

В.И.Арнаут
Г.Н.Ермакова

**Введение в теорию
топологических групп**

Основой для этого издания послужил цикл лекций, который читался одним из авторов на протяжении более 10 лет по теории топологических групп для студентов математической специальности физико-математического факультета ПГУ (Приднестровского Государственного университета) имени Т.Г.Шевченко.

Оно будет полезным:

-- студентам и магистрантам при подготовке дипломных работ по топологической алгебре;

-- аспирантам при подготовке к сдаче кандидатских экзаменов и при проведении научных исследований по теории топологических групп и топологических колец;

-- преподавателям при чтении специальных курсов для студентов старших курсов ,математических специальностей.

Авторы: В.И.Арнаутов, профессор, академик АН Молдовы,
Г.Н.Ермакова, доцент ПГУ им. Т.Г.Шевченко.

Редактор: М.М.Чебан, профессор, академик АН Молдовы

Оглавление

1. Введение -----	4;
2. Предварительные сведения -----	5 ;
3. Теория множеств -----	5
4. Элементы теория групп -----	10
5. Общая топология -----	14
6. Основные определения и элементарные свойства топологической группы -----	24
7. Окрестности точек в топологической группе -----	31
8. Свойства подмножеств в топологической группе -----	44
9. Аксиомы отделимости в топологической группе -----	61
10.Метод топологизации групп -----	68
11.Метод построения отделимых групповых топологий на счетной группе -----	80
12.Подгруппы топологических групп -----	107
13.Гомоморфизмы и факторгруппа топологической группы -----	115
14. Произведение топологических групп -----	133
15. Полные топологические группы и их свойства -----	146
16. Пополнение топологических групп -----	182
17. Решетки групповых топологий -----	195
18. Список обозначений -----	210
19. Список понятий -----	212
20. Литература -----	215

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание посвящено теории топологических групп, разделу математики, который лежит на стыке двух областей современной математики, а именно: общей топологии и современной алгебры.

Основой для этого издания послужил цикл лекций, который читался одним из авторов на протяжении более 10 лет по теории топологических групп для студентов математической специальности физико-математического факультета Приднестровского Государственного университета имени Т.Г.Шевченко.

Основной материал этого издания можно условно разбить на две части:

-- Материал, который можно найти и в некоторых других книгах по теории топологических групп;

-- Материал, который пока не излагался в книгах по теории топологических групп, а был опубликован лишь в научных статьях или вообще не публиковался.

Это издание будет полезным:

-- при чтении специальных курсов для студентов старших курсов математических специальностей;

-- студентам и магистрантам при подготовке дипломных работ по топологической алгебре,

-- аспирантам при подготовке к сдаче кандидатских экзаменов и при проведении научных исследований по теории топологических групп и топологических колец.

В настоящем издании имеется 12 параграфов основного текста и глава, в которой собраны необходимые (для чтения основного материала) сведения по теории множеств, теории групп и общей топологии.

Хотя сведения, которые изложены в этой главе, можно найти в учебниках по соответствующим областям (теория множеств, теория групп и общей топологии) мы все же решили, для удобства читателя, привести их (без доказательств) в этом издании.

Кроме того, при изложении основного материала делаются ссылки на результаты, которые изложены в этом параграфе. Это должно помочь, особенно читателю, который решил начать изучать топологические группы, при изучении основного материала.

Читатель, который знает эти разделы современной математики (теорию множеств, теорию групп и общую топологию) может пропустить чтение этой главы и обращаться к этой главе, если будет возникать такая необходимость.

0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

А. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Подробное изложение результатов, изложенных в этом разделе можно найти в работах [1,2,5,6].

А.1. Обозначения:

-- $\{x \mid P\}$ обозначает множество всех элементов x , удовлетворяющих условию P .

-- $\{a\}$ обозначает множество, состоящее из одного элемента a .

$\emptyset$ обозначает пустое множество.

А.2. Обозначение. $A \subseteq B$ и $A \subset B$ означает, соответственно, что A является подмножеством множества B и A является подмножеством множества B отличным от множества B , соответственно.

А.3. Определение. Если для множеств A и B задано некоторое правило f , по которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$, то f называется *отображением множества A во множество B* и обозначается $f: A \rightarrow B$.

А.4. Обозначения. Если $f: A \rightarrow B$, $C_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq B$, то положим:

$f(C_1) = \{f(x) \mid x \in C_1\}$ (образ подмножества C_1 при отображении f);

$f|_{C_1}: C_1 \rightarrow B$ (ограничение отображения f на подмножество C_1);

$f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$ (прообраз подмножества B_1 при отображении f).

А.5. Определение. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется:

-- *инъекцией* (или другими словами, *инъективным отображением*), если для любых элементов $a_1, a_2 \in A$ из неравенства $a_1 \neq a_2$ следует, что $f(a_1) \neq f(a_2)$;

-- *сюръекцией* (или другими словами, *сюръективным отображением*), если $f(A) = B$;

-- *биекцией* (или другими словами, *биективным отображением*), если f является инъекцией и сюръекцией.

А.6. Определение. Пусть A , B и C - произвольные множества. Если $f: A \rightarrow B$ и $\varphi: B \rightarrow C$, то определим отображение $\varphi \circ f: A \rightarrow C$ следующим образом: $(\varphi \circ f)(a) = \varphi(f(a))$ для любого элемента $a \in A$.

Отображение $\varphi \circ f$ называется *суперпозицией отображений f и φ* .

А.7. Замечание. Легко заметить, что:

-- если f и φ являются сюръекциями, то и $\varphi \circ f$ тоже будет сюръекцией;

- если f и φ являются инъекциями, то и $\varphi \circ f$ тоже будет инъекцией;
- если f и φ являются биекциями, то и $\varphi \circ f$ тоже будет биекцией.

А.8. Теорема. Если $\{C_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и $\{B_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - произвольные совокупности подмножеств множеств X и Y , соответственно, и $f: X \rightarrow Y$.

Тогда верны следующие утверждения:

$C_\gamma \subseteq f^{-1}(f(C_\gamma))$ и $C_\gamma = f^{-1}(f(C_\gamma))$, если f является инъекцией;

$B_\delta \supseteq f(f^{-1}(B_\delta))$ и $B_\delta = f(f^{-1}(B_\delta))$, если f является сюръекцией;

$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(C_\gamma)$ и $f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(C_\gamma)$, если f является

инъекцией или если $C_\gamma = f^{-1}(f(C_\gamma))$ для всех γ , кроме возможно для одного элемента $\gamma_0 \in \Gamma$;

$f^{-1}\left(\bigcap_{\delta \in \Delta} B_\delta\right) = \bigcap_{\delta \in \Delta} f^{-1}(B_\delta)$;

$f(C_{\gamma_1} \setminus C_{\gamma_2}) \supseteq f(C_{\gamma_1}) \setminus f(C_{\gamma_2})$ и $f(C_{\gamma_1} \setminus C_{\gamma_2}) = f(C_{\gamma_1}) \setminus f(C_{\gamma_2})$, если f является инъекцией или если $C_{\gamma_2} = f^{-1}(f(C_{\gamma_2}))$;

$f(X \setminus C_\gamma) \supseteq f(X) \setminus f(C_\gamma)$ и $f(X \setminus C_\gamma) = Y \setminus f(C_\gamma)$, если f является сюръекцией и $C_\gamma = f^{-1}(f(C_\gamma))$;

$f^{-1}(B_{\delta_1} \setminus B_{\delta_2}) = f^{-1}(B_{\delta_1}) \setminus f^{-1}(B_{\delta_2})$, и значит, в частности,

$f^{-1}(Y \setminus B_\delta) = X \setminus f^{-1}(B_\delta)$;

$f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(C_\gamma)$;

$f^{-1}\left(\bigcup_{\delta \in \Delta} B_\delta\right) = \bigcup_{\delta \in \Delta} f^{-1}(B_\delta)$.

А.9. Определение. Если $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ - семейство множеств, то множество

$\hat{X} = \left\{ f \mid f: \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma, f(\gamma) \in X_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma \right\}$ называется произведением

семейства $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ множеств.

Множество $\hat{X}$ будем обозначать $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$.

A.10. Замечание. Если $\Gamma = \{1, \dots, n\}$, то любое отображение $f \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ можно отождествить с последовательностью $(f(1), \dots, f(n))$, и поэтому иногда, вместо записи $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ будем писать $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ или $\prod_{i=1}^n X_i$.

A.11. Определение. Отображение $\pi_{\gamma_0} : \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \rightarrow X_{\gamma_0}$, для которого $\pi_{\gamma_0}(f) = f(\gamma_0)$ для любого $f \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ называется *проекцией множества $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ на множество X_{γ_0}* .

A.12. Определение. Пусть для некоторых элементов a, b множества A определено такое бинарное отношение $\leq$ (называемое *порядком*), что выполнены следующие условия:

1. $a \leq a$ для любого элемента $a \in A$;
2. если $a \leq b$ и $b \leq a$ для элементов $a, b \in A$, то $a = b$;
3. если $a \leq b$ и $b \leq c$ для элементов $a, b, c \in A$, то $a \leq c$.

Тогда $(A, \leq)$ называется:

- *частично упорядоченным множеством*,
- *линейно упорядоченным множеством*, если $(A, \leq)$ является частично упорядоченным множеством и любые два элемента из множества A сравнимы между собой.

A.13. Определение. Если в частично упорядоченном множестве $(C, \leq)$ задано непустое подмножество B , то элемент $a \in C$ называется:

- *наибольшим элементом* в подмножестве B , если $a \in B$ и $c \leq a$, для любого элемента $c \in B$;
- *наименьшим элементом* в подмножестве B , если $a \in B$ и $a \leq c$, для любого элемента $c \in B$;
- *максимальным элементом* в подмножестве B , если $a \in B$ и не существует такой элемент $c \in B$, что $a < c$;
- *минимальным элементом* в подмножестве B , если $a \in B$ и не существует такой элемент $c \in B$, что $c < a$;
- $\inf B$, если $a \leq c$ для любого элемента $c \in B$ и $d \leq a$ для любого такого элемента $d \in C$, что $d \leq c$ для любого элемента $c \in B$;
- $\sup B$, если $c \leq a$ для любого элемента $c \in B$ и $a \leq d$ для любого такого элемента $d \in C$, что $c \leq d$ для любого элемента $c \in B$.

A.14. Теорема. (Теорема Куратовского-Цорна). Если в частично упорядоченном множестве $(C, \leq)$ для любого линейно упорядоченного подмножества $(M, \leq) \subseteq (C, \leq)$ существует такой элемент $a \in C$, что $x \leq a$

для любого элемента $x \in M$, то для любого элемента $b \in C$ существует такой максимальный элемент $c \in (C, \leq)$, что $b \leq c$.

А.15. Определение. Частично упорядоченное множество $(B, \leq)$ называется *решеткой*, если в нем существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$ для любых элементов $a, b \in B$.

Решетка $(B, \leq)$ называется *полной решеткой*, если в нем существуют $\inf M$ и $\sup M$ для любого $\emptyset \neq M \subseteq B$.

Если $(B, \leq)$ - решетка, то частично упорядоченное подмножество $(A, \leq) \subseteq (B, \leq)$ называется *подрешеткой решетки* $(B, \leq)$, если для любых элементов $a, b \in A$, определенные в решетке $(B, \leq)$ элементы $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$, принадлежат множеству A .

А.16. Определение. Решетка $(B, \leq)$ называется *модулярной*, если $\inf\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{b, \inf\{a, c\}\}$ для любых $a, b, c \in B$ таких, что $b \leq a$.

А.17. Определение. Если решетка $(B, \leq)$ имеет наибольший элемент 1 и имеет наименьший элемент 0, то элемент $a \in B$ называется:

-- *атомом*, если a является минимальным элементом в частично упорядоченном множестве $(B \setminus \{0\}, \leq)$;

-- *коатомом*, если a является максимальным элементом в частично упорядоченном множестве $(B \setminus \{1\}, \leq)$.

А.18. Определения. Решетки $(C, \leq)$ и $(B, \leq)$ называются:

-- *изоморфными решетками*, если существует такое биективное отображение $f: (C, \leq) \rightarrow (B, \leq)$, что $f(a) \leq f(b)$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$ для любых элементов $a, b \in C$;

-- *антиизоморфными решетками*, если существует такое биективное отображение $f: (C, \leq) \rightarrow (B, \leq)$, что $f(a) \leq f(b)$ тогда и только тогда, когда $b \leq a$ для любых элементов $a, b \in C$.

А.19. Определение. Частично упорядоченное множество $(C, \leq)$ называется *направленным множеством* (или другими словами, *направленностью*), если для любых элементов $a, b \in C$ существует такой элемент $c \in C$, что $a \leq c$ и $b \leq c$.

Если $(C, \leq)$ - некоторая направленность и $A \subseteq C$, то частично упорядоченное множество $(A, \leq)$ называется *поднаправленностью направленности* $(C, \leq)$, если для любого элемента $c \in C$ найдется такой элемент $a \in A$, что $c \leq a$.

А.20. Определение. Совокупность Δ подмножеств множества A называется *разбиением множества A* , если $A = \bigcup_{B \in \Delta} B$ и $D \cap C = \emptyset$ для любых различных подмножеств $D, C \in \Delta$.

А.21. Определение. Совокупность Ω подмножеств множества A называется *фильтром*, заданным на множестве A , если выполняются следующие условия:

1. $\emptyset \notin \Omega$;
2. если $B \in \Omega$ и $B \subseteq C \subseteq A$, то $C \in \Omega$;
3. если $B \in \Omega$ и $C \in \Omega$, то $B \cap C \in \Omega$.

А.22. Определение. Фильтр Ω , заданный на множестве A , называется *ультрафильтром*, заданным на множестве A , если не существует такого фильтра Φ , заданного на множестве A , что $\Omega \subset \Phi$.

А.23. Теорема. Фильтр Ω , заданный на множестве A , будет ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любой конечной совокупности $\{C_1, \dots, C_n\}$ подмножеств множества A из того, что $\bigcup_{i=1}^n C_i \in \Omega$ следует, что $C_{i_0} \in \Omega$ для некоторого $1 \leq i_0 \leq n$.

А.24. Определение. Непустая совокупность Δ подмножеств множества A называется *базисом фильтра Φ* , заданного на множестве A , если $\Delta \subseteq \Phi$ и для любого подмножества $B \in \Phi$ существует такое подмножество $C \in \Delta$, что $C \subseteq B$.

А.25. Теорема. Для того чтобы совокупность Δ подмножеств множества A была базисом некоторого фильтра Φ , заданного на множестве A , необходимо и достаточно, чтобы $\emptyset \notin \Delta$ и для любых подмножеств $B, C \in \Delta$ существовало такое подмножество $D \in \Delta$, что $D \subseteq B \cap C$.

А.26. Теорема. Для любого фильтра Φ , заданного на множестве A , существует такой ультрафильтр Ω , что $\Phi \subseteq \Omega$.

А.27. Определение. Пусть $\Omega = \{F_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - такой базис фильтра на множестве X , что $F_\delta \neq F_\rho$ для таких элементов $\delta, \rho \in \Delta$, что $\delta \neq \rho$.

Если на множестве Δ определим следующий частичный порядок: считаем, что $\delta \leq \rho$, если $F_\rho \subseteq F_\delta$, то частично упорядоченное множество $(\Delta, \leq)$ будет направленным множеством.

Это направленное множество называется *направленностью*, которая задается базисом Ω фильтра.

А.28. Определение. Говорим, что множество A имеет:

-- *счетную мощность* (другими словами, *множество A является счетным*), если существует биективное отображение множества A на множество натуральных чисел;

-- *мощность континуума*, если существует биективное отображение множества A на множество действительных чисел.

А.29. Теорема. *Множество всех подмножеств счетного множества и множество всех действительных чисел имеют мощность континуума.*

Б. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

Подробное изложение результатов, которые изложены в этом разделе, можно найти в монографиях [7,8], или в других учебниках по теории групп.

Б.1. Определение. *Группой $G(\cdot)$ называется множество, на котором задана такая бинарная операция умножения, что выполнены следующие условия:*

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любых элементов $a, b, c \in G$, т.е. операция умножения является ассоциативной;

2. существует единственный элемент e такой, что $e \cdot a = a \cdot e = a$ для любого элемента $a \in G$. Этот элемент e называется *единицей группы G* ;

3. для каждого элемента $a \in G$ существует единственный элемент b такой, что $a \cdot b = b \cdot a = e$. Этот элемент называется *обратным элементом к элементу a* , и мы будем его обозначать a^{-1} .

Б.2. Определение. *Группа $G(\cdot)$ называется:*

-- *коммутативной группой*, если, заданная операция умножения, является коммутативной, т.е. $a \cdot b = b \cdot a$ для любых элементов $a, b \in G$;

-- *Абелевой группой*, если вместо операции умножения задана операция сложения, и $G(+)$ является коммутативной группой (в этом случае вместо единицы будем говорить ноль, а вместо обратного элемента будем говорить противоположный элемент);

-- *циклической группой*, если $G(\cdot)$ порождается некоторым своим элементом $g \in G$, т.е. если $G = \{g^k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Б.3. Замечание. Легко заметить, что для любой группы $G(\cdot)$ верны следующие утверждения:

1. $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ для любых элементов $x, y \in G$;

2. для любого элемента $a \in G$ отображение $R_a : G \rightarrow G$, переводящее элемент $x \in G$ в элемент $x \cdot a$, является биекцией;

3. для любого элемента $a \in G$ отображение $L_a : G \rightarrow G$, переводящее элемент $x \in G$ в элемент $a \cdot x$, является биекцией;

4. отображение $\varepsilon : G \rightarrow G$, переводящее элемент $x \in G$ в элемент x^{-1} , является биекцией.

Б.4. Определение. Непустое подмножество A группы $G(\cdot)$ называется:

-- *симметричным*, если $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\} = A$;

-- *подгруппой* группы $G(\cdot)$, если $A(\cdot)$ является группой, т.е. если $a^{-1} \in A$ для любого элемента $a \in A$ и $a \cdot b \in A$ для любых элементов $a, b \in A$;

-- *нормальным делителем* группы $G(\cdot)$, если A является подгруппой группы $G(\cdot)$ и $g \cdot A \cdot g^{-1} = A$ для любого элемента $g \in G$.

Б.5. Определение. Множество Z всех таких элементов z группы $G(\cdot)$, что $z \cdot g = g \cdot z$ для любого элемента $g \in G$ называется *центром* группы $G(\cdot)$.

Легко заметить, что для любой группы $G(\cdot)$ ее центр является нормальным делителем

Б.6. Замечание. Для любой группы $G(\cdot)$ множество Λ всех нормальных делителей с порядком, который задается включением, является модулярной решеткой, причем $\inf\{A, B\} = A \cap B$ и $\sup\{A, B\} = A \cdot B$ для любых $A, B \in \Lambda$.

Б.7. Определение. Если $A(\cdot)$ - подгруппа группы $G(\cdot)$ и $S \subseteq A$, то говорим, что *множество S порождает подгруппу A* , если A является пересечением всех подгрупп группы $G(\cdot)$, содержащих множество S .

Легко заметить, что, если подгруппа A порождается множеством S , то $A = \{g_1^{k_1} \cdot \dots \cdot g_n^{k_n} \mid k_i \in \{-1, 0, 1\}, g_i \in S, 1 \leq i \leq n, n - \text{натурально е число}\}$.

Б.8. Определение. Отображение $f : G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ группы $G(\cdot)$ в группу $G'(\cdot)$ называется:

-- *групповым гомоморфизмом* (или короче, *гомоморфизмом*), если $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ для любых элементов $a, b \in G$.

-- *групповым изоморфизмом* (или короче, *изоморфизмом*), если f является групповым гомоморфизмом и биективным отображением.

Б.9. Определение. Если $f : G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ является гомоморфизмом группы $G(\cdot)$ в группу $G'(\cdot)$, то множество $\{g \in G \mid f(g) = e\}$ называется *ядром гомоморфизма f* и обозначается $\ker_f$.

Б.10. Замечание. Если N - нормальный делитель группы $G(\cdot)$, то множество $\overline{G} = \{g \cdot N \mid g \in G\}$ с операцией $(a \cdot N) \cdot (b \cdot N) = (a \cdot b) \cdot N$ является группой, причем в этой группе нормальный делитель N является единицей.

Группа $\overline{G}(\cdot)$ называется *факторгруппой* группы $G(\cdot)$ по нормальному делителю N и обозначается $G(\cdot)/N$.

Б.11. Замечание. Если N - нормальный делитель группы $G(\cdot)$, то отображение $f: G \rightarrow G/N$, отображающее элемент $g \in G$ в элемент $g \cdot N$, является групповым гомоморфизмом.

Этот гомоморфизм называется *каноническим гомоморфизмом*.

Б.12. Теорема. Если $f: G(\cdot) \rightarrow \overline{G}(\cdot)$ групповой гомоморфизм и $N = \ker_f$ (см. Б.9), то верны следующие утверждения:

1. если $a, b \in G$, то $a \cdot f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(f(a \cdot b)) = f^{-1}(f(a)) \cdot b$;
2. отображение $\bar{f}: G/N \rightarrow \overline{G}$, отображающее любой элемент $g \cdot N \in G/N$ в элемент $f(g) \in \overline{G}$, будет групповым гомоморфизмом и инъективным отображением;
3. если отображение $f: G(\cdot) \rightarrow \overline{G}(\cdot)$ является сюръекцией, то отображение $\bar{f}: G/N \rightarrow \overline{G}$, отображающее любой элемент $g \cdot N \in G/N$ в элемент $f(g) \in \overline{G}$, будет групповым изоморфизмом.

Б.13. Теорема. (Первая теорема об изоморфизме.) Пусть в группе $G(\cdot)$ заданы подгруппа A и нормальный делитель N . Если $f: G \rightarrow G/N$ - канонический гомоморфизм, то отображение $\varphi: A/(A \cap N) \rightarrow f(A)$, отображающее любой элемент $a \cdot (A \cap N) \in A/(A \cap N)$ в элемент $f(a) = a \cdot N \in f(A)$, является групповым изоморфизмом.

Б.14. Теорема. (Вторая теорема об изоморфизме.) Пусть в группе $G(\cdot)$ заданы такие нормальные делители A и B , что $A \subseteq B$. Если $f: G \rightarrow G/A$ - канонический гомоморфизм, то $f(B)$ будет нормальным делителем в группе G/A и отображение $\bar{f}: (G/A)/f(B) \rightarrow G/B$, отображающее любой элемент $(g \cdot A) \cdot f(B) \in (G/A)/f(B)$ в элемент $g \cdot B \in G/B$, будет групповым изоморфизмом.

