие.

II.4.6.1. Так как k^n является натуральным числом для любого натурального числа n, то $k^n < \omega_0$. Тогда из II.4.5 следует, что $k^{\omega_0} \leq \omega_0$. Так как ω_0 является наименьшим бесконечным трансфинитным числом, то $k^{\omega_0} = \omega_0$.

II.4.6.2. В самом деле, $|k^{\omega_0}| = |\omega_0| = \aleph_0$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П.С.Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Москва 1948 Ленинград.

2. Н.Бурбаки, Теория множеств, издательство “Мир”, Москва 1965.

3. К. Куратовский, А.Мостовский, Теория множеств, Издательство “Мир”, Москва, 1970

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

СПИСОК ПОНЯТИЙ

СОДЕРЖАНИЕ