Б.15. Определение. Изоморфизмы φ и $\bar{f}$, указанные в теоремах Б.13 и Б.14 будем называть *естественными изоморфизмами*.

Б.16. Замечание. Пусть $\tilde{N}$ - множество всех нормальных делителей группы $G(\cdot)$. Зададим на множестве $\tilde{N}$ бинарное отношение $\leq$ следующим образом: будем считать $A \leq B$, если $A \subseteq B$. Тогда $(\tilde{N}, \leq)$ будет модулярной решеткой (см. А.15), в которой $\inf\{A, B\} = A \cap B$ и $\sup\{A, B\} = A \cdot B$.

Б.17. Определение. Пусть дано семейство $\{G_\gamma(\cdot) | \gamma \in \Gamma\}$ групп. Рассмотрим произведение $\hat{G} = \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ семейства $\{G_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ множеств G_γ (см. А.9).

Определим на множестве $\hat{G}$ операцию умножения следующим образом: если f и $\varphi \in \hat{G}$, то в качестве отображения $\varphi \cdot f : \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ возьмем такое отображение $\psi \in \hat{G}$, что $\psi(\gamma) = f(\gamma) \cdot \varphi(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$.

Тогда $\hat{G}(\cdot)$ будет группой и проекция $\pi_\gamma : \hat{G} \rightarrow G_\gamma$ (см. А.11) будет сюръективным, групповым гомоморфизмом.

Группу $\hat{G}(\cdot)$ назовем *прямым произведением семейства $\{G_\gamma(\cdot) | \gamma \in \Gamma\}$ групп* и будем обозначать $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma(\cdot)$.

Б.18. Определение. Пусть дано семейство $\{G_\gamma(\cdot) | \gamma \in \Gamma\}$ групп. Рассмотрим произведение $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma(\cdot)$ этого семейства групп.

Если e_γ - единица группы G_γ , то рассмотрим множество $\tilde{G}$ всех таких элементов $f \in \hat{G}$, что $\{\gamma | f(\gamma) \neq e_\gamma\}$ является конечным множеством.

Легко заметить, что $\tilde{G}$ является нормальным делителем в группе $\hat{G}$.

Подгруппу $\tilde{G}$ назовем *прямой суммой семейства $\{G_\gamma(\cdot) | \gamma \in \Gamma\}$ групп*, и будем обозначать $\tilde{G}(\cdot) = \sum_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma(\cdot)$.

Б.19. Теорема. Если для коммутативной группы $G(\cdot)$ существует такое натуральное число n , что $g^n = e$ для всех элементов $g \in G$, то группа $G(\cdot)$ является прямой суммой некоторого семейства циклических групп (см. Б.2 и Б.18).

Б.20. Определение. Если в группе $G(\cdot)$ задана такая система $\{A_\delta | \delta \in \Delta\}$ нормальных делителей, что $\bigcap_{\delta \in \Delta} A_\delta = \{e\}$, то говорим, что группа $G(\cdot)$ является *подпрямым произведением семейства $\{G(\cdot)/A_\delta | \delta \in \Delta\}$ групп $G(\cdot)/A_\delta$* .

Б.21. Теорема. Пусть группа $G(\cdot)$ является подпрямым произведением семейства $\{G(\cdot)/A_\delta | \delta \in \Delta\}$ групп $G(\cdot)/A_\delta$ и для каждого $\delta \in \Delta$ $f_\delta : G(\cdot) \rightarrow G(\cdot)/A_\delta$ - канонический гомоморфизм. Если каждому элементу

$g \in G$ поставим в соответствии такой элемент $\varphi_g \in \prod_{\delta \in \Delta} G(\cdot) / A_\delta$, что $\varphi_g(\delta) = f_\delta(g)$ для любого $\delta \in \Delta$, то полученное отображение $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G(\cdot) / A_\delta$ будет инъективным групповым гомоморфизмом.

Б.22. Теорема. Пусть группа $\hat{G}(\cdot)$ является прямым произведением семейства $\{G_\delta(\cdot) \mid \delta \in \Delta\}$ групп, $G(\cdot)$ - некоторая группа и для каждого элемента $\delta \in \Delta$ задан групповой гомоморфизм $f_\delta : G(\cdot) \rightarrow G_\delta(\cdot)$. Если каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствии такой элемент $\hat{h}_g \in \hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$, что $\pi_\delta(\hat{h}_g) = f_\delta(g)$ для любого $\delta \in \Delta$, то получим отображение $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$, причем верны следующие утверждения:

1. отображение $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ является групповым гомоморфизмом;
2. если $\bigcap_{\delta \in \Delta} \ker f_\delta = \{e\}$, то $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ будет инъективным гомоморфизмом.

В. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ.

Подробное изложение результатов, изложенных в этом разделе можно найти, например, в работах [3,4,6,11] или в других учебниках по общей топологии.

В.1. Определение. Говорим, что на непустом множестве X определена *топологическая структура* (или короче, *топология*), если задана такая совокупность τ подмножеств множества X , что выполняются следующие условия:

1. $\emptyset$ и $X \in \tau$;
2. если U и $V \in \tau$, то $U \cap V \in \tau$;
3. если $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$, то $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \in \tau$.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*, а подмножества множества X , которые принадлежат совокупности τ , называются *открытыми множествами топологического пространства (X, τ)* .

В.2. Определение. Подмножество $F \subseteq X$ называется:

-- замкнутым множеством в топологическом пространстве, если $X \setminus F \in \tau$;

-- открыто-замкнутым множеством, если оно является открытым и замкнутым множеством одновременно.

В.3. Определения.

-- Если X - произвольное непустое множество и $\tau = \{A \mid A \subseteq X\}$, т.е. совокупность τ состоит из всех подмножеств множества X , то τ называется *дискретной топологией*, а топологическое пространство (X, τ) называется *дискретным пространством*;

-- Если X - произвольное непустое множество и $\tau = \{\emptyset, X\}$, т.е. совокупность τ состоит из двух подмножеств множества X , то τ называется *антидискретной топологией*, а топологическое пространство (X, τ) называется *антидискретным пространством*;

-- Если R - множество всех действительных чисел, и $\tau_{\text{инт}}$ - множество всех таких подмножеств множества R , каждое из которых можно представить как объединение некоторой совокупности интервалов, то $\tau_{\text{инт}}$ является топологией на множестве R , и она называется *интервальной топологией* на множестве действительных чисел, а $(R, \tau_{\text{инт}})$ называется *топологическим пространством действительных чисел с интервальной топологией*.

В.4. Определение. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$. Подмножество $V \subseteq X$ называется *окрестностью точки a* в топологическом пространстве (X, τ) , если существует такое множество $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq V$.

В.5. Определение. Если (X, τ) - топологическое пространство и $a \in X$, то совокупность Ω подмножеств множества X называется *базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ)* , если выполнены следующие условия:

1. любое множество $V \in \Omega$ является окрестностью точки a в топологическом пространстве (X, τ) ;

2. для любой окрестности U точки a в топологическом пространстве (X, τ) существует такое множество $V \in \Omega$, что $V \subseteq U$.

В.6. Теорема. Подмножество $U \subseteq X$ является *открытым* в топологическом пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда U является *окрестностью любой своей точки*.

В.7. Определение. Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $M \subseteq X$. Элемент $a \in X$ называется *точкой прикосновения к множеству M* ,

если $V \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности V точки a в топологическом пространстве (X, τ) .

В.8. Определение. Замыканием множества M в топологическом пространстве (X, τ) называется множество всех точек прикосновения к множеству M .

Замыкание множества M в топологическом пространстве (X, τ) будем обозначать $[M]_{(X, \tau)}$.

В.9. Теорема. Если (X, τ) - топологическое пространство и $M \subseteq X$, то верны следующие утверждения:

1. $M \subseteq [M]_{(X, \tau)}$ и $[M]_{(X, \tau)}$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ) ;
2. Подмножество $F \subseteq X$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда $F = [F]_{(X, \tau)}$.

В.10. Определение. Подмножество $A \subseteq X$ называется плотным в топологическом пространстве (X, τ) , если $X = [A]_{(X, \tau)}$.

В.11. Определение. Если (X, τ) - топологическое пространство и $A \subseteq X$, то совокупность $\tau|_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$ является топологией на множестве A .

Топологическое пространство $(A, \tau|_A)$ называется подпространством топологического пространства (X, τ) .

В.12. Теорема. Если $(A, \tau|_A)$ - подпространство топологического пространства (X, τ) , то верны следующие утверждения:

1. Подмножество $U \subseteq A$ будет открытым в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$ тогда и только тогда, когда существует такое открытое множество V в топологическом пространстве (X, τ) , что $U = V \cap A$;
2. Подмножество $F \subseteq A$ будет замкнутым в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$ тогда и только тогда, когда существует такое замкнутое множество B в топологическом пространстве (X, τ) , что $F = B \cap A$;
3. Подмножество $U \subseteq A$ будет окрестностью точки $a \in A$ в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$ тогда и только тогда, когда существует такая окрестность V точки a в топологическом пространстве (X, τ) , что $U = V \cap A$;
4. Если $M \subseteq A$, то $[M]_{(A, \tau|_A)} = A \cap [M]_{(X, \tau)}$.

В.13. Определение. Говорим, что на множестве X задана *псевдометрика*, если на множестве X задана такая действительно-значная функция $\rho(x, y)$, что выполнены следующие условия:

1. $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых $x, y, z \in X$.

Если псевдометрика $\rho(x, y)$ вместо условия 1 удовлетворяет условию

1'. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, то псевдометрика $\rho(x, y)$ называется *метрикой*.

Если на множестве X задана некоторая метрика (псевдометрика), то (X, ρ) называется *метрическим пространством* (псевдометрическим пространством).

В.14. Теорема. Если на множестве X задана некоторая псевдометрика ρ , то совокупность $\tau_\rho = \{U \subseteq X \mid \forall a \in U \exists \varepsilon > 0, \{x \in X \mid \rho(a, x) < \varepsilon\} \subseteq U\}$ будет топологией на множестве X .

Топология τ_ρ называется *топологией, задаваемой псевдометрикой ρ* .

Если для топологии τ , заданной на множестве X существует такая метрика ρ , что $\tau = \tau_\rho$, то топологическое пространство (X, τ) называется *псевдометризуемым*.

Если ρ является метрикой на множестве X , то топологическое пространство (X, τ) называется *метризуемым*.

В.15. Определение. Если τ_1 и τ_2 - топологии на множестве X , то будем считать, что $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

В.16. Теорема. Множество Δ всех топологий на множестве X с бинарным отношением $\leq$, данным в В.15, является полной решеткой (см. А.15), т.е. существует $\inf S$ и существует $\sup S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \Delta$.

В.17. Теорема. Пусть S - непустое множество топологий на множестве X . Тогда верны следующие утверждения:

1. если $\tau_0 = \inf S$, то $\tau_0 = \bigcap_{\tau \in S} \tau$;

2. если $\tau_0 = \sup S$ и $a \in X$, то подмножество $U \subseteq X$ будет окрестностью элемента a в топологическом пространстве (X, τ_0) тогда и только тогда, когда существует такое конечное подмножество $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \subseteq S$ и для каждого

$1 \leq i \leq n$ в топологическом пространстве (X, τ_i) существует такая окрестность U_i точки a , что $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

В.18. Определение. Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства. Если $f: X \rightarrow Y$, то отображение $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ в топологическом пространстве (Y, τ_2) существует такая окрестность V точки a в топологическом пространстве (X, τ_1) , что $f(V) \subseteq U$.

В.19. Теорема. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства, отображение $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ будет непрерывным в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ будет окрестностью точки a в топологическом пространстве (X, τ_1) для любой окрестности U точки $f(a)$ в топологическом пространстве (Y, τ_2) .

В.20. Определение. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства, то отображение $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ называется *непрерывным*, если оно является непрерывным в каждой точки $x \in X$.

В.21. Теорема. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства и $f: X \rightarrow Y$, то следующие утверждения эквивалентны:

1. $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением;
2. $f^{-1}(U) \in \tau_1$ для любого множества $U \in \tau_2$;
3. $f^{-1}(F)$ будет замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ_1) для любого замкнутого множества F в топологическом пространстве (Y, τ_2) .
4. $f([S]_{(X, \tau_1)}) \subseteq [f(S)]_{(Y, \tau_2)}$ для любого подмножества $S \subseteq X$.

В.22. Определение. В топологическом пространстве (X, τ) рассматриваются следующие аксиомы отделимости:

- аксиома T_0 : для любых различных точек $a, b \in (X, \tau)$ хотя бы одна из них обладает окрестностью, которая не содержит другую из этих точек;
- аксиома T_1 : для любых различных точек $a, b \in (X, \tau)$ каждая из них обладает окрестностью, которая не содержит другую из этих точек;
- аксиома T_2 : для любых различных точек $a, b \in (X, \tau)$ существуют такие окрестности U и V точек a и b , соответственно, что $U \cap V = \emptyset$.

Топологическое пространство, в котором выполняется аксиома T_2 , еще называется *Хаусдорфовым пространством*;

-- аксиома T_3 : для любого замкнутого множества F и точки $a \notin F$ существуют такие открытые множества U и V , что $a \in U$, $F \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$;

-- *регулярным пространством* называется топологическое пространство (X, τ) , в котором выполняется аксиомы T_3 и T_1 ;

-- *вполне регулярным пространством* называется топологическое пространство (X, τ) , в котором выполняется аксиома T_1 и для любого замкнутого множества F и точки $a \notin F$ существует такое непрерывное отображение $f: (X, \tau) \rightarrow (R, \tau_{\text{инт}})$ (см. Б.3), что $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого $x \in X$, причем $f(a) = 0$ и $f(x) = 1$ для любого $x \in F$.

В.23. Теорема. В топологическом пространстве (X, τ) выполняется аксиома отделимости T_1 тогда и только тогда, когда в нем всякое одноэлементное множество $\{x\}$ является замкнутым.

В.24. Определения. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства, то отображение $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ называется:

-- *открытым отображением*, если $f(V) \in \tau_2$ для любого множества $V \in \tau_1$;

-- *замкнутым отображением*, если $f(F)$ будет замкнутым множеством в топологическом пространстве (Y, τ_2) для любого замкнутого множества F в топологическом пространстве (X, τ_1) ;

-- *гомеоморфным отображением* (или короче, *гомеоморфизмом*), если $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ является биекцией, непрерывным и открытым отображением.

В.25. Теорема. Пусть X и Y - произвольные множества и $f: X \rightarrow Y$. Если τ - топология на множестве Y , то $\tau_f = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau\}$ будет топологией на множестве X , причем верны следующие утверждения:

1. $f: (X, \tau_f) \rightarrow (Y, \tau)$ является непрерывным отображением;

2. Если $f: X \rightarrow Y$ является сюръективным отображением, то $f: (X, \tau_f) \rightarrow (Y, \tau)$ является непрерывным и открытым отображением.

Топология τ_f называется *прообразом топологии τ относительно отображения f* .

В.26. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *связным*, если в нем нет открыто-замкнутых множеств отличных от $\emptyset$ и X .

В.27. Определение. Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *связным*, если пространство $(A, \tau|_A)$ является связным.

В.28. Теорема. Если в топологическом пространстве (X, τ) задана такая совокупность $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ связных множеств, что $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$, то и множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ будет связным множеством.

В.29. Теорема. Если подмножество $A \subseteq X$ является связным множеством в топологическом пространстве (X, τ) , то множество $[A]_{(X, \tau)}$ будет связным множеством в топологическом пространстве (X, τ) .

В.30. Теорема. Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) - топологические пространства, и $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение. Если $A \subseteq X$, то верны следующие утверждения:

1. $f|_A: (A, \tau_1|_A) \rightarrow (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением;
2. Если A является связным множеством в топологическом пространстве (X, τ_1) , то и множество $f(A)$ будет связным множеством в топологическом пространстве (Y, τ_2) . В частности, если $X = Y$ и $\tau_1 \geq \tau_2$, то множество A будет связным множеством в топологическом пространстве (X, τ_2) ;

В.31. Теорема. Пусть в топологическом пространстве (X, τ) задано открыто-замкнутое множество U . Если A - связное множество в топологическом пространстве (X, τ) , то либо $A \cap U = \emptyset$, либо $A \subseteq U$.

В.32. Определения.

-- Связной компонентой C_a точки a в топологическом пространстве (X, τ) называется объединение всех связных множеств в топологическом пространстве (X, τ) , которые содержат точку a .

-- Топологическое пространство (X, τ) называется *вполне несвязным*, если в нем связная компонента любой точки x равна $\{x\}$, т.е. если в топологическом пространстве (X, τ) всякое связное множество является одноэлементным множеством или пустым множеством.

В.33. Теорема. В произвольном топологическом пространстве (X, τ) для любой его точки a связная компонента C_a этой точки является замкнутым

связным множеством, и для любых точек $a, b \in X$ их связные компоненты либо совпадают, либо не имеют общих точек.

В.34. Определения:

-- Совокупность $\Delta = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ открытых подмножеств топологического пространства (X, τ) называется *открытым покрытием* множества A , если $A \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$.

-- Если подмножество $\Omega \subseteq \Delta$ является покрытием множества A , то Ω называется *подпокрытием* покрытия Δ множества A .

В.35. Определение. Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *компактным в топологическом пространстве (X, τ)* , если для любого открытого покрытия множества A существует его конечное подпокрытие.

Если же само множество X является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ) , то топологическое пространство (X, τ) называется *компактным пространством*.

В.36. Замечание. Легко заметить, что подмножество $A \subseteq X$ является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда топологическое пространство $(A, \tau|_A)$ является компактным пространством.

В.37. Замечание. Легко заметить, что если подмножества $A, B \subseteq X$ являются компактными множествами в топологическом пространстве (X, τ) , то и множество $A \cup B$ будет компактным в топологическом пространстве (X, τ) .

В.38. Теорема. Если $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение, и подмножество $A \subseteq X$ является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ_1) , то $f(A)$ будет компактным множеством в топологическом пространстве (Y, τ_2) .

В.39. Теорема. Топологическое пространство (X, τ) будет компактным пространством тогда и только тогда, когда $\bigcap_{S \in \Omega} [S]_{(X, \tau)} \neq \emptyset$ для любой совокупности Ω подмножеств множества X , которая является базисом некоторого фильтра во множестве X (см. А.24).

В.40. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *локально компактным пространством*, если в пространстве (X, τ) любая точка обладает базисом окрестностей, которые являются компактными множествами.

В.41. Теорема. Если топологическое пространство (X, τ) является Хаусдорфовым, локально компактным, вполне несвязным пространством, то для любого его открытого подмножества U и произвольной точки $a \in U$ существует такое компактное подмножество V , что $V \in \tau$ и $a \in V \subseteq U$.

В.42. Определение. Пусть дана совокупность $\{(X_\gamma, \tau_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ топологических пространств и $\hat{X} = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ - произведение совокупности $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ множеств X_γ (см. А.9). Для каждого $\gamma \in \Gamma$ рассмотрим на множестве $\hat{X}$ топологию $\hat{\tau}_\gamma$, которая является прообразом топологии τ_γ относительно проекции $\pi_\gamma : \hat{X} \rightarrow X_\gamma$ (см. А.11 и В.25).

Если $\hat{\tau} = \sup \{\hat{\tau}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (см. теорему В.16), то топологическое пространство $(\hat{X}, \hat{\tau})$ называется *произведением совокупности $\{(X_\gamma, \tau_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ топологических пространств*, и будем обозначать $(\hat{X}, \hat{\tau}) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$, а топология $\hat{\tau}$ называется *топологией произведения семейства топологических пространств*.

В.43. Теорема. Если $(\hat{X}, \hat{\tau}) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$, то $\pi_\gamma : (\hat{X}, \hat{\tau}) \rightarrow (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является сюръективным, непрерывным и открытым отображением.

I. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП.

Определение I.1. Если на группе $G(\cdot)$ задана топология τ , то $(G(\cdot), \tau)$ называется *топологической группой*, а топология τ называется *групповой топологией*, если выполнены следующие условия:

1. Непрерывность операции умножения, т.е. для любых элементов a, b группы $G(\cdot)$ и для любой окрестности V элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) , существуют такие окрестности V_a и V_b элементов a и b , соответственно, что $V_a \cdot V_b \subseteq V$;

2. Непрерывность операции взятия обратного, т.е. для любого элемента a группы $G(\cdot)$ и произвольной окрестности U элемента a^{-1} в топологическом пространстве (G, τ) существует такая окрестность V_a элемента a , что $V_a^{-1} \subseteq U$.

I.2. Примеры

I.2.1. Если на группе $G(\cdot)$ задана дискретная топология τ , то группа $G(\cdot)$ в этой топологии будет топологической группой.

В самом деле, пусть a, b – произвольные элементы группы $G(\cdot)$ и V – некоторая окрестность элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) . Тогда элемент $a \cdot b$ принадлежит окрестности V , т.е. $a \cdot b \in V$.

Так как топология τ является дискретной, то $\{a\}, \{b\} \in \tau$, и значит, $\{a\}$ является окрестностью элемента a и $\{b\}$ является окрестностью элемента b . При этом $\{a\} \cdot \{b\} = \{a \cdot b\} \subseteq V$, и значит, операция произведения является непрерывной.

Пусть теперь a – произвольный элемент группы $G(\cdot)$ и V – некоторая окрестность элемента a^{-1} в топологическом пространстве (G, τ) . Тогда элемент a^{-1} принадлежит V , т.е. $\{a^{-1}\} \subseteq V$.

Так как топология τ является дискретной, то $\{a\} \in \tau$, и значит, $\{a\}$ будет окрестностью элемента a . При этом $\{a\}^{-1} = \{a^{-1}\} \subseteq V$, и значит, операция взятия обратного тоже является непрерывной.

Таким образом, оба условия определения топологической группы выполняются. Следовательно, если на группе задана дискретная топология, то в этой топологии группа является топологической группой.

I.2.2. Если на группе $G(\cdot)$ задана антидискретная топология τ , то группа $G(\cdot)$ в этой топологии будет топологической группой.

В самом деле, пусть a и b - произвольные элементы группы $G(\cdot)$ и V - некоторая окрестность элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) . Тогда существует такое множество $U \in \tau$, что $a \cdot b \in U \subseteq V$.

Так как топология τ является антидискретной, то $U = G$, и значит, $V = G$.

Возьмём $V_a = G$ и $V_b = G$. Так как $G \in \tau$ и $a \in G$, то G будет окрестностью элемента a . Аналогично, G является окрестностью элемента b . Тогда $V_a \cdot V_b = G \cdot G = \{x \cdot y \mid x \in G, y \in G\} \subseteq G = V$.

Итак, операция произведения является непрерывной.

Пусть теперь a - произвольный элемент группы $G(\cdot)$ и V - некоторая окрестность элемента a^{-1} .

Так как топология τ является антидискретной, то $V = G$.

Возьмём $V_a = G$. Так как $G \in \tau$ и $a \in G$, то множество G будет окрестностью элемента a и $V_a^{-1} = G^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in G\} \subseteq G = V$.

Итак, операция взятия обратного тоже является непрерывной.

Таким образом, оба условия определения топологической группы выполняются. Следовательно, если на группе задана антидискретная топология, то в этой топологии группа является топологической группой.

I.2.3. Пусть R - множество всех действительных чисел. Тогда относительно обычной операции сложения R является абелевой группой. Рассмотрим на множестве R интервальную топологию $\tau_{\text{инт}}$ (см. В.3) и докажем, что $(R(+), \tau_{\text{инт}})$ является топологической группой.

В самом деле, пусть a и b - произвольные элементы группы $R(+)$ и V - некоторая окрестность элемента $a + b$ в топологическом пространстве $(R, \tau_{\text{инт}})$. Тогда существует $W \in \tau_{\text{инт}}$ такое, что $a + b \in W \subseteq V$.

Так как $\tau_{\text{инт}}$, то $W = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$, и значит, существует такой элемент $\gamma_0 \in \Gamma$, что $a + b \in (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что $(a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon) \subseteq (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$.

Возьмем $V_a = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $V_b = \left(b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда множества V_a и V_b будут окрестностями элементов a и b , соответственно, причем

$$V_a + V_b = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right) =$$

$$\left(\left(a - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left(b - \frac{\varepsilon}{2} \right), \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left(b + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = \\ (a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon) \subseteq (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0}) \subseteq V.$$

Итак, мы проверили, что операция сложения является непрерывной в топологическом пространстве $(R, \tau_{\text{инт}})$.

Пусть теперь $a \in R$ и V - окрестность элемента $-a$. Тогда существует такое множество $W \in \tau_{\text{инт}}$, что $-a \in W \subseteq V$. Так как $W = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$, то существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $-a \in (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$, и существует такое число $\varepsilon > 0$, что $(-a - \varepsilon, -a + \varepsilon) \subseteq (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$.

Возьмем $V_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Тогда V_a будет окрестностью элемента a в топологическом пространстве $(R, \tau_{\text{инт}})$, причем $-V_a = (-a - \varepsilon, -a + \varepsilon) \subseteq (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0}) \subseteq W \subseteq V$, т.е. $-V_a \subseteq V$, и значит, является непрерывной и операция взятия противоположного элемента.

Итак, в группе $R(+)$ выполняются оба условия определения I.1, и значит, $(R(+), \tau)$ является топологической группой.

Теорема I.3. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, и $a \in G$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) отображение $R_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ (см. Б.3) будет гомеоморфизмом (см. В.24), т.е. является биективным, непрерывным и открытым отображением;
- 2) отображение $L_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ (см. Б.3) будет гомеоморфизмом;
- 3) отображение $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ (см. Б.3) является гомеоморфизмом.

Доказательство. Согласно замечанию Б.3, отображение $R_a : G \rightarrow G$ является биекцией.

Проверим, что отображением $R_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ будет непрерывным.

Пусть x – произвольный элемент группы $G(\cdot)$. Покажем, что отображение $R_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным в точке x .

Пусть V – окрестность элемента $R_a(x) = x \cdot a$ в топологическом пространстве (G, τ) .

Так как $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, то существуют такие окрестности V_x и V_a точек x и a , соответственно, что $V_x \cdot V_a \subseteq V$.

Тогда $R_a(V_x) = V_x \cdot a \subseteq V_x \cdot V_a \subseteq V$.

Итак, мы показали, что отображение $R_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным в точке x .

Из произвольности элемента $x \in G$ следует, что отображение $R_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным.

Проверим теперь, что отображением $R_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является открытым.

Заметим в начале, что отображение $R_{a^{-1}} : G \rightarrow G$ является обратным отображением к отображению $R_a : G \rightarrow G$.

Действительно, $R_{a^{-1}} \circ R_a(x) = R_{a^{-1}}(R_a(x)) = R_{a^{-1}}(x \cdot a) = x \cdot a \cdot a^{-1} = x$ и $R_a \circ R_{a^{-1}}(x) = R_a(R_{a^{-1}}(x)) = R_a(x \cdot a^{-1}) = x \cdot a^{-1} \cdot a = x$, и значит, $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$.

Пусть теперь $U \in \tau$. Так как $R_{a^{-1}} : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным отображением (а это было проверено выше для любого элемента $a \in G$), то $R_a(U) = R_{(a^{-1})^{-1}}(U) = (R_{a^{-1}})^{-1}(U) \in \tau$, как прообраз открытого множества U при непрерывном отображении $R_{a^{-1}} : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ (см. В.21).

Таким образом, мы доказали, что отображение R_a является биективным, непрерывным и открытым, т.е. R_a является гомеоморфизмом.

Этим утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично утверждению 1).

Согласно замечанию Б.3 отображение $\varepsilon : G \rightarrow G$ является биекцией.

Пусть x – произвольный элемент группы $G(\cdot)$. Покажем, что отображение $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным в точке x .

Если V – произвольная окрестность элемента $\varepsilon(x) = x^{-1}$, то из того, что $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, следует, что существует такая окрестность V_x точки x , что $V_x^{-1} \subseteq V$. Тогда $\varepsilon(V_x) = V_x^{-1} \subseteq V$, и значит, $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным отображением в точке x .

Из произвольности точки x следует, что $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является непрерывным отображением.

Докажем теперь, что ε является открытым отображением.

Так как $\varepsilon(\varepsilon(x)) = \varepsilon(x^{-1}) = (x^{-1})^{-1} = x$ для любого элемента $x \in G$, то $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$. Если теперь $V \in \tau$, то из непрерывности $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ следует, что $\varepsilon(V) = \varepsilon^{-1}(V) \in \tau$ (см. В.21), и значит, $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является гомеоморфизмом.

Этим утверждение 3) доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема I.4. Если τ - топология на группе $G(\cdot)$, то, для того, чтобы группа $G(\cdot)$ была топологической группой, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

(*) для любых элементов x и y группы $G(\cdot)$ и любой окрестности U элемента $x \cdot y^{-1}$ в топологическом пространстве (G, τ) существуют такие окрестности V_x и V_y элементов x и y , соответственно, что $V_x \cdot V_y^{-1} \subseteq U$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, x и y - элементы группы $G(\cdot)$. Если U - окрестность элемента $x \cdot y^{-1}$, то из непрерывности операции умножения в топологической группе следует, что существуют такие окрестности V_x и $V_{y^{-1}}$ элементов x и y^{-1} , соответственно, что $V_x \cdot V_{y^{-1}} \subseteq U$.

Поскольку в топологической группе операция взятия обратного является непрерывной, то существует такая окрестность V_y элемента y , что $V_y^{-1} \subseteq V_{y^{-1}}$. Тогда $V_x \cdot V_y^{-1} \subseteq V_x \cdot V_{y^{-1}} \subseteq U$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь для топологии τ в группе $G(\cdot)$ выполнено условие (*). Покажем, что $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой.

Сначала проверим, что операция взятия обратного является непрерывной в топологическом пространстве (G, τ) .

Пусть x - произвольный элемент группы $G(\cdot)$ и U - окрестность элемента x^{-1} в топологическом пространстве (G, τ) .

Так как $x^{-1} = e \cdot x^{-1}$ и в топологическом пространстве (G, τ) выполняется условие (*), то существуют такие окрестности V и V_x элементов e и x , соответственно, что $V \cdot V_x^{-1} \subseteq U$.

Так как $V_x^{-1} = e \cdot V_x^{-1}$ и $e \in V$, то $V_x^{-1} = e \cdot V_x^{-1} \subseteq V \cdot V_x^{-1} \subseteq U$.

Итак, мы показали, что операция взятия обратного является непрерывной в топологическом пространстве (G, τ) .

Пусть теперь x и y - произвольные элементы группы $G(\cdot)$ и U - любая окрестность элемента $x \cdot y$ в топологическом пространстве (G, τ) . Так как $x \cdot y = x \cdot (y^{-1})^{-1}$, то U будет окрестностью элемента $x \cdot (y^{-1})^{-1}$.

Согласно условию (*) существуют такие окрестности V_x и $V_{y^{-1}}$ элементов x и y^{-1} , соответственно, что $V_x \cdot V_{y^{-1}}^{-1} \subseteq U$.

Выше было проверено, что в топологическом пространстве (G, τ) операция взятия обратного является непрерывной, и значит, существует такая окрестность V_y элемента y , что $V_y^{-1} \subseteq V_{y^{-1}}$. Тогда $V_x \cdot V_y = V_x \cdot (V_y^{-1})^{-1} \subseteq V_x \cdot (V_{y^{-1}})^{-1} \subseteq U$, т.е. и операция умножения является непрерывной.

Следовательно, $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема I.5. Пусть на группе $G(\cdot)$ задана, некоторая топология τ . Тогда $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

(**) для любых элементов x и y группы $G(\cdot)$ и любой окрестности U элемента $x^{-1} \cdot y$ в топологическом пространстве (G, τ) существуют такие окрестности V_x и V_y элементов x и y , соответственно, что $V_x^{-1} \cdot V_y \subseteq U$.

Доказательство. (Аналогично, доказательству теоремы I.4.)

Теорема I.6. Если на группе $G(\cdot)$ задана совокупность Δ групповых топологий, и $\tau = \sup \Delta$ (см. B.16), то $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой.

Доказательство. Пусть x и y - произвольные элементы из группы $G(\cdot)$, и U - окрестность элемента $x \cdot y^{-1}$ в топологическом пространстве (G, τ) .

Тогда (см. B.17), существует такое конечное множество $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ топологий из совокупности Δ , и существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ точки $x \cdot y^{-1}$ в топологических пространствах $(G, \tau_1), \dots, (G, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap_{i=1}^n U_i = U$.

Так как для каждого $1 \leq i \leq n$ топология τ_i является групповой топологией на группе $G(\cdot)$, то согласно теореме I.4, в топологической группе $(G(\cdot), \tau_i)$ существуют такие окрестности V_i и W_i элементов x и y , соответственно, что $V_i \cdot W_i^{-1} \subseteq U_i$.

Тогда (см. В.17) $\bigcap_{i=1}^n V_i = V$ и $\bigcap_{i=1}^n W_i = W$ будут окрестностями элементов x и y , соответственно, в топологическом пространстве (G, τ) , причем

$$V \cdot W^{-1} = \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right) \cdot \left(\bigcap_{i=1}^n W_i \right)^{-1} = \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right) \cdot \left(\bigcap_{i=1}^n W_i^{-1} \right) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (V_i \cdot W_i^{-1}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U.$$

Из произвольности элементов x и y , и произвольности окрестности U следует, что $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой.

Этим теорема полностью доказана.

Замечание I.7. Позже (см. дальше, замечание V.5) будет показано, что $\inf S$ (см. В.16) множества S групповых топологий, заданных на группе $G(\cdot)$ может не быть групповой топологией.

II. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК В ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

Теорема II.1. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, $V \subseteq G$ и $x \in G$. Тогда в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следующие условия эквивалентны:

1. V является окрестностью единицы e ;
2. $V \cdot x$ является окрестностью точки x ;
3. $x \cdot V$ является окрестностью точки x ;
4. V^{-1} является окрестностью единицы e ;
5. $x \cdot V \cdot x^{-1}$ является окрестностью единицы e .

Доказательство. Покажем, что из утверждения 1) следует утверждение 2).

Если V – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то (см. В.4) существует такое множество $W \in \tau$, что $e \in W \subseteq V$. Тогда $x = e \cdot x \in W \cdot x \subseteq V \cdot x$. Так как, согласно утверждению 1 теоремы I.3, $W \cdot x = R_x(W) \in \tau$, то $V \cdot x$ является окрестностью точки x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, из утверждения 1) следует утверждение 2).

Покажем теперь, что из утверждения 2) следует утверждение 1).

Пусть $V \cdot x$ – окрестность точки x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда существует такое множество $W \in \tau$, что $x \in W \subseteq V \cdot x$. Так как $e = x \cdot x^{-1} \in W \cdot x^{-1} \subseteq V \cdot x \cdot x^{-1} = V$, и согласно утверждению 1 теоремы I.3, $W \cdot x^{-1} = R_{x^{-1}}(W) \in \tau$, то V является окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $1) \Leftrightarrow 2)$.

Покажем, что из утверждения 1) следует утверждение 3).

Пусть V – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда существует такое множество $W \in \tau$, что $e \in W \subseteq V$. Так как $x = x \cdot e \in x \cdot W \subseteq x \cdot V$, и согласно утверждению 2 теоремы I.3, $x \cdot W = L_x(W) \in \tau$, то $x \cdot V$ является окрестностью точки x , и значит, из утверждения 1) следует утверждение 3).

Покажем теперь, что из утверждения 3) следует утверждение 1).

Пусть теперь $V \subseteq G$ – такое подмножество, что $x \cdot V$ – окрестность точки x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда существует такое множество $W \in \tau$, что $x \in W \subseteq x \cdot V$. Так как $e = x^{-1} \cdot x \cdot e \in x^{-1} \cdot W \subseteq x^{-1} \cdot x \cdot V = V$, и (см. утверждение 2 теоремы I.3) $x^{-1} \cdot W = L_{x^{-1}}(W) \in \tau$, то V является окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Таким образом, $1) \Leftrightarrow 3)$.

Покажем, что из утверждения 1) следует утверждение 4).

Пусть V – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда существует такое множество $W \in \tau$, что $e \in W \subseteq V$. Так как

$e = e^{-1} \in W^{-1} \subseteq V^{-1}$, и согласно утверждению 3 теоремы I.3, $W^{-1} = \varepsilon(W) \in \tau$, то V^{-1} является окрестностью точки e , и значит, из утверждения 1) следует утверждение 4).

Покажем теперь, что из утверждения 4) следует утверждение 1).

Пусть V^{-1} – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда, как было показано выше, $(V^{-1})^{-1}$ будет окрестностью точки $e^{-1} = e$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и поскольку $V = (V^{-1})^{-1}$, то V является окрестностью точки e .

Таким образом, $1) \Leftrightarrow 4)$.

Покажем, что из утверждения 1) следует утверждение 5).

Пусть V – окрестность точки e . Так как утверждения 1) и 3) эквивалентны, то $x \cdot V$ будет окрестностью точки x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если $U = x \cdot V \cdot x^{-1}$, то $U \cdot x = x \cdot V$, и значит, $U \cdot x$ будет окрестностью точки x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как утверждения 1) и 2) эквивалентны, то U является окрестностью точки e , и значит, $x \cdot V \cdot x^{-1}$ является окрестностью точки e , т.е. из утверждения 1) следует утверждение 5).

Покажем, что из утверждения 5) следует утверждение 1).

Пусть $x \cdot V \cdot x^{-1} = U$ – окрестность точки e в $(G(\cdot), \tau)$.

Если $x \cdot V \cdot x^{-1} = U$, то из эквивалентности утверждений 1) и 2) следует, что $U \cdot x$ будет окрестностью точки x в $(G(\cdot), \tau)$. Так как $U \cdot x = (x \cdot V \cdot x^{-1}) \cdot x = x \cdot V$, и из утверждения 3) следует утверждение 1), то V является окрестностью точки e .

Таким образом, $1) \Leftrightarrow 5)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема II.2. Если $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, $V \subseteq G$ и $a \in G$, то следующие утверждения эквивалентны:

1. V – окрестность точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;
2. $a^{-1} \cdot V$ – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;
3. $V \cdot a^{-1}$ – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство.

Покажем, что из утверждения 1) следует утверждение 2).

Так как, утверждения 1 и 3 теоремы II.1 эквивалентны и $V = a \cdot (a^{-1} \cdot V)$, то $a^{-1} \cdot V$ будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, из утверждения 1) следует утверждение 2).

Покажем теперь, что из утверждения 2) следует утверждение 1).

Пусть $a^{-1} \cdot V$ – окрестность точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как утверждения 1 и 3 теоремы II.1 эквивалентны, то $a \cdot (a^{-1} \cdot V)$ является окрестностью точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$

С другой стороны, так как $a \cdot a^{-1} \cdot V = V$, то, V будет окрестностью точки a , и значит, из утверждения 2) следует утверждение 1).

Итак, $1) \Leftrightarrow 2)$.

Аналогично доказывается, что $1) \Leftrightarrow 3)$.

Теорема II.3. Если B – базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то для любого элемента $a \in G$ каждая из совокупностей $B_a = \{V \cdot a \mid V \in B\}$ и $B'_a = \{a \cdot V \mid V \in B\}$ будет базисом окрестностей точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Согласно теореме II.1, для любого множества $V \in B$ множество $V \cdot a$ будет окрестностью элемента a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Кроме того, если U – окрестность элемента a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно теореме II.2, $U \cdot a^{-1}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, существует такое множество $V \in B$, что $V \subseteq U \cdot a^{-1}$. Тогда $V \cdot a \subseteq U$.

Итак, мы доказали, что совокупностей $B_a = \{V \cdot a \mid V \in B\}$ является базисом окрестностей точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Аналогично доказывается, что совокупностей $B'_a = \{a \cdot V \mid V \in B\}$ будет базисом окрестностей точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема II.4. Если $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, то существует такой базис B окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, который состоит из открытых симметричных множеств (см. Б.4), т.е. верны следующие утверждения:

1. $V \in \tau$ для любого множества $V \in B$;
2. $V^{-1} = V$ для любого множества $V \in B$.

Доказательство.

Пусть A – множество всех окрестностей точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Для каждого $U \in A$ существует такое множество $W_U \in \tau$, что $e \in W_U \subseteq U$. Тогда, согласно теореме I.3, $W_U^{-1} = \varepsilon(W_U) \in \tau$, и значит, $W_U \cap W_U^{-1} \in \tau$. Так как $(W_U \cap W_U^{-1})^{-1} = W_U^{-1} \cap (W_U^{-1})^{-1} = W_U^{-1} \cap W_U$, то множества вида $W_U \cap W_U^{-1}$ являются открытыми и симметричными множествами.

Проверим, что $B = \{W_U \cap W_U^{-1} \mid U \in A\}$ является требуемым базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $e \in W_U \cap W_U^{-1}$, и $W_U \cap W_U^{-1} \in \tau$, то (см. В.6) $W_U \cap W_U^{-1}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Таким образом, первое условие определения базиса окрестностей точки (см. В.5) выполняется.

Пусть теперь U является окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $U \in A$, и значит, $W_U \cap W_U^{-1} \in B$. Причем $W_U \cap W_U^{-1} \subseteq W_U \subseteq U$.

Итак, мы показали, что выполняется и второе условие определения базиса окрестностей точки.

Следовательно, B является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем B состоит из открытых и симметричных окрестностей единицы.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема II.5. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, B - базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Если $A \subseteq G$, то верны следующие утверждения:

1. $[A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in B} A \cdot V$;
2. $[A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in B} V \cdot A$;
3. $N = \bigcap_{V \in B} V$ является замкнутым нормальным делителем в

топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Если $x \in [A]_{(G, \tau)}$ и $V \in B$, то, согласно утверждению 4 теоремы II.1, V^{-1} будет окрестностью точки e , и согласно утверждению 3 теоремы II.1, $x \cdot V^{-1}$ будет окрестностью точки x .

Так как $x \in [A]_{(G, \tau)}$, то x является точкой прикосновения к множеству A (см. В.8), и значит, $x \cdot V^{-1} \cap A \neq \emptyset$.

Если $a \in x \cdot V^{-1} \cap A$, то существует такой элемент $v \in V$, что $a = x \cdot v^{-1}$. Но тогда $x = a \cdot v \in A \cdot V$.

Из произвольности окрестности V следует, что $x \in \bigcap_{V \in B} A \cdot V$, а из произвольности элемента x следует, что $[A]_{(G, \tau)} \subseteq \bigcap_{V \in B} A \cdot V$.

Пусть теперь $x \in \bigcap_{V \in B} A \cdot V$ и пусть U - произвольная окрестность точки

x . Тогда, согласно теореме II.2, $x^{-1} \cdot U$ будет окрестностью точки e , и значит, существует такая окрестность $V_0 \in B$, что $V_0^{-1} \subseteq x^{-1} \cdot U$.

Так как $x \in A \cdot V_0$, то существуют такие элементы $a \in A$ и $v \in V_0$, что $x = a \cdot v$.

Тогда $a = x \cdot v^{-1} \in x \cdot V_0^{-1} \subseteq x \cdot x^{-1} \cdot U = U$, т.е. $U \cap A \neq \emptyset$. Из произвольности окрестности U элемента x следует, что $x \in [A]_{(G, \tau)}$, а из произвольности элемента x следует, что $\bigcap_{V \in B} A \cdot V \subseteq [A]_{(G, \tau)}$, и значит,

$$[A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in B} A \cdot V.$$

Аналогично, докажем утверждение 2).

Если $x \in [A]_{(G, \tau)}$ и $V \in B$, то существует такое $V_1 \in B$, что $V_1^{-1} \subseteq V$.

Так как V_1 является окрестностью точки e , то $x \cdot V_1$ будет окрестностью точки x , и поскольку x является точкой прикосновения к множеству A , то $x \cdot V_1 \cap A \neq \emptyset$. Значит, существуют такие элементы $v \in V_1$ и $a \in A$, что $x \cdot v = a$. Тогда $x = a \cdot v^{-1} \in A \cdot V_1^{-1} \subseteq A \cdot V$.

Из произвольности элемента x следует, что $[A]_{(G, \tau)} \subseteq A \cdot V$, а из произвольности окрестности V следует, что $[A]_{(G, \tau)} \subseteq \bigcap_{V \in B} A \cdot V$.

Если теперь $x \in \bigcap_{V \in B} A \cdot V$ и U - произвольная окрестность элемента x , то $x^{-1} \cdot U$ будет окрестностью единицы e . Так как B - базис окрестностей единицы, то существует такая окрестность $V \in B$, что $V \subseteq x^{-1} \cdot U$ и существует такая окрестность $V_1 \in B$, что $V_1^{-1} \subseteq V$.

Так как $x \in \bigcap_{V \in B} A \cdot V$, то $x \in A \cdot V_1$, и значит, $x = a \cdot v$, для некоторых $v \in V_1$ и $a \in A$. Тогда $a = x \cdot v^{-1} \in x \cdot V_1^{-1} \subseteq x \cdot V \subseteq x \cdot x^{-1} \cdot U = U$, и значит, $U \cap A \neq \emptyset$.

Так как U было произвольной окрестностью точки x , то x является точкой прикосновения к множеству A , и значит, $x \in [A]_{(G, \tau)}$. Из произвольности элемента x следует, что $\bigcap_{V \in B} A \cdot V \subseteq [A]_{(G, \tau)}$, и значит,

$$[A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in B} A \cdot V.$$

Этим утверждение 2) доказано.

Пусть теперь $N = \bigcap_{V \in B} V$. Так как $e \cdot e = e$, то для любой окрестности $V \in B$ существует такая окрестность $U_V \in B$, что $U_V \cdot U_V \subseteq V$. Тогда $N \cdot N = (\bigcap_{V \in B} V) \cdot (\bigcap_{V \in B} V) \subseteq \bigcap_{V \in B} (V \cdot V) \subseteq \bigcap_{U_V \in B} (U_V \cdot U_V) \subseteq \bigcap_{V \in B} V = N$.

Аналогично, Так как $e^{-1} = e$, то для любой окрестности $V \in B$ существует такая окрестность $U_V \in B$, что $U_V^{-1} \subseteq V$. Тогда $N^{-1} = (\bigcap_{V \in B} V)^{-1} \subseteq \bigcap_{V \in B} (V^{-1}) \subseteq \bigcap_{U_V \in B} (U_V^{-1}) \subseteq \bigcap_{V \in B} V = N$, и, значит, $N(\cdot)$ является подгруппой группы $G(\cdot)$

Пусть теперь $g \in G$ и $V \in B$. Так как $g \cdot e \cdot g^{-1} = e$, то существует такая окрестность $U_V \in B$, что $g \cdot U_V \cdot g^{-1} \subseteq V$. Тогда $\{U_V \mid V \in B\} \subseteq B$, и значит, $g \cdot N \cdot g^{-1} = g \cdot (\bigcap_{V \in B} V) \cdot g^{-1} = \bigcap_{V \in B} (g \cdot V \cdot g^{-1}) \subseteq \bigcap_{U_V \in B} (g \cdot U_V \cdot g^{-1}) \subseteq \bigcap_{V \in B} V = N$.

Из произвольности элемента $g \in G$ следует, что N является нормальным делителем группы $G(\cdot)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что N является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

В самом деле, так как для любой окрестности $V \in B$ существует такая окрестность $U_V \in B$, что $U_V \cdot U_V \subseteq V$, то из утверждения 1 этой теоремы и того что $\{U_V \mid V \in B\} \subseteq B$ следует, что $[N]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in B} (V \cdot N) \subseteq \bigcap_{V \in B} (V \cdot V) \subseteq \bigcap_{U_V \in B} (U_V \cdot U_V) \subseteq \bigcap_{V \in B} V = N \subseteq [N]_{(G, \tau)}$, и значит, $N = [N]_{(G, \tau)}$, т.е. N является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема II.6. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, то существует такой базис B окрестностей единицы, который состоит из замкнутых симметричных подмножеств, т.е. выполняются следующие два утверждения:

1. V является замкнутым множеством для любой окрестности $V \in B$;
2. $V^{-1} = V$ для любой окрестности $V \in B$.

Доказательство. Пусть Ω – множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Рассмотрим совокупность $B = \{[V]_{(G, \tau)} \cap ([V]_{(G, \tau)})^{-1} \mid V \in \Omega\}$ и покажем, что эта совокупность является требуемым базисом окрестностей единицы в $(G(\cdot), \tau)$.

Пусть $V \in \Omega$. Так как $V \subseteq [V]_{(G,\tau)}$, то и $[V]_{(G,\tau)}$ будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и, согласно теореме II.1, $([V]_{(G,\tau)})^{-1}$ тоже будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $[V]_{(G,\tau)} \cap ([V]_{(G,\tau)})^{-1}$ будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Таким образом, мы показали, что любое множество из совокупности B является окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Докажем теперь выполнимость второго условия из определения базиса окрестностей точки в топологическом пространстве.

Пусть U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и V_0 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_0 \cdot V_0 \subseteq U$. Тогда, согласно теореме II.5, $[V_0]_{(G,\tau)} = \bigcap_{V \in \Omega} V_0 \cdot V \subseteq V_0 \cdot V_0 \subseteq U$,

и значит, $[V_0]_{(G,\tau)} \cap ([V_0]_{(G,\tau)})^{-1} \subseteq U$. Таким образом, и второе условие определения базиса окрестностей точки выполняется.

Следовательно, B является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Проверим верность утверждений 1) и 2).

Так как $[V_0]_{(G,\tau)}$ является замкнутым множеством (см. В.9), то, согласно теореме I.3, $([V_0]_{(G,\tau)})^{-1} = \varepsilon([V_0]_{(G,\tau)})$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Тогда и $[V_0]_{(G,\tau)} \cap ([V_0]_{(G,\tau)})^{-1}$ будет замкнутым множеством, в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем

$$([V_0]_{(G,\tau)} \cap ([V_0]_{(G,\tau)})^{-1})^{-1} = (([V_0]_{(G,\tau)})^{-1}) \cap ([V_0]_{(G,\tau)})^{-1} = ([V_0]_{(G,\tau)})^{-1} \cap [V_0]_{(G,\tau)},$$
 т.е. множество $([V_0]_{(G,\tau)})^{-1} \cap [V_0]_{(G,\tau)}$ является и симметричным множеством.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема II.7. Если B - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то верны следующие утверждения:

1. $e \in V$ для любого $V \in B$;
2. Для любых $V_1, V_2 \in B$ существует $V_3 \in B$ такое, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.
3. Для любого $V_1 \in B$ существует $V_2 \in B$ такое, что $V_2 \cdot V_2 \subseteq V_1$.
4. Для любого $V_1 \in B$ существует $V_2 \in B$ такое, что $V_2^{-1} \subseteq V_1$.

5. Для любого $V_1 \in B$ и для любого элемента $g \in G$ существует $V_2 \in B$ такое, что $g \cdot V_2 \cdot g^{-1} \subseteq V_1$.

Доказательство. Если $V \in B$, то V является окрестностью точки e , и значит, $e \in V$, т.е. утверждение 1 выполняется.

Пусть теперь $V_1, V_2 \in B$. Тогда V_1 и V_2 являются окрестностями единицы e , и значит, $V_1 \cap V_2$ тоже будет окрестностью точки e . Но тогда, согласно второму условию определения базиса окрестностей точки, существует такая окрестность $V_3 \in B$, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$, т.е. утверждение 2 выполняется.

Если теперь $V_1 \in B$, то V_1 является окрестностью точки e .

Так как $e \cdot e = e$, то из непрерывности операции умножения в топологической группе, следует, что существуют окрестности U и W точки e такие, что $U \cdot W \subseteq V_1$.

Из того что $U \cap W$ является окрестностью точки e следует, что существует такая окрестность $V_2 \in B$, что $V_2 \subseteq U \cap W$. Тогда $V_2 \cdot V_2 \subseteq U \cdot W \subseteq V_1$, т.е. утверждение 3 выполняется.

Пусть теперь $V_1 \in B$. Тогда V_1 будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $e^{-1} = e$, то из непрерывности операции взятия обратного в топологической группе, следует, что существует такая окрестность U точки e , что $U^{-1} \subseteq V_1$ и существует такая окрестность $V_2 \in B$, что $V_2 \subseteq U$. Тогда $V_2^{-1} \subseteq U^{-1} \subseteq V_1$, т.е. утверждение 4 выполняется.

Пусть $V_1 \in B$ и $g \in G$. Тогда, согласно теореме II.1, $V_1 \cdot g$ будет окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. По теореме II.2 множество $g^{-1} \cdot (V_1 \cdot g)$, будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как B является базисом окрестностей точки e , то существует такая окрестность $V_2 \in B$, что $V_2 \subseteq g^{-1} \cdot V_1 \cdot g$. Если умножим последнее включение слева на элемент g , а справа на элемент g^{-1} , то получим $g \cdot V_2 \cdot g^{-1} \subseteq g \cdot g^{-1} \cdot V_1 \cdot g \cdot g^{-1} = V_1$, и значит, утверждение 5 выполняется.

Этим теорема полностью доказана.

Замечание II.8. Для Абелевых групп предыдущая теорема будет выглядеть следующим образом:

Пусть $(G(+), \tau)$ - Абелева топологическая группа и B - базис окрестностей нуля в топологической группе $(G(+), \tau)$. Тогда верны следующие утверждения:

1. $0 \in V$ для любого $V \in B$;

2. для любых $V_1, V_2 \in B$ существует $V_3 \in B$ такое, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.
3. для любого $V_1 \in B$ существует $V_2 \in B$ такое, что $V_2 + V_2 \subseteq V_1$.
4. для любого $V_1 \in B$ существует $V_2 \in B$ такое, что $-V_2 \subseteq V_1$.

Теорема II.9. Пусть R - множество всех действительных чисел, и $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа. Если $\{U_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ - такая совокупность симметричных окрестностей единицы (т.е. $U_i^{-1} = U_i$) в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_k \cdot U_k \cdot U_k \subseteq U_{k-1}$ для любого натурального числа $k \geq 1$, то существует такое отображение $\varphi : G \rightarrow R$, что верны следующие утверждения:

- 1) $\varphi(e) = 0$ и $0 \leq \varphi(x) = \varphi(x^{-1}) \leq 1$ для любого элемента $x \in G$;
- 2) $\varphi(x) \leq 2^{-k}$ тогда и только тогда, когда $x \in U_k$;
- 3) если $x \notin U_0$, то $\varphi(x) = 1$;
- 4) $\frac{1}{2}\varphi(g \cdot h^{-1}) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1})$ для любых элементов $g, h \in G$ и любой

последовательности $g = g_1, g_2, \dots, g_k = h$ элементов из группы G .

Доказательство. Определим отображение $\varphi : G \rightarrow R$, положив

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} U_i; \\ 2^{-i}, & \text{если } x \in U_i \setminus U_{i+1} \text{ для } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \\ 1, & \text{если } x \notin U_0. \end{cases}$$

Так как $e \in U_i$ для любого натурального числа i , то из определения отображения $\varphi : G \rightarrow R$ следует, что $\varphi(e) = 0$, а из симметричности множества U_i следует, что $0 \leq \varphi(x^{-1}) = \varphi(x) \leq 1$ для любого элемента $x \in G$, т.е. утверждение 1 выполняется.

Кроме того, из определения отображения $\varphi : G \rightarrow R$ следует верность утверждений 2 и 3.

Верность утверждения 4 докажем индукцией по числу k .

$$\text{Если } k = 2, \text{ то } \frac{1}{2}\varphi(g \cdot h^{-1}) = \frac{1}{2}\varphi(g_1 \cdot g_2) \leq \varphi(g_1 \cdot g_2) = \sum_{i=1}^2 \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}).$$

Предположим теперь, что $k > 2$ и требуемое неравенство доказано для всех чисел $s < k$, любых элементов $g, h \in G$, и любой последовательности $g = g_1, g_2, \dots, g_s = h$ элементов из множества G .

Допустим, что для числа k существует такая последовательность $g = g_1, g_2, \dots, g_k = h$ элементов из группы $G(\cdot)$, что утверждение 4 не является верным, т.е. имеет место неравенство $\frac{1}{2}\varphi(g \cdot h^{-1}) > \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) = \alpha$.

Так как $\varphi(x) \leq 1$ для любого элемента $x \in G$, то $\alpha < \frac{1}{2}$.

Возможны следующие два случая $\alpha > 0$ или $\alpha = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha > 0$.

Так как $k > 2$, то $\varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$ или $\varphi(g_{k-1} \cdot g_k^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$.

Если $\varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$ и m является наибольшим из натуральных чисел, для которых $\sum_{i=1}^m \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$, то $2 \leq m < k-1$ и $\sum_{i=1}^{m+1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) > \frac{1}{2}\alpha$. Тогда

$$\sum_{i=m+2}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha.$$

Из индуктивного допущения и выбора числа m следует, что $\frac{1}{2}\varphi(g_1 \cdot g_{m+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\varphi(g_{m+2} \cdot g_k^{-1}) \leq \sum_{i=m+2}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$. Тогда $\varphi(g_1 \cdot g_{m+1}^{-1}) \leq \alpha$ и $\varphi(g_{m+2} \cdot g_k^{-1}) \leq \alpha$.

Кроме того, из определения числа α следует, что $\varphi(g_{m+1} \cdot g_{m+2}^{-1}) \leq \alpha$.

Обозначим через t наименьшее из натуральных чисел, для которых $2^{-t} \leq \alpha$. Тогда, поскольку функция $\varphi(x)$ принимает только значения вида 2^{-s} , то $\varphi(g_1 \cdot g_{m+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2^t}$, $\varphi(g_{m+1} \cdot g_{m+2}^{-1}) \leq \frac{1}{2^t}$ и $\varphi(g_{m+2} \cdot g_k^{-1}) \leq \frac{1}{2^t}$.

Согласно утверждению 2, $g_1 \cdot g_{m+1}^{-1} \in U_t$, $g_{m+1} \cdot g_{m+2}^{-1} \in U_t$ и $g_{m+2} \cdot g_k^{-1} \in U_t$.

Так как $\alpha < \frac{1}{2}$ (это было доказано выше), то $t \geq 2$. Тогда $g \cdot h^{-1} = g_1 \cdot g_{m+1}^{-1} \cdot g_{m+1} \cdot g_{m+2}^{-1} \cdot g_{m+2} \cdot g_k^{-1} \in U_t \cdot U_t \cdot U_t \subseteq U_{t-1}$, и значит, $\varphi(g \cdot h^{-1}) \leq \frac{1}{2^{t-1}} \leq 2\alpha$.

Получили противоречие с допущением, что $\frac{1}{2}\varphi(g \cdot h^{-1}) > \alpha$.

Значит, случай $\varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$ невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi(g_{k-1} \cdot g_k^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$.

Пусть m - наименьшее из натуральных чисел s , для которых $\sum_{i=s}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$. Тогда $1 < m \leq k-1$ и $\sum_{i=m-1}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) > \frac{1}{2}\alpha$, и значит, $\sum_{i=1}^{m-2} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$.

Согласно индуктивному допущению и выбору числа m , имеем что $\frac{1}{2}\varphi(g_m \cdot g_k^{-1}) \leq \sum_{i=m}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\varphi(g_1 \cdot g_{m-1}^{-1}) \leq \sum_{i=1}^{m-2} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$, и значит, $\varphi(g_m \cdot g_k^{-1}) \leq \alpha$ и $\varphi(g_1 \cdot g_{m-1}^{-1}) \leq \alpha$. Кроме того, из определения числа α следует, что $\varphi(g_{m-1} \cdot g_m^{-1}) \leq \alpha$.

Обозначим через t наименьшее из натуральных чисел, для которых $2^{-t} \leq \alpha$. Тогда, поскольку функция $\varphi(x)$ принимает только значения вида 2^{-s} , то $\varphi(g_m \cdot g_k^{-1}) \leq \frac{1}{2^t}$, $\varphi(g_1 \cdot g_{m-1}^{-1}) \leq \frac{1}{2^t}$ и $\varphi(g_{m-1} \cdot g_m^{-1}) \leq \frac{1}{2^t}$.

Согласно утверждению 2, $g_m \cdot g_k^{-1} \in U_t$, $g_1 \cdot g_{m-1}^{-1} \in U_t$ и $g_{m-1} \cdot g_m^{-1} \in U_t$. Так как $\alpha < \frac{1}{2}$ (это было доказано выше), то $t \geq 2$. Тогда $g \cdot h^{-1} = g_1 \cdot g_{m-1}^{-1} \cdot g_{m-1} \cdot g_m^{-1} \cdot g_m \cdot g_k^{-1} \in U_t \cdot U_t \cdot U_t \subseteq U_{t-1}$, и значит, $\varphi(g \cdot h^{-1}) \leq \frac{1}{2^{t-1}} \leq 2\alpha$.

Получили противоречие с допущением, что $\frac{1}{2}\varphi(g \cdot h^{-1}) > \alpha$.

Значит, и случай $\varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) \leq \frac{1}{2}\alpha$ тоже невозможен.

Итак, мы показали, что не возможен случай, когда $\alpha > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 0$.

Из определения числа α следует, что $\varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) = 0$ для любого $1 \leq i \leq k-1$, и значит, $g_i \cdot g_{i+1}^{-1} \in U_j$ для любого такого натурального числа i , что $1 \leq i \leq k-1$ и любого натурального числа j . Тогда $g \cdot h^{-1} = g_1 \cdot g_k^{-1} = g_1 \cdot g_2^{-1} \cdot g_2 \cdot g_3^{-1} \cdot \dots \cdot g_{k-1} \cdot g_k^{-1} \in \underbrace{U_j \cdot U_j \cdot \dots \cdot U_j}_k \subseteq U_{j-k}$ для любого

натурального числа j , и значит, $g \cdot h^{-1} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Тогда $\varphi(g \cdot h^{-1}) = 0 = \alpha$.

Получили противоречие с допущением, что $\frac{1}{2}\varphi(g \cdot h) > \alpha$.

Итак, мы рассмотрели все возможные случаи, и в каждом из них получили противоречие. Следовательно, наше допущение не верно, и значит,

$$\frac{1}{2}\varphi(g \cdot h^{-1}) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}).$$

Этим утверждение 4 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема II.10. Если $\{U_i \mid i=0,1,2,\dots\}$ - такая последовательность симметричных окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_k \cdot U_k \cdot U_k \subseteq U_{k-1}$ для любого натурального числа $k \geq 1$, то на группе $G(\cdot)$ существует такая псевдометрика ρ (см. В.13), что $\rho(x, y) \leq 1$ для любых элементов $x, y \in G$ и $U_k \cdot g \subseteq \left\{x \in G \mid \rho(x, g) \leq \frac{1}{2^k}\right\} \subseteq U_{k-1} \cdot g$ для любого натурального числа $k \geq 1$ и любого элемента $g \in G$.

Доказательство. Если $\varphi: G \rightarrow R$ - отображение, которое было построено в теореме II.9, то для любой пары элементов $x, y \in G$ определим число

$$\rho(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \varphi(x_{i-1} \cdot x_i^{-1}) \mid x = x_0, x_1, \dots, x_k = y, \text{ где } x_i \in G \text{ и } k \in N \right\},$$

где N - множество всех натуральных чисел.

Проверим, что $\rho(x, y)$ является искомой псевдометрикой.

Так как $\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e) = 0$ и $\varphi(y) \geq 0$ для любого элемента $y \in G$, то $\rho(x, x) = 0$ для любого элемента $x \in G$.

Кроме того, так как $\varphi(z) \leq 1$ для любого элемента $z \in G$, то $\rho(x, y) \leq 1$ для любых элементов $x, y \in G$.

Так как, согласно утверждению 1 теоремы II.9, для любых элементов $x_{i-1}, x_i \in G$, имеет место равенство $\varphi(x_{i-1} \cdot x_i^{-1}) = \varphi((x_{i-1} \cdot x_i^{-1})^{-1}) = \varphi(x_i \cdot x_{i-1}^{-1})$, то для последовательности $x = x_1, x_2, \dots, x_k = y$ и последовательности $y = y_1 = x_k, y_2 = x_{k-1}, \dots, y_k = x_1 = x$ имеем, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(x_i \cdot x_{i+1}^{-1}) = \sum_{i=2}^k \varphi(x_i \cdot x_{i-1}^{-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(y_i \cdot y_{i+1}^{-1}),$$

и значит, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in G$.

Проверим теперь, что $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$ для любых $a, b, c \in G$.

Для любых элементов $x, y \in G$ обозначим через $X_{x,y}$ множество всех последовательностей вида $(x = g_1, g_2, \dots, g_k = y)$, где k - натуральное число, и для любых элементов $x, y, z \in G$ обозначим через $X_{x,y,z}$ множество всех последовательностей вида $(x = g_1, g_2, \dots, g_{k-1}, g_k = y, g_{k+1}, \dots, g_n = z)$, где k, n - такие натуральные числа, что $k < n$.

Так как $X_{x,y,z} \subseteq X_{x,z}$ для любых элементов $x, y, z \in G$, то

$$\rho(a, c) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \mid (a = g_1, g_2, \dots, g_n = c) \in X_{a,c} \right\} \leq$$

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \mid a = (g_1, g_2, \dots, g_k = b, g_{k+1}, \dots, g_n = c) \in X_{a,b,c} \right\} \leq$$

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \mid (a = g_1, g_2, \dots, g_k = b) \in X_{a,b} \right\} +$$

$$\inf \left\{ \sum_{i=k+1}^{n-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \mid (b = g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n = c) \in X_{b,c} \right\} = \rho(a, b) + \rho(b, c) \text{ для любых}$$

элементов $a, b, c \in G$.

Итак, мы доказали, что функция $\rho(x, y)$ является псевдометрикой на группе $G(\cdot)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $U_k \cdot g \subseteq \left\{ x \in G \mid \rho(x, g) \leq \frac{1}{2^k} \right\} \subseteq U_{k-1} \cdot g$ для любого натурального числа k и любого элемента $g \in G$.

В самом деле, если $x \in U_k \cdot g$, то $x \cdot g^{-1} \in U_k$, и значит, $\varphi(x \cdot g^{-1}) \leq 2^{-k}$ (см. утверждение 2, теоремы II.9). Тогда из определения функции $\rho(x, y)$ следует, что $\rho(x, g) \leq \varphi(x \cdot g^{-1}) \leq \frac{1}{2^k}$, а из произвольности элемента $x \in U_k \cdot g$ следует, что $U_k \cdot g \subseteq \left\{ x \in G \mid \rho(x, g) \leq \frac{1}{2^k} \right\}$.

Если же $h \in \left\{ x \in G \mid \rho(x, g) \leq \frac{1}{2^k} \right\}$ то $\rho(h, g) \leq 2^{-k}$. Тогда для любого положительного числа ε существует такая последовательность $h = g_1, g_2, \dots, g_n = g$ элементов $g_i \in G$, что $\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) < 2^{-k} + \varepsilon$ и, согласно утверждению 4 теоремы II.9, имеет место неравенство $\varphi(h \cdot g^{-1}) \leq 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(g_i \cdot g_{i+1}^{-1}) \right) < 2^{-k+1} + 2\varepsilon$.

Переходя к пределу, при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $\varphi(h \cdot g^{-1}) \leq 2^{-k+1} = 2^{-(k-1)}$, и согласно утверждению 2, теоремы II.9, $h \cdot g^{-1} \in U_{k-1}$, и значит, $h \in U_{k-1} \cdot g$.

Из произвольности элемента h следует, что $\left\{ x \in G \mid \rho(x, g) \leq \frac{1}{2^k} \right\} \subseteq U_{k-1} \cdot g$.

Этим теорема полностью доказана.

III. СВОЙСТВА ПОДМНОЖЕСТВ В ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ.

Теорема III.1. Если $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, $A \subseteq G$ и $b \in G$, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $A \in \tau$;
- 2) $A^{-1} \in \tau$;
- 3) $b \cdot A \in \tau$;
- 4) $A \cdot b \in \tau$.

Доказательство.

Докажем, что из утверждения 1) следует утверждение 2).

Пусть $A \in \tau$. Тогда, согласно теореме I.3, $A^{-1} = \varepsilon(A) \in \tau$, и значит, из утверждения 1) следует утверждение 2).

Докажем теперь, что из утверждения 2) следует утверждение 1).

Пусть $A^{-1} \in \tau$. Тогда $A = (A^{-1})^{-1} = \varepsilon(A^{-1}) \in \tau$, и значит, $1) \Leftrightarrow 2$.

Докажем, что из утверждения 1) следует утверждение 3).

Пусть $A \in \tau$. Тогда, согласно теореме I.3, $b \cdot A = L_b(A) \in \tau$, и значит, из утверждения 1) следует утверждение 3).

Докажем теперь, что из утверждения 3) следует утверждение 1).

Если $b \cdot A \in \tau$, то согласно теореме I.3, $A = b^{-1} \cdot (b \cdot A) = L_{b^{-1}}(b \cdot A) \in \tau$, и значит, $1) \Leftrightarrow 3)$.

Докажем, что из утверждения 1) следует утверждение 4).

Пусть $A \in \tau$. Тогда, согласно теореме I.3, $A \cdot b = R_b(A) \in \tau$, и значит, из утверждения 1) следует утверждение 4).

Если теперь $A \cdot b \in \tau$, то согласно теореме I.3, $A = (A \cdot b) \cdot b^{-1} = R_{b^{-1}}(A \cdot b) \in \tau$, и значит, $1) \Leftrightarrow 4)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.2. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, $A \subseteq G$ и $B \subseteq G$. Если $A \in \tau$, то $A \cdot B \in \tau$ и $B \cdot A \in \tau$.

Доказательство. Так как, согласно предыдущей теореме, $b \cdot A \in \tau$ для любого элемента $b \in B$, то (см. В.1) $B \cdot A = \bigcup_{b \in B} b \cdot A \in \tau$.

Аналогично показывается, что $A \cdot B \in \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.3. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа, $A \subseteq G$ и $b \in G$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) A является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;

2) A^{-1} является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;

3) $b \cdot A$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;

4) $A \cdot b$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство.

Докажем, что из утверждения 1 следует утверждение 2.

Если A является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $G \setminus A \in \tau$. Так как отображение $\varepsilon : G \rightarrow G$ (см. Б.3) является биекцией, то $\varepsilon(G \setminus A) = G \setminus \varepsilon(A)$ (см. А.8). Так как, по теореме III.1, $\varepsilon(G \setminus A) \in \tau$, то $A^{-1} = \varepsilon(A)$ будет замкнутым множеством, и значит, из утверждения 1 следует утверждение 2.

Пусть теперь A^{-1} является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $G \setminus A^{-1} \in \tau$, и так как отображение $\varepsilon : G \rightarrow G$ является биекцией, то $G \setminus A^{-1} = G \setminus \varepsilon(A) = \varepsilon(G \setminus A) \in \tau$, и значит, $G \setminus A \in \tau$, т.е. A является замкнутым множеством.

Таким образом, из утверждения 2 следует утверждение 1.

Следовательно, утверждения 1 и 2 являются эквивалентными.

Проверим эквивалентность утверждений 1 и 3.

Если A является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $G \setminus A \in \tau$. Так как отображение $L_b : G \rightarrow G$ (см. Б.3) является биекцией, то $L_b(G \setminus A) = G \setminus L_b(A) = G \setminus (b \cdot A)$. По теореме III.1, $G \setminus (b \cdot A) \in \tau$, и значит, $b \cdot A$ является замкнутым множеством, т.е. из утверждения 1 следует утверждение 3.

Пусть теперь A является таким множеством, что $b \cdot A$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $G \setminus (b \cdot A) \in \tau$. Так как отображение $L_b : G \rightarrow G$ является биекцией, то $G \setminus (b \cdot A) = G \setminus L_b(A) = L_b(G \setminus A) \in \tau$, и поскольку $L_b : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является гомеоморфизмом (см. I.3), то $G \setminus A = L_b^{-1}(L_b(G \setminus A)) \in \tau$.

Значит, A является замкнутым множеством, т.е. из утверждения 3 следует утверждение 1.

Следовательно, утверждения 1 и 3 являются эквивалентными.

Аналогично проверяется эквивалентность утверждений 1 и 4.

Теорема III.4. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, и $A, B \subseteq G$, то $[A]_{(G, \tau)} \cdot [B]_{(G, \tau)} \subseteq [A \cdot B]_{(G, \tau)}$.

Доказательство. Пусть $a \in [A]_{(G,\tau)}$ и $b \in [B]_{(G,\tau)}$. Если U - любая окрестность элемента $a \cdot b$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существуют такие окрестности V и W элементов a и b в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, соответственно, что $V \cdot W \subseteq U$. Так как $a \in [A]_{(G,\tau)}$ и $b \in [B]_{(G,\tau)}$, то $V \cap A \neq \emptyset$ и $W \cap B \neq \emptyset$. Если $a' \in V \cap A$ и $b' \in W \cap B$, то $a' \cdot b' \in (V \cdot W) \cap (A \cdot B) \subseteq U \cap (A \cdot B)$, и значит, $U \cap (A \cdot B) \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности U следует, что $a \cdot b \in [A \cdot B]_{(G,\tau)}$, а из произвольности элементов a и b следует, что $[A]_{(G,\tau)} \cdot [B]_{(G,\tau)} \subseteq [A \cdot B]_{(G,\tau)}$.

Этим теорема полностью доказана.

Пример III.5. Построим пример топологической группы и таких замкнутых множеств A и B , что $A \cdot B$ не будет замкнутым множеством (сравни с теоремой III.2).

Пусть $(R(+), \tau_{\text{инт}})$ - аддитивная группа действительных чисел с интервальной топологией $\tau_{\text{инт}}$.

Рассмотрим множества $A = \{1, 2, \dots\}$ и $B = \left\{ k + \frac{1}{k} \mid k = 2, 3, \dots \right\}$.

Так как $A = R \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k-1, k)$, то A является замкнутым множеством.

Аналогично, $B = R \setminus \left(\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \left(k + \frac{1}{k}, k + 1 + \frac{1}{k+1} \right) \right) \cup \left(-\infty, 2 + \frac{1}{2} \right) \right)$, и значит, B является замкнутым множеством, причем $0 \notin A + B$. Так как $A + B \supseteq \left\{ \frac{1}{k} \mid k = 2, 3, \dots \right\}$, то $[A + B]_{(R, \tau_{\text{инт}})} \supseteq \left[\left\{ \frac{1}{k} \mid k = 2, 3, \dots \right\} \right]_{(R, \tau_{\text{инт}})} \ni 0$.

Следовательно, $A + B \neq [A + B]_{(R, \tau_{\text{инт}})}$, и значит, $A + B$ не будет замкнутым множеством (см. В.9).

Теорема III.6. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ – топологическая группа. Если A является замкнутым подмножеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и B является компактным подмножеством в топологическом пространстве (G, τ) (см. В.35), то $A \cdot B$ и $B \cdot A$ будут замкнутыми множествами.

Доказательство. Докажем сначала, что $A \cdot B$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Допустим противное, т.е., что $A \cdot B$ не является замкнутым множеством. Тогда $[A \cdot B]_{(G, \tau)} \neq A \cdot B$, и так как $A \cdot B \subseteq [A \cdot B]_{(G, \tau)}$, то $[A \cdot B]_{(G, \tau)} \setminus A \cdot B \neq \emptyset$. И пусть $x \in [A \cdot B]_{(G, \tau)} \setminus A \cdot B$.

Докажем сначала, что $x \cdot B^{-1} \cap A = \emptyset$.

Допустим противное, и пусть $x \cdot B^{-1} \cap A \neq \emptyset$. Тогда существует элемент $b \in B$ такой, что $x \cdot b^{-1} \in A$. Но тогда $x = x \cdot b^{-1} \cdot b \in A \cdot b \subseteq A \cdot B$. Получили противоречие с выбором элемента x , и значит, $x \cdot B^{-1} \cap A = \emptyset$.

Тогда $x \cdot B^{-1} \subseteq G \setminus A$, и значит, $x \cdot b^{-1} \in G \setminus A$ для любого элемента $b \in B$. Так как, $G \setminus A \in \tau$, то $G \setminus A$ будет окрестностью элемента $x \cdot b^{-1}$ для любого элемента $b \in B$. Согласно теореме I.4, существуют такие окрестности V_b точки x и U_b точки b , что $V_b \cdot U_b^{-1} \subseteq G \setminus A$.

Для каждого элемента $b \in B$ существует такое множество $W_b \in \tau$, что $b \in W_b \subseteq U_b$. Так как $B = \bigcup_{b \in B} \{b\} \subseteq \bigcup_{b \in B} W_b$, то из компактности множества B

следует, что существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n \in B$, что $\bigcup_{i=1}^n W_{b_i} \supseteq B$.

Но тогда $V = \bigcap_{i=1}^n V_{b_i}$ будет окрестностью точки x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, как пересечение конечного числа окрестностей точки, и $V \cdot B^{-1} = V \cdot \left(\bigcup_{i=1}^n W_{b_i} \right)^{-1} = \bigcup_{i=1}^n V \cdot W_{b_i}^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i} \cdot W_{b_i}^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i} \cdot U_{b_i}^{-1} \subseteq G \setminus A$.

Итак, мы доказали, что $V \cdot B^{-1} \subseteq G \setminus A$.

Проверим теперь, что $V \cap A \cdot B = \emptyset$.

Допустим противное, т.е. $V \cap A \cdot B \neq \emptyset$. Тогда существуют такие элементы $v \in V$, $a \in A$ и $b \in B$, что $v = a \cdot b$. Но тогда $a = v \cdot b^{-1} \in V \cdot B^{-1} \subseteq G \setminus A$.

Получили противоречие с выбором элемента a , и значит, наше допущение неверно. Тогда $V \cap A \cdot B = \emptyset$.

Но это противоречит тому, что V является окрестностью точки x , а x является точкой прикосновения к множеству $A \cdot B$.

И значит, $A \cdot B$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство того, что $B \cdot A$ является замкнутым множеством можно провести аналогично доказательству замкнутости множества $A \cdot B$, но мы приведем другое более короткое доказательство.

Так как отображение $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является гомеоморфизмом (см. Б.3 и В.24), то $B^{-1} = \varepsilon(B)$ будет компактным множеством и $A^{-1} = \varepsilon(A)$ будет замкнутым множеством в топологическом пространстве (G, τ) . Тогда, как было доказано выше, $A^{-1} \cdot B^{-1}$ будет замкнутым множеством в топологическом пространстве (G, τ) , и значит, $B \cdot A = \left((B \cdot A)^{-1}\right)^{-1} = (A^{-1} \cdot B^{-1})^{-1} = \varepsilon(A^{-1} \cdot B^{-1})$ будет замкнутым множеством в топологическом пространстве (G, τ) .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.7. Если пространство топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ является T_1 -пространством (см. В.22), n - некоторое натуральное число и A - такое подмножество группы $G(\cdot)$, что $a^n = e$ для любого элемента $a \in A$, то $b^n = e$ для любого элемента $b \in [A]_{(G, \tau)}$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что $b^n \neq e$ для некоторого элемента $b \in [A]_{(G, \tau)}$. Так как топологическое пространство (G, τ) является T_1 -пространством, то существует такая окрестность V элемента b^n в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $e \notin V$.

Из непрерывности операции умножения в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что существует такая окрестность U элемента b в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $\underbrace{U \cdot U \cdot \dots \cdot U}_n \subseteq V$.

Так как $b \in [A]_{(G, \tau)}$, то $U \cap A \neq \emptyset$, и пусть $a \in U \cap A$. Тогда $e = a^n \in \underbrace{U \cdot U \cdot \dots \cdot U}_n \subseteq V$.

Получили противоречие с выбором окрестности V .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.8. Подгруппа A топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ будет открытым множеством тогда и только тогда, когда A является окрестностью некоторой своей точки в топологическом пространстве (G, τ) .

Доказательство. Если A является окрестностью некоторой точки $a \in A$, и U - такое открытое множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $a \in U \subseteq A$, то $b \cdot U \in \tau$ и $b \cdot U \subseteq A \cdot A = A$ для любого элемента $b \in A$. Тогда $A = \bigcup_{b \in A} \{b\} \subseteq \bigcup_{b \in A} b \cdot U \subseteq A$, и значит, $A = \bigcup_{b \in A} b \cdot U \in \tau$.

Если же $A \in \tau$, то A является окрестностью любой своей точки, и значит, A является окрестностью единицы.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.9. Если A - открытая подгруппа в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то A будет замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Если Δ - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то Δ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $A \in \Delta$.

Согласно теореме II.5, $A \subseteq [A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in B} (V \cdot A) \subseteq A \cdot A = A$, и значит,

$A = [A]_{(G, \tau)}$, т.е. A является замкнутым множеством (см. B.9).

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.10. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, $A, B \subseteq G$ и $b \in G$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) Если A - связное множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ (см. B.27), то и A^{-1} будет связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;
- 2) Если A - связное множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $b \cdot A$ и $A \cdot b$ будут связными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;
- 3) Если A и B являются непустыми связными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то и множество $A \cdot B$ будет связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Так как, согласно теореме I.3, отображение $\varepsilon : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является гомеоморфизмом, и значит, оно будет непрерывным отображением, то (см. B.30) множество $A^{-1} = \varepsilon(A)$ будет связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим утверждение 1) доказано.

Аналогично, так как, согласно теореме I.3, отображения $R_b : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ и $L_b : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ являются гомеоморфизмами, и значит, они будут непрерывными отображениями, то (см. утверждение 2 теоремы B.30) $A \cdot b = R_b(A)$ и $b \cdot A = L_b(A)$ будут связными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Зафиксируем некоторые элементы $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Если $D = A \cdot B$, то, согласно утверждению 2, $A \cdot b_0$ и $a_0 \cdot B$ будут связными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, они будут связными множествами в топологическом пространстве $(D, \tau|_D)$.

Если $C_{a_0 \cdot b_0}$ - связная компонента точки $a_0 \cdot b_0$ в топологическом пространстве $(D, \tau|_D)$, то из связности множества $A \cdot b_0$ и того, что $a_0 \cdot b_0 \in A \cdot b_0$ следует, что $A \cdot b_0 \subseteq C_{a_0 \cdot b_0}$.

Тогда, как и выше, доказывается, что для любого элемента $a \in A$ множество $a \cdot B$ будет связным множеством в топологическом пространстве $(D, \tau|_D)$ и $a \cdot b_0 \in (a \cdot B) \cap (A \cdot b_0) \subseteq (a \cdot B) \cap C_{a_0 \cdot b_0}$, и значит (см. В.28), $(a \cdot B) \cup C_{a_0 \cdot b_0}$ будет связным множеством в топологическом пространстве $(D, \tau|_D)$, причем $a_0 \cdot b_0 \in (a \cdot B) \cup C_{a_0 \cdot b_0}$.

Так как множество $C_{a_0 \cdot b_0}$ содержит любое связное множество топологического пространства $(D, \tau|_D)$, содержащее точку $a_0 \cdot b_0$, то $a \cdot B \subseteq a \cdot B \cup C_{a_0 \cdot b_0} \subseteq C_{a_0 \cdot b_0}$.

Из произвольности точки $a \in A$ следует, что $A \cdot B \subseteq C_{a_0 \cdot b_0} \subseteq D = A \cdot B$, и значит, $A \cdot B = C_{a_0 \cdot b_0}$. Тогда множество $A \cdot B$ будет связным множеством в топологическом пространстве $(D, \tau|_D)$, и значит, $A \cdot B$ будет связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.11. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа и C_e - связная компонента единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то C_e будет замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем для любого элемента $g \in G$ множество $C_e \cdot g$ будет связной компонентой точки g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $C_e \cdot g = g \cdot C_e$.

Доказательство. Так как отображение $\varepsilon : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является гомеоморфизмом (см. теорему I.3) и $e = \varepsilon(e)$, то $\varepsilon(C_e)$ будет связным множеством в топологическом пространстве (G, τ) , содержащим точку e , и значит, $C_e^{-1} = \varepsilon(C_e) \subseteq C_e$.

Итак, множество C_e вместе с каждым элементом g содержит и его обратный элемент.

Если теперь $a, b \in C_e$, то, согласно доказанному выше, $a^{-1} \in C_e$. Тогда $e = a \cdot a^{-1} \in a \cdot C_e$.

Так как отображение $L_a : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ является гомеоморфизмом (см. теорему I.3), то $a \cdot C_a = L_a(C_a)$ будет связным множеством (см. утверждение

2 теоремы В.30). Тогда $a \cdot b \in a \cdot C_a = L_a(C_a) \subseteq C_a$, и значит, C_a вместе с любыми элементами a и b содержит и их произведение $a \cdot b$, т.е. C_a является подгруппой в группе $G(\cdot)$.

Пусть теперь $g \in G$. Так как отображения $L_g : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ и $R_{g^{-1}} : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ являются непрерывными отображениями, то $R_{g^{-1}}(L_g(C_e))$ будет связным множеством в топологическом пространстве (G, τ) , причем $e = g \cdot e \cdot g^{-1} \in R_{g^{-1}}(L_g(C_e))$, и значит, $g \cdot C_e \cdot g^{-1} = R_{g^{-1}}(L_g(C_e)) \subseteq C_e$. Из произвольности элемента $g \in G$ следует, что C_e является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$.

Так как связная компонента точки в любом топологическом пространстве является замкнутым множеством (см. В.33), то C_e является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $C_e \cdot g$ является связной компонентой точки g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ для любого элемента $g \in G$.

В самом деле, так как $L_g : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является непрерывным отображением, то $g \cdot C_e = L_g(C_e)$ будет связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $g = g \cdot e \in g \cdot C_e$, и значит, $g \cdot C_e \subseteq C_g$, где C_g - связная компонента точки g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Аналогично, так как $R_{g^{-1}} : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является непрерывным отображением, то $C_g \cdot g^{-1} = R_{g^{-1}}(C_g)$ является связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и так как $e = g \cdot g^{-1} \in R_{g^{-1}}(C_g)$, то $C_g \cdot g^{-1} \subseteq C_e$. Тогда $C_e = g \cdot C_e \cdot g^{-1} \subseteq C_g \cdot g^{-1} \subseteq C_e$, и значит, $C_g \cdot g^{-1} = C_e$. Тогда $C_g = C_e \cdot g$. Кроме того, так как C_e является нормальным делителем, то $C_e \cdot g = g \cdot g^{-1} \cdot C_e \cdot g = g \cdot C_e$

Этим теорема полностью доказана.

Определение III.12. Подмножество A топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ называется *предкомпактным* в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, если для любой окрестности V единицы топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует такое конечное подмножество $S \subseteq G$, что $A \subseteq S \cdot V$ и $A \subseteq V \cdot S$.

Легко заметить, что подмножество предкомпактного множества тоже будет предкомпактным множеством.

Теорема III.13. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ и $(G'(\cdot), \tau')$ - топологические группы, $A, B \subseteq G$. Тогда верны следующие утверждения:

1) Если A - предкомпактное множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то и множество A^{-1} будет предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

2) Если A и B являются предкомпактными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то и множества $A \cdot B$ и $A \cup B$ будут предкомпактными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

3) Если A являются предкомпактными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то и множество $[A]_{(G, \tau)}$ будет предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

4) Если A являются предкомпактными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $a \cdot U \cdot a^{-1} \subseteq V$ и $a^{-1} \cdot U \cdot a \subseteq V$ для любого элемента $a \in A$.

5) Если A являются предкомпактными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то для любой окрестности V единицы в топологической группе (G, τ) существует такое конечное подмножество $S \subseteq A$ (сравни с III.12), что $A \subseteq S \cdot V$ и $A \subseteq V \cdot S$.

6) Если $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ - непрерывный гомоморфизм и A являются предкомпактными множествами в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $f(A)$ будет предкомпактными множествами в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Доказательство. Пусть A является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U^{-1} \subseteq V$.

Так как A является предкомпактным множеством, то существует такое конечное подмножество $S \subseteq G$, что $A \subseteq S \cdot U$ и $A \subseteq U \cdot S$. Тогда $A^{-1} \subseteq (S \cdot U)^{-1} = U^{-1} \cdot S^{-1} \subseteq V \cdot S^{-1}$ и $A^{-1} \subseteq (U \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot U^{-1} \subseteq S^{-1} \cdot V$, причём S^{-1} является конечным множеством.

Из произвольности окрестности V и конечности множества S^{-1} следует предкомпактность множества A^{-1} в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим утверждение 1) доказано.

Доказательство утверждения 2)

Пусть теперь подмножества A и B являются предкомпактными в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Если U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и V - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V \cdot V \subseteq U$, то существует такое конечное подмножество $S_1 \subseteq G$, что $S_1 \cdot V \supseteq B$.

Из конечности множества S_1 следует, что существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $s^{-1} \cdot V_1 \cdot s \subseteq V$ для любого элемента $s \in S_1$.

Кроме того, из предкомпактности множества A в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что $A \subseteq S_2 \cdot V_1$ для некоторого конечного подмножества $S_2 \subseteq G$.

Покажем, что $A \cdot B \subseteq (S_2 \cdot S_1) \cdot U$.

В самом деле, если $a \in A$ и $b \in B$, то существуют такие элементы $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$, что $a \in s_2 \cdot V_1$ и $b \in s_1 \cdot V$. Тогда $a \cdot b \in s_2 \cdot V_1 \cdot s_1 \cdot V = s_2 \cdot s_1 \cdot (s_1^{-1} \cdot V_1 \cdot s_1) \cdot V \subseteq s_2 \cdot s_1 \cdot V \cdot V \subseteq S_2 \cdot S_1 \cdot U$.

Аналогично, так как A является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое конечное подмножество $S'_2 \subseteq G$, что $V \cdot S'_2 \subseteq A$.

Из конечности множества S'_2 следует, что существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $s \cdot V_1 \cdot s^{-1} \subseteq V$ для любого элемента $s \in S'_2$.

Из предкомпактности множества B в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что $B \subseteq V_1 \cdot S'_2$, для некоторого конечного подмножества $S'_2 \subseteq G$.

Покажем, что $A \cdot B \subseteq U \cdot (S'_2 \cdot S'_1)$.

В самом деле, если $a \in A$ и $b \in B$, то существуют такие элементы $s_1 \in S'_1$ и $s_2 \in S'_2$, что $a \in V \cdot s_1$ и $b \in V_1 \cdot s_2$. Тогда $a \cdot b \in V \cdot s_1 \cdot V_1 \cdot s_2 = V \cdot (s_1 \cdot V_1 \cdot s_1^{-1}) \cdot s_1 \cdot s_2 \subseteq V \cdot V \cdot s_2 \cdot s_1 \subseteq U \cdot S'_2 \cdot S'_1$.

Из произвольности элементов $a \in A$ и $b \in B$ следует, что $A \cdot B \subseteq U \cdot (S'_2 \cdot S'_1)$.

Если теперь возьмем $S = (S'_2 \cdot S'_1) \cup (S_2 \cdot S_1)$, то $A \cdot B \subseteq S \cdot U$ и $A \cdot B \subseteq U \cdot S$.

Из конечности множества S и произвольности окрестности U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что множество $A \cdot B$ является предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Проверим теперь, что множество $A \cup B$ тоже является предкомпактным.

В самом деле, для любой окрестности U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существуют такие подмножества $S_1'' \subseteq G$ и $S_2'' \subseteq G$, что $A \subseteq S_1'' \cdot U$, $A \subseteq U \cdot S_1''$ и $B \subseteq S_2'' \cdot U$, $B \subseteq U \cdot S_2''$.

Если теперь $S'' = S_1'' \cup S_2''$, то $A \cup B \subseteq S'' \cdot U$ и $A \cup B \subseteq U \cdot S''$.

Из конечности множества S'' и произвольности окрестности U в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что $A \cup B$ является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим утверждение 2 доказано.

Доказательство утверждения 3).

Пусть подмножество $A \subseteq G$ является предкомпактным в топологической $(G(\cdot), \tau)$ и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и W - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $W \cdot W \subseteq V$, то, согласно теореме II.5, $[A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{U \in \Omega} A \cdot U \subseteq A \cdot W$ и $[A]_{(G, \tau)} = \bigcap_{U \in \Omega} U \cdot A \subseteq W \cdot A$.

Так как множество A является предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $A \subseteq S \cdot W$ и $A \subseteq W \cdot S$ для некоторого конечного подмножества $S \subseteq G$. Тогда, $[A]_{(G, \tau)} \subseteq A \cdot W \subseteq S \cdot W \cdot W \subseteq S \cdot V$ и $[A]_{(G, \tau)} \subseteq W \cdot A \subseteq W \cdot W \cdot S \subseteq V \cdot S$.

Из произвольности окрестности V и конечности множества S следует, что $[A]_{(G, \tau)}$ является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим утверждение 3 доказано.

Доказательство утверждения 4).

Пусть подмножество A топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ является предкомпактным. Тогда, согласно утверждениям 1) и 2) настоящей теоремы, множество $A \cup A^{-1}$ будет предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и W - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$,

что $W \cdot W \cdot W^{-1} \subseteq V$, то $A \cup A^{-1} \subseteq S \cdot W$ для некоторого конечного подмножества $S \subseteq G$.

Тогда, из конечности множества S следует, что существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U \subseteq W$ и $s \cdot U \cdot s^{-1} \subseteq W$ для любого элемента $s \in S$.

Если теперь $a \in A \cup A^{-1}$ и s - такой элемент из множества S , что $a \in s \cdot W$, то $a \cdot U \cdot a^{-1} \in (W \cdot s) \cdot U \cdot (W \cdot s)^{-1} = W \cdot (s \cdot U \cdot s^{-1}) \cdot W^{-1} = W \cdot W \cdot W^{-1} \subseteq V$.

Так как $(A \cup A^{-1})^{-1} = A \cup A^{-1}$, то $a^{-1} \in A \cup A^{-1}$, и значит, $a^{-1} \cdot U \cdot a \subseteq V$.

Из произвольности элемента $a \in A \cup A^{-1}$ следует, что утверждение 4 доказано.

Доказательство утверждения 5).

Пусть A является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U^{-1} \cdot U \subseteq V$ и $U \cdot U^{-1} \subseteq V$.

Из предкомпактности множества A в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что $A \subseteq C \cdot V$ и $A \subseteq V \cdot C$ для некоторого конечного подмножества $C = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subseteq G$.

Для каждого $1 \leq i \leq n$ выберем некоторые элементы $h_i \in A \cap g_i \cdot U$ и $h'_i \in A \cap U \cdot g_i$. Тогда $g_i \in h_i \cdot U^{-1}$ и $g_i \in U^{-1} \cdot h'_i$.

Если теперь возьмем $S = \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \cup \{h'_1, h'_2, \dots, h'_n\}$, то $S \cdot V \supseteq S \cdot U^{-1} \cdot U \supseteq C \cdot U \supseteq A$ и $V \cdot S \supseteq U \cdot U^{-1} \cdot S \supseteq U \cdot C \supseteq A$.

Из произвольности окрестности V в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и конечности множества S следует верность утверждения 5.

Доказательство утверждения 6.

Пусть $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ - непрерывный групповой гомоморфизм. Если V' - окрестность единицы в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то $V = f^{-1}(V')$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Из предкомпактности множества A следует, существование такого конечного подмножества $S \subseteq G$, что $A \subseteq V \cdot S$ и $A \subseteq S \cdot V$. Тогда $f(A) \subseteq f(V \cdot S) = f(V) \cdot f(S) \subseteq V' \cdot f(S)$ и $f(A) \subseteq f(S \cdot V) = f(S) \cdot f(V) \subseteq f(S) \cdot V'$.

Из конечности множества $f(S)$ и произвольности окрестности V следует предкомпактность множества $f(A)$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.14. В любой топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ всякое компактное множество является предкомпактным множеством.

Доказательство. Пусть A является компактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существует такое множество $U \in \tau$, что $e \in U \subseteq V$. Тогда (см. теорему III.1) $U \cdot x \in \tau$ и $x \cdot U \in \tau$ для любого элемента $x \in A$.

Так как $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U \cdot x$ и $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} x \cdot U$, то из компактности множества A следует, что существуют такие конечные множества $S_1 = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ и $S_2 = \{x'_1, \dots, x'_k\} \subseteq A$, что $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U \cdot x_i = U \cdot S_1 \subseteq V \cdot S_1$ и $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k x'_i \cdot U = S_2 \cdot U \subseteq S_2 \cdot V$.

Если $S = S_1 \cup S_2$, то $A \subseteq V \cdot S$ и $A \subseteq S \cdot V$.

Из произвольности окрестности V и конечности множества S следует, что множество A является предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.15. Пусть на группе $G(\cdot)$ задана совокупность $\{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ групповых топологий и $\tau = \sup\{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Если подмножество $A \subseteq G$ является предкомпактным множеством в каждой топологической группе $(G(\cdot), \tau_\lambda)$, то A будет предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в два этапа.

I этап. Случай, когда Λ является конечным множеством.

II этап. Случай, когда Λ является бесконечным множеством.

Доказательство I этапа. Так как $\sup\{\sup\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}, \tau_n\} = \sup\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, то достаточно рассмотреть случай, когда $\Lambda = \{1, 2\}$.

Итак, пусть подмножество $A \subseteq G$ будет предкомпактным множеством в каждой топологической группе $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \tau_2)$, и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup\{\tau_1, \tau_2\})$.

Тогда (см. В.17) существуют такие окрестности U_1 и U_2 единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \tau_2)$, соответственно, что $V = U_1 \cap U_2$.

Если W_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_1)$, что $W_1^{-1} \cdot W_1 \subseteq U_1$ и $W_1 \cdot W_1^{-1} \subseteq U_1$, то существует такое конечное множество $S = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq G$, что $A \subseteq S \cdot W_1 = \bigcup_{i=1}^n a_i \cdot W_1$ и $A \subseteq W_1 \cdot S = \bigcup_{i=1}^n W_1 \cdot a_i$.

Так как всякое одноэлементное множество является предкомпактным, то (см. утверждение 2 теоремы III.13) для любого $1 \leq i \leq n$ каждое из множеств $(A \cdot a_i^{-1})$ и $(a_i^{-1} \cdot A)$ будет предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau_2)$, и значит, множества $(A \cdot a_i^{-1}) \cap W_1$ и $(a_i^{-1} \cdot A) \cap W_1$ будут предкомпактными в топологической группе $(G(\cdot), \tau_2)$.

Тогда, согласно утверждению 5 теоремы III.13, существуют такие конечные подмножества $B_i = \{y_{i,1}, \dots, y_{i,k_i}\} \subseteq (A \cdot a_i^{-1}) \cap W_1$ и $C_i = \{z_{i,1}, \dots, z_{i,m_i}\} \subseteq (a_i^{-1} \cdot A) \cap W_1$, что $(A \cdot a_i^{-1}) \cap W_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_i} U_2 \cdot y_{i,j}$ и $(a_i^{-1} \cdot A) \cap W_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} z_{i,j} \cdot U_2$.

Возьмем $D = \bigcup_{i=1}^n ((B_i \cdot a_i) \cup (a_i \cdot C_i))$ и покажем, что $A \subseteq D \cdot (U_1 \cap U_2)$ и $A \subseteq (U_1 \cap U_2) \cdot D$.

В самом деле, если $a \in A$, то существуют такие натуральные числа $1 \leq i_1 \leq n$ и $1 \leq i_2 \leq n$, что $a \in W_1 \cdot a_{i_1}$ и $a \in a_{i_2} \cdot W_1$. Тогда $a \cdot a_{i_1}^{-1} \in W_1 \cap (A \cdot a_{i_1}^{-1})$ и $a_{i_2}^{-1} \cdot a \in W_1 \cap (a_{i_2}^{-1} \cdot A)$, и значит, существуют такие натуральные числа $1 \leq l_0 \leq k_{i_1}$ и $1 \leq t_0 \leq m_{i_2}$, что $a \cdot a_{i_1}^{-1} \in U_2 \cdot y_{i_1, l_0}$ и $a_{i_2}^{-1} \cdot a \in z_{i_2, t_0} \cdot U_2$. Тогда $(a \cdot a_{i_1}^{-1}) \cdot y_{i_1, l_0}^{-1} \in U_2$ и $z_{i_2, t_0}^{-1} \cdot (a_{i_2}^{-1} \cdot a) \in U_2$.

Так как $y_{i_1, l_0} \in B_{i_1} \subseteq W_1$ и $a \cdot a_{i_1}^{-1} \in W_1 \cap (A \cdot a_{i_1}^{-1}) \subseteq W_1$, то $a \cdot a_{i_1}^{-1} \cdot y_{i_1, l_0}^{-1} \in (W_1 \cdot W_1^{-1}) \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = V$.

Аналогично, так как $z_{i_2, t_0} \in C_{i_2} \subseteq W_1$ и $a_{i_2}^{-1} \cdot a \in W_1 \cap (a_{i_2}^{-1} \cdot A) \subseteq W_1$, то $z_{i_2, t_0}^{-1} \cdot (a_{i_2}^{-1} \cdot a) \in (W_1^{-1} \cdot W_1) \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = V$.

Тогда $a \in V \cdot y_{i_1, l_0} \cdot a_{i_1} \subseteq V \cdot B_{i_1} \cdot a_{i_1} \subseteq V \cdot D$ и $a \in a_{i_2} \cdot z_{i_2, t_0} \cdot V \subseteq a_{i_2} \cdot C_{i_2} \cdot V \subseteq D \cdot V$.

Из произвольности элемента $a \in A$ следует, что $A \subseteq V \cdot D$ и $A \subseteq D \cdot V$.

Этим доказательство I этапа завершено, значит, если Λ является конечным множеством, то A является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство II этапа.

Если теперь Λ является бесконечным множеством, и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно утверждению 2 теореме В.17, существует такое конечное множество $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ топологий из совокупности $\{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, и такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1), \dots, (G(\cdot), \tau_n)$, соответственно,

что $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Тогда V будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup\{\tau_1, \dots, \tau_n\})$.

Согласно I этапу доказательства теоремы, множество A будет предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \sup\{\tau_1, \dots, \tau_n\})$, и значит, существует такое конечное множество $S \subseteq G$, что $A \subseteq S \cdot V$ и $A \subseteq V \cdot S$.

Из произвольности окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что множество A является предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Теорема III.16. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ само множество G является предкомпактным, то $(G(\cdot), \tau)$ обладает таким базисом B окрестностей единицы, что $g \cdot V \cdot g^{-1} = V$ для любых $V \in B$ и $g \in G$.

Доказательство. В самом деле, если Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то для каждой окрестности $V \in \Omega$ положим $W(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V \cdot g^{-1}$, и пусть $B = \{W(V) \mid V \in \Omega\}$.

Проверим, что B является искомым базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $V = e \cdot V \cdot e^{-1}$, то $V \subseteq W(V)$, и значит, множество $W(V)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ для любого $V \in \Omega$.

Если теперь U - некоторая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно утверждению 4 теоремы III.13, существует такая окрестность V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $g \cdot V \cdot g^{-1} \subseteq U$ для любого элемента $g \in G$.

Тогда $W(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V \cdot g^{-1} \subseteq U$, и значит, B является базисом

окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если теперь $v \in W(V)$ и $h \in G$, то $v \in g_0 \cdot V \cdot g_0^{-1}$ для некоторого элемента $g_0 \in G$. Тогда $h \cdot v \cdot h^{-1} \in h \cdot (g_0 \cdot V \cdot g_0^{-1}) \cdot h^{-1} = (h \cdot g_0) \cdot V \cdot (h \cdot g_0)^{-1} \in \bigcup_{g \in G} g \cdot V \cdot g^{-1} = W(V)$.

Из произвольности элемента v следует, что $h \cdot W(V) \cdot h^{-1} \subseteq W(V)$ для любого элемента $h \in G$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема III.17. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп группы $G(\cdot)$ и множество G является предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из нормальных делителей.

Доказательство. Пусть Δ - базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, который состоит из подгрупп группы $G(\cdot)$.

Согласно предыдущей теореме, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает таким базисом Ω окрестностей единицы, что $g \cdot V \cdot g^{-1} = V$ для любого множества $V \in \Omega$ и любого элемента $g \in G$.

Тогда $g \cdot V^{-1} \cdot g^{-1} = (g \cdot V \cdot g^{-1})^{-1} = V^{-1}$ для любого множества $V \in \Omega$ и любого элемента $g \in G$.

Если для любого множества $V \in \Omega$ обозначим через $W(V)$ подгруппу группы $G(\cdot)$, которая порождена множеством V (см. Б.7), то покажем, что $\{W(V) | V \in \Omega\}$ является искомым базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

В самом деле, так как $V \subseteq W(V)$, то $W(V)$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ для любой окрестности $V \in \Omega$.

Пусть теперь U - произвольная окрестность единицы в $(G(\cdot), \tau)$. Так как совокупность Δ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность $V_0 \in \Delta$, что $V_0 \subseteq U$, и поскольку совокупность Ω является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность $V_1 \in \Omega$, что $V_1 \subseteq V_0$. Тогда $W(V_1) \subseteq V_0 \subseteq U$.

Итак, мы показали, что совокупность $\{W(V) | V \in \Omega\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что для любого множества $V \in \Omega$ множество $W(V)$ является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$.

В самом деле, множество $W(V)$ является подгруппой группы $G(\cdot)$. Кроме того, пусть $g \in G$ и $V \in \Omega$.

Если $a \in W(V)$, то существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n \in V$, что $a = a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n}$, где $k_i = \pm 1$ для любого натурального числа i такого, что $1 \leq i \leq n$. Тогда $g \cdot a \cdot g^{-1} = g \cdot (a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n}) \cdot g^{-1} = (g \cdot a_1^{k_1} \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot a_2^{k_2} \cdot g^{-1}) \cdot g \cdot \dots \cdot g^{-1} \cdot (g \cdot a_n^{k_n} \cdot g^{-1}) \in V^{k_1} \cdot \dots \cdot V^{k_n} \subseteq W(V)$.

Из произвольности элементов a и g следует, что $W(V)$ является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$.

Этим теорема полностью доказана.

IV. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

Теорема IV.1. В любой топологической групп $(G(\cdot), \tau)$ эквивалентны следующие утверждения:

1) В топологическом пространстве (G, τ) выполняется аксиома T_0 , т.е. топологическое пространство (G, τ) является T_0 -пространством (см. В.22);

2) В топологическом пространстве (G, τ) выполняется аксиома T_1 , т.е. топологическое пространство (G, τ) является T_1 -пространством;

3) В топологическом пространстве (G, τ) выполняется аксиома T_2 , т.е. топологическое пространство (G, τ) является T_2 -пространством;

4) Топологическое пространство (G, τ) является регулярным пространством;

5) Если B - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $\bigcap_{V \in B} V = \{e\}$.

Доказательство. Из определения аксиом отделимости (см. В.22) легко следует, что $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$.

Докажем теперь, что $1 \Rightarrow 3$. Пусть a и b - различные элементы группы $G(\cdot)$. Поскольку в топологическом пространстве (G, τ) выполняется аксиома T_0 , то либо элемент a имеет окрестность которая не содержит элемент b , либо элемент b имеет окрестность которая не содержит элемент a .

Допустим для определенности, что элемент a имеет окрестность V , которая не содержит элемент b . Тогда согласно теореме II.2, множество $U = a^{-1} \cdot V$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем $a^{-1} \cdot b \notin a^{-1} \cdot V = U$. Согласно теореме II.7, существуют такие окрестности U_1 и U_2 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_1 \cdot U_1 \subseteq U$, и $U_2^{-1} \subseteq U_1$.

Согласно теореме II.1, множества $a \cdot (U_2 \cap U_1)$ и $b \cdot (U_2 \cap U_1)$ будут окрестностями точек a и b , соответственно, в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Проверим, что $a \cdot (U_2 \cap U_1) \cap b \cdot (U_2 \cap U_1) = \emptyset$.

Допустим противное, и пусть $c \in a \cdot (U_2 \cap U_1) \cap b \cdot (U_2 \cap U_1)$. Тогда $a^{-1} \cdot c \in U_2 \cap U_1$, и существует такой элемент $d \in U_2 \cap U_1$, что $c = b \cdot d$.

Тогда $(a^{-1} \cdot b) \cdot d = a^{-1} \cdot (b \cdot d) = a^{-1} \cdot c \in U_2 \cap U_1$, и значит, $a^{-1} \cdot b \in (U_2 \cap U_1) \cdot d^{-1} \subseteq (U_2 \cap U_1) \cdot (U_2 \cap U_1)^{-1} \subseteq U_1 \cdot U_2^{-1} \subseteq U_1 \cdot U_1 \subseteq U$.

Получили противоречие с ранее доказанным, что $a^{-1} \cdot b \notin U$.

Итак, мы доказали, что $a \cdot U_2 \cap b \cdot U_2 = \emptyset$.

Из произвольности элементов a и b следует, что в топологическом пространстве (G, τ) выполняется аксиома T_2 .

Итак, мы доказали, что из выполнимости аксиомы T_0 в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует выполнимость аксиомы T_2 .

Таким образом, мы доказали, что утверждения 1, 2 и 3 являются эквивалентными.

Докажем теперь, что $3 \Rightarrow 4$.

Пусть в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ выполняется аксиома T_2 . Тогда в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ выполнена и аксиома T_1 . Проверим, что в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ выполнена и аксиома T_3 .

Пусть F - замкнутое множество в топологическом пространстве (G, τ) и a - такой элемент из группы $G(\cdot)$, что $a \notin F$. Тогда $a \in G \setminus F$, и так как $G \setminus F \in \tau$, то множество $G \setminus F$ будет окрестностью точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Согласно теореме II.2, множество $U = a^{-1} \cdot (G \setminus F)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда существует такая окрестность V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V \cdot V^{-1} \subseteq U$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $V \in \tau$.

Согласно теореме III.1, $a \cdot V \in \tau$, и согласно теореме III.3, $F \cdot V \in \tau$, причем $a \in a \cdot V$ и $F \subseteq F \cdot V$.

Покажем, что $(a \cdot V) \cap (F \cdot V) = \emptyset$.

Допустим противное, и пусть $b \in (a \cdot V) \cap (F \cdot V)$. Тогда существуют такие элементы $b_1, b_2 \in V$ и $c \in F$, что $b = a \cdot b_1$ и $b = c \cdot b_2$, и значит, $c = b \cdot b_2^{-1} = (a \cdot b_1) \cdot b_2^{-1} = a \cdot b_1 \cdot b_2^{-1} \in a \cdot V \cdot V^{-1} \subseteq a \cdot U = a \cdot a^{-1} \cdot (G \setminus F) = G \setminus F$.

Получили противоречие с выбором элемента $c \in F$. Следовательно, $(a \cdot V) \cap (F \cdot V) = \emptyset$, т.е. в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ выполнена и аксиома T_3 .

Итак, мы доказали, что $3 \Rightarrow 4$.

Покажем, что $4 \Rightarrow 3$.

Пусть топологическое пространство (G, τ) является регулярным пространством, т.е. в нём выполнены аксиомы отделимости T_1 и T_3 . Так как ранее было доказано, что утверждения 2 и 3 эквивалентны, то в топологическом пространстве (G, τ) выполнена аксиома T_2 .

Итак, мы доказали, что $3 \Leftrightarrow 4$.

Покажем, что $5 \Leftrightarrow 2$.

Пусть в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ выполняется утверждение 2. Тогда для любого элемента $e \neq a \in G$ существует такая окрестность V_a элемента e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $a \notin V_a$.

Так как B является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность $U_a \in B$, что $U_a \subseteq V_a$. Тогда, $\{e\} \subseteq \bigcap_{U \in B} U \subseteq \bigcap_{a \in G \setminus \{e\}} U_a \subseteq \bigcap_{a \in G \setminus \{e\}} V_a = \{e\}$, и значит, утверждение 5 выполнено, т.е. $2 \Rightarrow 5$.

Пусть теперь в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ верно утверждение 5.

Если $a, b \in G$ и $a \neq b$, то $e \neq a^{-1} \cdot b$ и $e \neq a \cdot b^{-1}$. Тогда существуют такие окрестности $U_a, U_b \in B$, что $a^{-1} \cdot b \notin U_a$ и $a \cdot b^{-1} \notin U_b$. Так как U_a и U_b являются окрестностями точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то согласно теореме II.1, множества $a \cdot U_a$ и $U_b \cdot b$ будут окрестностями элементов a и b , соответственно, в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем, $b = a \cdot a^{-1} \cdot b \notin a \cdot U_a$ и $a = a \cdot b^{-1} \cdot b \notin U_b \cdot b$.

Итак, мы показали, что в топологическом пространстве (G, τ) выполнена аксиома T_1 , т.е. $5 \Rightarrow 2$.

Следовательно, $2 \Leftrightarrow 5$.

Этим теорема полностью доказана.

Определение IV.2. Топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$, в которой выполнена одна из аксиом отделимости T_0, T_1, T_2 , аксиома регулярности пространства (а, согласно теореме IV.1 выполняется и каждая из этих аксиом) называется *отделимой топологической группой*.

Теорема IV.3. Если отделимая топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы, то на множестве G существует такая метрика ρ , что $\tau = \tau_\rho$ (см. B.14).

Доказательство. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы, то в ней существует такой базис $\{U_i | i = 0, 1, 2, \dots\}$ окрестностей единицы, что $U_i \cdot U_i \cdot U_i \subseteq U_{i-1}$ для любого натурального числа $i > 0$, причем все окрестности U_j являются симметричными множествами.

Из того, что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой следует, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{e\}$ (см. теорему IV.1).

Если, теперь, $\rho(x, y)$ - псевдометрика, построенная согласно теореме П.10, то $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \cdot y^{-1} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} U_i = \{e\}$, т.е. тогда и только тогда, когда $x = y$, и значит, $\rho(x, y)$ является метрикой.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $\tau = \tau_\rho$.

В самом деле, если $W \in \tau$ и $g \in W$, то W является окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, существует такое натуральное число k , что $U_k \cdot g \subseteq W$. Тогда, согласно теореме П.10, $\left\{ x \in G \mid \rho(x, g) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \right\} \subseteq U_k \cdot g \subseteq W$.

Из произвольности элемента $g \in W$ следует (см. В.14), что $W \in \tau_\rho$, а из произвольности множества W следует, что $\tau \subseteq \tau_\rho$.

Пусть теперь $W \in \tau_\rho$ и $g \in W$. Тогда (см. В.14) $\{x \in G \mid \rho(x, g) < \varepsilon\} \subseteq W$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Если k - такое натуральное число, что $2^{-k} < \varepsilon$, то, согласно теореме П.10, $U_k \cdot g \subseteq \{x \in G \mid \rho(x, g) < \varepsilon\} \subseteq W$. Так как множество $U_k \cdot g$ является окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то и W будет окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Из произвольности элемента $g \in W$ следует (см. В.6), что $W \in \tau$, а из произвольности множества $W \in \tau_\rho$ следует, что $\tau_\rho \subseteq \tau$, и значит, $\tau = \tau_\rho$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IV.4. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой, то ее пространство является вполне регулярным.

Доказательство. Пусть $a \in G$ и F - такое замкнутое множество, что $a \notin F$. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из симметричных подмножеств и $G \setminus F \in \tau$, то в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такая последовательность $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots$ симметричных окрестностей единицы, что $U_0 \cdot a \subseteq G \setminus F$ и $U_k \cdot U_k \cdot U_k \subseteq U_{k-1}$ для любого натурального числа k .

Согласно теореме П.10, на группе G существует такая псевдометрика ρ , что $\rho(x, y) \leq 1$ для любых элементов $x, y \in G$, и $U_k \cdot a \subseteq \left\{ x \in G \mid \rho(x, a) \leq \frac{1}{2^k} \right\} \subseteq U_{k-1} \cdot a$ для любого натурального числа k .

Если $(R, \tau_{\text{инт}})$ - пространство действительных чисел с интервальной топологией, то, положив $f(g) = \min\{2 \cdot \rho(g, a), 1\}$ для любого элемента $g \in G$,

мы определим отображение $f: G \rightarrow R$, причем $0 \leq f(g) \leq 1$ для любого элемента $g \in G$ и $f(a) = \min\{2 \cdot \rho(a, a), 1\} = \min\{0, 1\} = 0$.

Пусть теперь $g \in F$. Тогда $g \notin G \setminus F$, и так как $U_0 \cdot a \subseteq G \setminus F$, то $g \notin U_0 \cdot a$, и значит, $g \notin \left\{x \in G \mid \rho(x, a) \leq \frac{1}{2}\right\}$. Тогда $\rho(g, a) > 2^{-1}$, и значит, $f(g) = \min\{2 \cdot \rho(g, a), 1\} = 1$.

Итак, мы доказали, что $f(g) = 1$ для любого элемента $g \in F$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить непрерывность отображения $f: (G, \tau) \rightarrow (R, \tau_{\text{инт}})$ в любой точке $g_0 \in G$.

В самом деле, если $g_0 \in G$ и $\varepsilon > 0$ то существует такое натуральное число m , что $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Тогда $U_{m+1} \cdot g_0$ будет окрестностью элемента g_0 в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Если $g \in U_{m+1} \cdot g_0$, то (см. теорему II.10) $g \in U_{m+1} \cdot g_0 \subseteq \left\{x \in G \mid \rho(x, g_0) \leq \frac{1}{2^{m+1}}\right\}$, и значит, $\rho(g, g_0) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$.

Если $f(g) \geq f(g_0)$, то, взяв $g_1 = g$, $g_2 = g_0$ и $g_3 = a$, получим, что $g \cdot a^{-1} = (g \cdot g_2^{-1}) \cdot (g_2 \cdot a^{-1})$. Тогда, учитывая свойство функции φ (см. утверждение 4 теоремы II.9), получим, что $f(g) = \min\{2 \cdot \rho(g, a), 1\} \leq \min\{2 \cdot (\rho(g, g_0) + \rho(g_0, a)), 1\} \leq \min\left\{\frac{1}{2^m} + 2\rho(g_0, a), 1\right\} \leq f(g_0) + \frac{1}{2^m}$, и значит, $0 \leq f(g) - f(g_0) \leq \frac{1}{2^m} \leq \varepsilon$.

Если же $f(g) \leq f(g_0)$, то взяв $g_1 = g_0$, $g_2 = g$ и $g_3 = a$, получим, что $g_0 \cdot a^{-1} = (g_0 \cdot g_2^{-1}) \cdot (g_2 \cdot a^{-1})$. Тогда, учитывая свойство функции φ (см. утверждение 4 теоремы II.9), получим, что $f(g_0) = \min\{2 \cdot \rho(g_0, a), 1\} \leq \min\{2 \cdot (\rho(g, g_0) + \rho(g, a)), 1\} \leq \min\left\{\frac{1}{2^m} + 2\rho(g, a), 1\right\} \leq f(g) + \frac{1}{2^m}$, и значит, $0 \leq f(g_0) - f(g) \leq \frac{1}{2^m} \leq \varepsilon$.

Итак, мы доказали что $|f(g_0) - f(g)| \leq \frac{1}{2^m} \leq \varepsilon$.

Из произвольности элемента g и произвольности числа ε следует, что отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (R, \tau_{\text{инт}})$ является непрерывным отображением в точке g_0 , а из произвольности точки g_0 следует, что отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (R, \tau_{\text{инт}})$ является непрерывным отображением.

Так как, согласно условию теоремы, в пространстве (G, τ) выполняется аксиома T_1 , то (G, τ) является вполне регулярным пространством.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IV.5. Если пространство топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ является локально компактным, вполне несвязным пространством (см. В. 32), то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп.

Доказательство. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является вполне несвязной, то в топологическом пространстве (G, τ) связная компонента C_g любого элемента $g \in G$ равна $\{g\}$. Тогда, последовательно применяя теоремы III.11, III.3 и В.23 следует, что в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ выполняется аксиома T_1 , и значит, она является отделимой топологической группой.

Итак, топологическое пространство (G, τ) является локально компактным, вполне несвязным, Хаусдорфовым пространством.

Пусть теперь U - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $U \in \tau$. Тогда, согласно теореме В.41, существует такое компактное множество B , что $B \in \tau$ и $e \in B \subseteq U$. Так как $B \in \tau$, то для каждого элемента $g \in B$ имеется такая окрестность V_g единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $g \cdot V_g \subseteq B$, и существует такая симметричная окрестность U_g единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_g \in \tau$ и $U_g \cdot U_g \subseteq V_g$.

Тогда $B = \bigcup_{g \in B} \{g\} \subseteq \bigcup_{g \in B} g \cdot U_g \subseteq \bigcup_{g \in B} g \cdot V_g \subseteq B$, и значит, $B = \bigcup_{g \in B} g \cdot U_g$.

Итак, совокупность $\{g \cdot U_g \mid g \in B\}$ является открытым покрытием компактного множества B в топологическом пространстве (G, τ) , значит, существует такое конечное подмножество $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq B$, что $B = \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot U_{g_i}$.

Тогда $W = \bigcap_{i=1}^n U_{g_i}$ будет симметричной окрестностью единицы в

топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем $B \cdot W = \left(\bigcup_{i=1}^n g_i \cdot U_{g_i} \right) \cdot W \subseteq$

$$\bigcup_{i=1}^n ((g_i \cdot U_{g_i}) \cdot W) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (g_i \cdot U_{g_i} \cdot U_{g_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot V_{g_i} \subseteq B.$$

Если теперь $\hat{W}$ - подгруппа группы $G(\cdot)$, порожденная множеством W , то $W \subseteq \hat{W}$, и значит, $\hat{W}$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Кроме того, так как $W^{-1} = (\bigcap_{i=1}^n U_{g_i})^{-1} = \bigcap_{i=1}^n U_{g_i}^{-1} = \bigcap_{i=1}^n U_{g_i} = W$, то

$\hat{W} = \{u_1 \cdot \dots \cdot u_k \mid k - \text{натурально е число, } u_i \in W \text{ для } 1 \leq i \leq k\}$ будет

подгруппой группы $G(\cdot)$.

Поскольку $B \cdot u \subseteq B \cdot W \subseteq B$ для любого элемента $u \in W$, то индукцией по числу k легко доказывается, что $B \cdot (u_1 \cdot \dots \cdot u_k) \subseteq B$ для любого элемента $u_1 \cdot \dots \cdot u_k \in \hat{W}$, и значит, $B \cdot \hat{W} \subseteq B$.

Так как $e \in B$, то $\hat{W} = e \cdot \hat{W} \subseteq B \cdot \hat{W} \subseteq B \subseteq U$.

Итак, мы доказали, что в любой окрестности U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ содержится такая окрестность $\hat{W}$ единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, которая является подгруппой группы G , и значит, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IV.6. Если пространство топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ является компактным, вполне несвязным пространством, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из нормальных делителей.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп группы $G(\cdot)$.

Так как (см. теорему III.14) всякое компактное множество топологической группы является предкомпактным множеством, то, согласно теореме III.17, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из нормальных делителей.

Этим теорема полностью доказана.

V. МЕТОД ТОПОЛОГИЗАЦИИ ГРУПП

Теорема V.1. Пусть на группе $G(\cdot)$ задана такая непустая совокупность B подмножеств, что выполняются следующие условия:

1. $e \in V$ для любого множества $V \in B$;
2. Для любых множеств $V_1, V_2 \in B$ существует такое множество $V_3 \in B$, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.
3. Для любого множества $V_1 \in B$ существует такое множество $V_2 \in B$, что $V_2 \cdot V_2 \subseteq V_1$.
4. Для любого множества $V_1 \in B$ существует такое множество $V_2 \in B$, что $V_2^{-1} \subseteq V_1$.
5. Для любого множества $V_1 \in B$ и любого элемента $g \in G$ существует такое множество $V_2 \in B$, что $g \cdot V_2 \cdot g^{-1} \subseteq V_1$.

Тогда на группе $G(\cdot)$ существует единственная топология τ такая, что $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, а совокупность B будет базис окрестностей единицы в этой топологической группе.

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на следующие этапы:

- I. построение топологии τ на множестве G ;
- II. проверка того факта, что совокупность B является базисом окрестностей единицы в топологическом пространстве (G, τ) .
- III. проверка того факта, что (G, τ) является топологической группой.
- IV. проверка единственности групповой топологии τ .

Доказательство этапа I. Рассмотрим следующую совокупность $\tau = \{U \subseteq G \mid \forall g \in U \exists V \in B, g \cdot V \subseteq U\}$ подмножеств множества G .

Покажем, что для совокупности τ выполняется аксиомы определения топологического пространства.

Действительно, $\emptyset \subseteq G$, кроме того, для любого элемента $g \in \emptyset$, (поскольку таких элементов нет), то для них выполняются какие угодно условия, в том числе и требования, которые указаны в определении совокупности τ , и значит, $\emptyset \in \tau$.

Кроме того, если $g \in G$, то из того, что $B \neq \emptyset$ следует, что существует множество $V \in B$. Тогда $g \cdot V \subseteq g \cdot G = G$, и значит, $G \in \tau$.

Выполнимость первого условия из определения B.1 доказано.

Покажем, что для элементов из совокупности τ выполняется второе условие из определения топологического пространства.

В самом деле, если $U, V \in \tau$, и $g \in U \cap V$, то $g \in U$ и $g \in V$. Так как $U, V \in \tau$, то существуют такие множества $V_1, V_2 \in B$, что $g \cdot V_1 \subseteq U$ и $g \cdot V_2 \subseteq V$.

Так как согласно условию 2, существует такое множество $V_3 \in B$, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$. Тогда, $g \cdot V_3 \subseteq g \cdot (V_1 \cap V_2) = g \cdot V_1 \cap g \cdot V_2 \subseteq U \cap V$. Из произвольности элемента $g \in U \cap V$ следует, что $U \cap V \in \tau$, т.е. и второе условие из определения топологии выполнено.

Покажем, что для совокупности τ выполняется и третья аксиома определения топологического пространства.

Пусть $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$. Так как $A_\gamma \in \tau$, то $A_\gamma \subseteq G$, для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subseteq G$.

Если теперь $g \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, то существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $g \in A_{\gamma_0}$. Тогда существует такое множества $V \in B$, что $g \cdot V \subseteq A_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, и значит,

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau.$$

Таким образом, мы показали, что совокупность τ является топологией на множестве G .

Этим доказательство I этапа завершено.

Доказательство этапа II.

Покажем, что совокупность B является базисом окрестностей единицы в топологическом пространстве (G, τ) .

Для каждого элемента $g \in G$. рассмотрим совокупность $B_g = \{g \cdot V | V \in B\}$ и покажем, что совокупность B_g является базисом окрестностей точки g в топологическом пространстве (G, τ) .

В самом деле, если $g \cdot V \subseteq B_g$, то рассмотрим множество $U = \{x \in G | \exists V_x \in B \text{ такое, что } x \cdot V_x \subseteq g \cdot V\}$. Покажем, что $U \in \tau$ и $g \in U \subseteq g \cdot V$.

Если $h \in U$, то существует такое множество $V_h \in B$, что $h \cdot V_h \subseteq g \cdot V$. Так как, согласно условию 3 существует такое множество $V_1 \in B$, что $V_1 \cdot V_1 \subseteq V_h$, то $h \cdot V_1 \cdot V_1 \subseteq h \cdot V_h \subseteq g \cdot V$.

Тогда $h \cdot V_1 \subseteq \{x \in G | \exists V_x \in B \text{ такое, что } x \cdot V_x \subseteq g \cdot V\} = U$, и значит, $U \in \tau$.

Так как $g \cdot V \subseteq g \cdot V$, то $g \in U$, и поскольку $e \in V_x$, для любого элемента $x \in U$, то $x \in x \cdot V_x \subseteq g \cdot V$, и значит, $U \subseteq g \cdot V$.

Следовательно, для любого множества $V \in B$ множество $g \cdot V$ будет окрестностью точки g в топологическом пространстве (G, τ) .

Таким образом, выполнено первое условие определения базиса окрестностей точки g в топологическом пространстве (см. В.5).

Пусть теперь $g \in G$, и W - произвольная окрестность элемента g в топологическом пространстве (G, τ) . Тогда существует такое множество $U \in \tau$, что $g \in U \subseteq W$.

Так как $g \in U$, то (см. определение совокупности τ) существует такое множество $V \in \mathcal{B}$, что $g \cdot V \subseteq U$.

Так как $g \cdot V \in \mathcal{B}_g$, то выполняется и второе условие определения базиса окрестностей точки g в топологическом пространстве.

Итак, для любого $g \in G$ совокупность $\mathcal{B}_g$ является базисом окрестностей элемента g в топологическом пространстве (G, τ) . В частности, если $g = e$, то $\mathcal{B}_e = \{e \cdot V \mid V \in \mathcal{B}\} = \{V \mid V \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$.

Итак, мы показали, что совокупность $\mathcal{B}$ является базисом окрестностей единицы в топологическом пространстве (G, τ) .

Этим доказательство этапа II завершено.

Доказательство этапа III.

Проверим, что (G, τ) является топологической группой, т.е., что в этом топологическом пространстве являются непрерывными операция умножения и операция взятия противоположного.

Пусть $a, b \in G$, и W - произвольная окрестность элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) .

Так как совокупность $\mathcal{B}_{a \cdot b} = \{a \cdot b \cdot V \mid V \in \mathcal{B}\}$ является базисом окрестностей точки $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) , то существует такое множество $V \in \mathcal{B}$, что $a \cdot b \cdot V \subseteq W$.

По условию 3 существует такое множество $V_1 \in \mathcal{B}$, что $V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, а по условию 5 существует такое множество $V_2 \in \mathcal{B}$, что $b^{-1} \cdot V_2 \cdot b \subseteq V_1$. Кроме того, согласно условию 2 существует такое множество $V_3 \in \beta$, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

Тогда множества $a \cdot V_3$ и $b \cdot V_3$ будут окрестностями элементов a и b , соответственно, в топологическом пространстве (G, τ) , причем, $(a \cdot V_3) \cdot (b \cdot V_3) = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot V_3 \cdot b \cdot V_3 \subseteq a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot V_2 \cdot b \cdot V_1 \subseteq a \cdot b \cdot V_1 \cdot V_1 \subseteq a \cdot b \cdot V \subseteq W$.

Таким образом, мы проверили, что операция умножения является непрерывной в топологическом пространстве (G, τ) .

Проверим теперь непрерывность операции взятия обратного элемента в топологическом пространстве (G, τ) .

Пусть $a \in G$, и W - окрестность элемента a^{-1} в топологическом пространстве (G, τ) . Тогда существует такое множество $V \in \mathcal{B}$, что $a^{-1} \cdot V \subseteq W$.

Согласно условию 5, существует такое множество $V_1 \in \mathcal{B}$, что $a \cdot V_1 \cdot a^{-1} \subseteq V$ и, согласно условию 4, существует такое множество $V_2 \in \mathcal{B}$, что $V_2^{-1} \subseteq V_1$. Тогда $(a \cdot V_2)^{-1} = V_2^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot (a \cdot V_2^{-1} \cdot a^{-1}) \subseteq a^{-1} \cdot (a \cdot V_1 \cdot a^{-1}) \subseteq a^{-1} \cdot V \subseteq W$.

Так как множество $a \cdot V_2$ является окрестностью точки a в топологическом пространстве (G, τ) , то непрерывность взятия обратного элемента тоже доказана.

Итак, мы доказали, что $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой.

Этим доказательство этапа III завершено.

Доказательство этапа IV.

Проверим единственность топологии τ .

Пусть τ' – такая топология на группе $G(\cdot)$, что $(G(\cdot), \tau')$ является топологической группой, а $\mathcal{B}$ является базисом окрестностей единицы в ней.

Докажем, что $\tau' = \tau$.

Пусть $U' \in \tau'$. Тогда U' является окрестностью любой своей точки в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$. Если $g \in U'$, то из того, что $(G(\cdot), \tau')$ является топологической группой, следует, что множество $W = g^{-1} \cdot U'$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$, и значит, существует такое множество $V \in \mathcal{B}$, что $V \subseteq W$. Тогда $g \cdot V \subseteq g \cdot W \subseteq U'$. Из произвольности элемента g и определения совокупности τ следует, что $U' \in \tau$, а из произвольности множества U' следует, что $\tau' \subseteq \tau$.

Пусть теперь $U \in \tau$. Тогда, из определения совокупности τ следует, что для любого элемента $g \in U$ существует такое множество $V_g \in \mathcal{B}$, что $g \cdot V_g \subseteq U$.

Так по допущению, $\mathcal{B}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$, то $g \cdot V$ будет окрестностью элемента g в $(G(\cdot), \tau')$, и значит, множество U будет окрестностью любой своей точки в топологическом пространстве $(G(\cdot), \tau')$. Тогда (см. В.6) $U \in \tau'$.

Из произвольности множества $U \in \tau$ следует, что $\tau \subseteq \tau'$, и значит, $\tau = \tau'$.

Этим теорема полностью доказана.

Следствие V.2. Пусть для абелевой группы $G(+)$ задана такая непустая совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств множества G , что выполняются следующие условия:

1. $0 \in V$ для любого множества $V \in B$;
2. для любых множеств $V_1, V_2 \in B$ существует такое множество $V_3 \in B$, что $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;
3. для любого множества $V_1 \in B$ существует такое множество $V_2 \in B$, что $V_2 + V_2 \subseteq V_1$;
4. для любого множества $V_1 \in B$ существует такое множество $V_2 \in B$, что $-V_2 \subseteq V_1$.

Тогда на группе $G(+)$ существует единственная топология τ такая, что (G, τ) является топологической группой, а совокупность B будет базисом окрестностей нуля в ней.

В самом деле, аналог условия 5 из теоремы V.1 не требуется потому, что в абелевой группе оно выполняется всегда, если возьмем $V_2 = V_1$.

Примеры V.3.

Пример V.3.1. Пусть $G(\cdot)$ - произвольная группа и N - некоторый нормальный делитель в группе $G(\cdot)$. Тогда совокупность $B = \{N\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1, и значит, она задает на группе $G(\cdot)$ некоторую групповую топологию τ_N , в которой совокупность B является базисом окрестностей единицы.

В самом деле, выполнения условий 1 - 4 очевидны.

Если $V_1 \in B$ и $g \in G$, то $V_1 = N$. Возьмём $V_2 = N$. Тогда $V_2 \in B = \{N\}$ и $g \cdot V_2 \cdot g^{-1} = g \cdot N \cdot g^{-1} = N = V_1$, и значит, выполнено и условие 5.

Пример V.3.2. Пусть $G(\cdot)$ - произвольная группа и $B = \{\{e\}\}$. Так как $\{e\}$ является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$, то, согласно предыдущему примеру, совокупность $B = \{\{e\}\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1, и значит, она является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии τ_0 .

Покажем теперь, что топология τ_0 , определенная совокупностью $B = \{\{e\}\}$, совпадает с дискретной топологией.

Пусть $A \subseteq G$ и $a \in A$. Тогда, согласно теореме II.1, множество $\{a\} = a \cdot \{e\}$ является окрестностью точки a в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)$. Так как $\{a\}$ содержит только элемент a , то $\{a\}$ является окрестностью любой своей точки, и значит, $\{a\} \in \tau_0$. Тогда $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in \tau_0$. Из произвольности множества A следует, что τ_0 является дискретной топологией.

Пример V.3.3. Пусть $G(\cdot)$ - произвольная группа и $B = \{G\}$. Так как G является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$, то согласно примеру V.3.1, совокупность $\beta = \{N\}$ удовлетворяет условиям 1 - 5 теоремы V.1, и значит, она является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии.

Покажем теперь, что топология τ_0 , определенная совокупностью B , совпадает с антидискретной топологией.

Пусть $\emptyset \neq A \in \tau_0$. Если $a \in A$, то A является окрестностью точки a . Тогда, согласно теореме II.2. $a^{-1} \cdot A$ будет окрестностью точки e в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)$.

Так как B является базисом окрестностей e в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)$ и $B = \{G\}$, то $G \subseteq a^{-1} \cdot A \subseteq G$, и значит, $a^{-1} \cdot A = G$. Тогда $A = a \cdot G = G$.

Итак мы доказали, что всякое не пустое подмножество $A \in \tau_0$ совпадает с множеством G , и значит, $\tau_0 = \{\emptyset, G\}$, т.е. τ_0 является антидискретной топологией.

Пример V.3.4. Пусть $R(+)$ - аддитивная группа действительных чисел и $B = \left\{ \left(-2^{-n}, 2^{-n} \right) \mid n - \text{натуральное число} \right\}$. Тогда совокупность B удовлетворяет условиям 1- 4 следствия V.2, и значит, она задает на группе $R(+)$ некоторую групповую топологию τ_0 , в которой B является базисом окрестностей нуля.

Эта топология совпадает с интервальной топологией $\tau_{\text{инт}}$.

В самом деле, выполнение условия 1 очевидно.

Если $V_1, V_2 \in B$, то существуют такие натуральные числа n_1, n_2 , что $V_1 = \left(-2^{-n_1}, 2^{-n_1} \right)$ и $V_2 = \left(-2^{-n_2}, 2^{-n_2} \right)$. Тогда $V_3 = \left(-2^{-n_3}, 2^{-n_3} \right) \in B$, где $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ и $V_3 = \left(-2^{-n_3}, 2^{-n_3} \right) = \left(-2^{-n_2}, 2^{-n_2} \right) \cap \left(-2^{-n_1}, 2^{-n_1} \right) = V_1 \cap V_2$, и значит, условие 2 выполнено.

Так как $\left(-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)} \right) + \left(-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)} \right) = \left(-2^{-n}, 2^{-n} \right)$ для любого натурального числа n , то условие 3 выполняется.

Так как $-\left(-2^{-n}, 2^{-n} \right) = \left(-2^{-n}, 2^{-n} \right)$, то и условие 4 выполняется.

Покажем теперь, что топология τ_0 , определенная этим базисом, совпадает с интервальной топологией.

Если $\emptyset \neq A \in \tau_0$ и $a \in A$, то (см. определение топологии τ_0 при доказательстве теоремы V.1) существует такое натуральное число n_a , что $\left(-2^{-n_a}, 2^{-n_a} \right) \subseteq -a + A$, и значит, $a + \left(-2^{-n_a}, 2^{-n_a} \right) \subseteq A$. Тогда

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} \left(a + \left(-2^{-n_a}, 2^{-n_a} \right) \right) \subseteq A, \text{ т.е. } A = \bigcup_{a \in A} \left(a + \left(-2^{-n_a}, 2^{-n_a} \right) \right) \in \tau_{\text{инт}}.$$

Итак мы доказали, что всякое не пустое подмножество $A \in \tau_0$ является объединением некоторой совокупности интервалов, и значит, $\tau_0 \subseteq \tau_{\text{инт}}$.

Пусть теперь $U \subseteq R$ и $U = \bigcup_{\alpha \in \Omega} (a_\alpha, b_\alpha)$. Если $a \in U$, то существует такой элемент $\alpha_0 \in \Omega$, что $a \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$, и значит, существует такое натуральное число n_a , что $a + (-2^{-n_a}, 2^{-n_a}) \subseteq (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \subseteq U$.

Тогда, из произвольности элемента a следует, что (см. определение топологии τ_0 при доказательстве теоремы V.1) $U \in \tau_0$, и, значит, $\tau_{\text{инт}} \subseteq \tau_0$.

Итак, мы показали, что $\tau_{\text{инт}} = \tau_0$

Пример V.3.5. Пусть $(Q, +)$ - аддитивная группа рациональных чисел и p - некоторое простое число.

Для каждого натурального числа n рассмотрим множество $V_n = \left\{ \frac{p^n \cdot q}{r} \mid q, r - \text{целые числа и } r \text{ не делится на } p \right\}$. Проверим, что совокупность $B = \{V_n \mid n - \text{натурально число}\}$ удовлетворяет условиям 1-4 следствия V.2, и значит, она задает на группе $Q(+)$ некоторую групповую топологию τ_p , в которой B является базисом окрестностей нуля.

Эта топология является отделимой и называется p -адической топологией.

В самом деле, $0 \in V_n$ и $-V_n = V_n$ для любого $n \in N$, и значит, совокупность B удовлетворяет условиям 1 и 4 следствия V.2.

Так как $V_n \subseteq V_m$, если $n \geq m$, то совокупность B удовлетворяет и условию 2 теоремы V.2.

Проверим теперь выполнение условия 3. В самом деле,

$$\begin{aligned} V_n + V_n &= \left\{ \frac{p^n \cdot q}{r} \mid q, r - \text{целые числа и } r \text{ не делится на } p \right\} \\ &+ \left\{ \frac{p^n \cdot t}{s} \mid t, s - \text{целые числа и } s \text{ не делится на } p \right\} = \end{aligned}$$

$\left\{ \left| \frac{p^n \cdot (q \cdot s + r \cdot t)}{r \cdot s} \right| \mid q, r, s, t - \text{целые числа} \right\}$. Так как p является простым числом, то число $r \cdot s$ не делится на число p , и значит,

$$\left\{ \left| \frac{p^n \cdot (q \cdot s + r \cdot t)}{r \cdot s} \right| \mid q, r, s, t - \text{целые числа} \right\} \subseteq V_n.$$

Из произвольности числа n следует, что выполнено и условие 3.

Проверим теперь, что топология τ_p является отделимой, т.е. выполнено условие 5 теоремы IV. 1.

Допустим противное и пусть $0 \neq \frac{m}{q}$ - такое рациональное число, что

$$\frac{m}{q} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Если n - наибольшее из таких неотрицательных целых чисел, что число m делится на число p^n .

Так как числители всех рациональных чисел из множества $V_{n+1} = \left\{ \left| \frac{p^{n+1} \cdot t}{s} \right| \mid t, s - \text{целые числа и } s \text{ не делится на } p \right\}$ делятся на число p^{n+1} , то $\frac{m}{q} \notin V_{n+1}$. Получили противоречие.

Значит, топология τ_p является отделимой.

Пример V.3.6. Пусть $C(+)$ - аддитивная группа комплексных чисел. Для каждого натурального числа n рассмотрим множества $V_n = \{r + 0 \cdot i \in C \mid -2^{-n} < r < 2^{-n}\}$ и $W_n = \{0 + r \cdot i \in C \mid -2^{-n} < r < 2^{-n}\}$

Аналогично тому, как было проверено в примере V.3.4, проверяется, что каждая из совокупностей $\Delta = \{V_n \mid n - \text{натуральное число}\}$ и $\Delta' = \{W_n \mid n - \text{натуральное число}\}$ удовлетворяет всем условиям следствия V.2, и значит, они задают на группе $C(+)$ некоторые групповые топологии τ_0 и τ'_0 , в которых, совокупности Δ и Δ' , соответственно, будут базисами окрестностей нуля.

Теорема V.4. Пусть $G(\cdot) = \{e, g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, \dots\}$ - некоторая нумерация счетной группы и τ - отделимая групповая топология на группе $G(\cdot)$. Тогда на группе G существует такая отделимая групповая топология τ_0 , что $\tau_0 \leq \tau$ и

топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы, т.е. τ_0 является метризуемой топологией (см. IV.3).

Доказательство. По индукции построим последовательность $\{V_1, V_2, \dots\}$ окрестностей V_i единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следующим образом:

В качестве V_1 возьмем произвольную симметричную окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, такую, что $V_1 \cap \{g_1, g_1^{-1}\} = \emptyset$ (ввиду отделимости топологии τ такая окрестность существует).

Согласно теореме II.4, в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, существует такая симметричная окрестность V_2 единицы, что $V_2 \cdot V_2 \subseteq V_1$, $V_2 \cap \{g_2, g_2^{-1}\} = \emptyset$ и $g_1 \cdot V_2 \cdot g_1^{-1} \subseteq V_1$. Так как $V_2 \subseteq V_1$, то $V_2 \cap \{g_1, g_1^{-1}\} = \emptyset$, и значит, $V_2 \cap \{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}\} = \emptyset$

Допустим, что уже построены такие симметричные окрестности $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что выполнены следующие условия:

$$V_i \cap \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_i^{\pm 1}\} = \emptyset \text{ для любого натурального числа } 1 \leq i \leq n;$$

$$V_{i+1} \cdot V_{i+1} \subseteq V_i \text{ для любого натурального числа } 0 \leq i \leq n-1;$$

$$g_j \cdot V_i \cdot g_j^{-1} \subseteq V_{i-1} \text{ для любых натуральных чисел } 1 \leq j < i \leq n.$$

Существует такая симметричная окрестность V_{n+1} единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_{n+1} \cdot V_{n+1} \subseteq V_n$, $\{g_{n+1}, g_{n+1}^{-1}\} \cap V_{n+1} = \emptyset$ и $g_j \cdot V_i \cdot g_j^{-1} \subseteq V_{i-1}$ для любых натуральных чисел $1 \leq j < i \leq n+1$. Тогда $\{g_1, g_1^{-1}, \dots, g_{n+1}, g_{n+1}^{-1}\} \cap V_{n+1} = \emptyset$.

Продолжая этот процесс, мы построим такую последовательность $\{V_1, V_2, \dots\}$ симметричных окрестностей V_i единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что выполнены следующие условия:

$$V_i \subseteq V_j \text{ для любых натуральных чисел } j \leq i;$$

$$V_{i+1} \cdot V_{i+1} \subseteq V_i \text{ для любого натурального числа } i \geq 1;$$

$$V_i^{-1} = V_i \text{ для любого натурального числа } i \geq 1;$$

$g_k \cdot V_{k+i} \cdot g_k^{-1} \subseteq V_{k+i-1} \subseteq V_i$ и $g_k^{-1} \cdot V_{k+i} \cdot g_k \subseteq V_i$ для любых натуральных чисел k и i ;

$$\{g_1, g_1^{-1}, \dots, g_{k+1}, g_{k+1}^{-1}\} \cap V_{k+1} = \emptyset \text{ для любого натурального числа } k.$$

Согласно теореме V.1 существует такая групповая топология τ_0 , что совокупность $\{V_1, V_2, \dots\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)$.

Так как $V_i \cap \{g_i, g_i^{-1}\} = \emptyset$ для любого $1 \leq i$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \{e\}$, и значит, согласно теореме IV.1, $(G(\cdot), \tau_0)$ является отделимой топологической группой.

Так как для любого натурального числа $1 \leq i$ множество V_i является окрестностью единицы и в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и любая групповая топология определяется единственным образом базисом окрестностей единицы, то $\tau_0 \leq \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

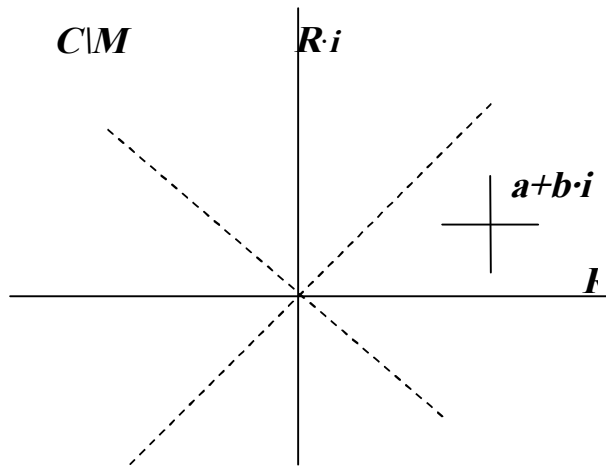
Замечание V.5. Построим теперь группу и такие групповые топологии τ_0 и τ'_0 , что $\inf\{\tau_0, \tau'_0\}$ (см. B.16 и B.17) не будет групповой топологией.

Пусть $C(+)$ - аддитивная группа комплексных чисел, τ_0 и τ'_0 - групповые топологии, которые построены в примере V.3.6.

Покажем, что $\tau = \inf\{\tau_0, \tau'_0\}$ не будет групповой топологией в группе $C(+)$.

Допустим противное, т.е., что $(C(+), \tau)$ является топологической группой. Рассмотрим множество

$$M = \{r + r \cdot i \mid 0 \neq r - \text{действительное число}\}.$$



Проверим, что множество $C \setminus M$ является открытым множеством в каждой из топологических групп $(C(+), \tau_0)$ и $(C(+), \tau'_0)$.

В самом деле, если $a + b \cdot i \in C \setminus M$, то $a \neq b$ или $a = b = 0$.

Если $a \neq b$, то существует такое натуральное число n , что $2^{-n} < |a - b|$. Тогда (см. пример V.3.5) $b \notin a + V_n$ и $a \cdot i \notin b \cdot i + W_n$, и значит, $((a + b \cdot i) + V_n) \cap M = \emptyset$ и $((a + b \cdot i) + W_n) \cap M = \emptyset$.

Тогда $(a + b \cdot i) + V_n \subseteq C \setminus M$ и $(a + b \cdot i) + W_n \subseteq C \setminus M$.

Так как (см. теорему II.1) множество $(a + b \cdot i) + V_n$ является окрестностью элемента $a + b \cdot i$ в топологической группе $(C(+), \tau_0)$ и множество $(a + b \cdot i) + W_n$ является окрестностью элемента $a + b \cdot i$ в топологической группе $(C(+), \tau'_0)$, то $C \setminus M$ будет окрестностью элемента $a + b \cdot i$ в каждой из топологических групп $(C(+), \tau_0)$ и $(C(+), \tau'_0)$.

Если же $a = b = 0$, то $a + b \cdot i = 0$ и так как $V_1 \cap M = \emptyset$ и $W_1 \cap M = \emptyset$, то $V_1 \subseteq C \setminus M$ и $W_1 \subseteq C \setminus M$.

Так как V_n является окрестностью 0 в топологической группе $(C(+), \tau_0)$ и W_n является окрестностью 0 в топологической группе $(C(+), \tau'_0)$, то $C \setminus M$ будет окрестностью 0 в каждой из топологических групп $(C(+), \tau_0)$ и $(C(+), \tau'_0)$.

Итак, мы доказали, что в каждой из топологических групп $(C(+), \tau_0)$ и $(C(+), \tau'_0)$ множество $C \setminus M$ будет окрестностью любой своей точки, и значит, (см. B.6) $C \setminus M \in \tau_0$ и $C \setminus M \in \tau'_0$. Тогда (см. B.17), $C \setminus M \in \tau_0 \cap \tau'_0 = \inf\{\tau_0, \tau'_0\}$.

Так как $0 \in C \setminus M$, то $C \setminus M$ является окрестностью точки 0 в топологическом пространстве $(G, \inf\{\tau_0, \tau'_0\})$.

Согласно допущению, $(G(\cdot), \inf\{\tau_0, \tau'_0\})$ является топологической группой, и значит, существует такая окрестность U нуля в топологической группе $(C(+), \inf\{\tau_0, \tau'_0\})$, что $U + U \subseteq C \setminus M$.

Так как $\inf\{\tau_0, \tau'_0\} \leq \tau_0$ и $\inf\{\tau_0, \tau'_0\} \leq \tau'_0$, то существует такое натуральное число m , что $V_m \subseteq C \setminus M$ и $W_m \subseteq C \setminus M$. Тогда $2^{-m-1} + 2^{-m-1} \cdot i \in V_m + W_m \subseteq U + U \subseteq C \setminus M$ и $2^{-m-1} + 2^{-m-1} \cdot i \in M$.

Получили противоречие.

Следовательно, топология $\inf\{\tau_0, \tau'_0\}$ не является групповой топологией в группе $C(+)$.

Теорема V.6. Топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает конечным базисом $\{V_1, \dots, V_n\}$ окрестностей единицы тогда и только тогда, когда существует такой

нормальный делитель N , что совокупность $\beta = \{N\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство.

Необходимость. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает конечным базисом $\{V_1, \dots, V_n\}$ окрестностей единицы, то $N = \bigcap_{i=1}^n V_i$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Тогда, из того, что $N \subseteq V_i$ для любого $1 \leq i \leq n$, и $\{V_1, \dots, V_n\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, следует, что совокупность $B = \{N\}$ будет базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, а из утверждения 3 теоремы II.5 следует, что $N = \bigcap_{i=1}^n V_i$ будет нормальным делителем в группе $G(\cdot)$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такой нормальный делитель N , что совокупность $B = \{N\}$ является базисом окрестностей единицы. Тогда топологическая группа обладает конечным базисом окрестностей единицы.

Этим теорема полностью доказана.

VI. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОТДЕЛИМЫХ ГРУППОВЫХ ТОПОЛОГИЙ НА СЧЕТНОЙ ГРУППЕ.

Начало исследований в этом направлении было заложено в работе [9] и в этой же работе был предложен метод задания отдельных групповых топологий на счетной группе.

Обозначения VI.1. Пусть даны последовательности $V_1, V_2, \dots$ и $S_1, S_2, \dots$ непустых симметричных подмножеств группы $G(\cdot)$.

Для каждого натурального числа k по индукции определим подмножество $F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k) \subseteq G$ следующим образом:

$$F_1(V_1; S_1) = \{g \cdot V_1 \cdot g^{-1} \mid g \in S_1\} \cup V_1 \cdot V_1 \text{ и}$$

$$F_{k+1} = F_1(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}), S_1).$$

Предложение VI.2. Для подмножеств $F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k)$ группы $G(\cdot)$ верны следующие утверждения:

VI.2.1. Если $e \in V_1$, то $V_1 \subseteq V_1 \cdot V_1 \subseteq F_1(V_1; S_1)$ и $g \cdot V_1 \cdot g^{-1} \subseteq F_1(V_1; S_1)$ для любого элемента $g \in S_1$;

VI.2.2. Если k - натуральное число, и S_i и V_i являются конечными, симметричными множествами для любого натурального числа $1 \leq i \leq k$, то и $F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k)$ будет конечным симметричным множеством;

VI.2.3. $F_k(\{e\}, \dots, \{e\}; S_1, \dots, S_k) = \{e\}$ для любого натурального числа k ;

VI.2.4. Если k - натуральное число и $U_i, V_i, T_i, S_i \subseteq G$ - такие симметричные подмножества, что $U_i \subseteq V_i$ и $T_i \subseteq S_i$ для любого натурального числа $1 \leq i \leq k$, то $F_k(U_1, \dots, U_k; T_1, \dots, T_k) \subseteq F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k)$;

VI.2.5. Если k, p - натуральные числа, $e \in V_i$ для любого натурального числа $i \leq k$ и $V_{k+j} = \{e\}$ для любого натурального числа $1 \leq j \leq p$, то $F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k) = F_{k+p}(V_1, \dots, V_{k+p}; S_1, \dots, S_{k+p})$;

VI.2.6. Если натуральное число $k \geq 2$, то $F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k) = F_k(V_1 \cup F_{k-1}(V_2, \dots, V_k; S_2, \dots, S_k), \dots, V_{k-1} \cup F_1(V_k; S_k), V_k; S_1, \dots, S_k)$;

VI.2.7. Если k - натуральное число и $e \in V_i$ для любого натурального числа $1 \leq i \leq k$, то $V_t \subseteq F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k)$ для любого числа $1 \leq t \leq k$;

VI.2.8. Если $e \in V_i$ для любого натурального числа $1 \leq i$, то $F_{k+1}(V_s, \dots, V_{k+s}; S_s, \dots, S_{k+s}) \subseteq F_{k+s-t+1}(V_t, \dots, V_{k+s}; S_t, \dots, S_{k+s})$ для любых натуральных чисел k, s, t таких, что $t \leq s$.

Доказательство. Утверждение VI.2.1 легко следует из определения множества $F_1(V_1, S_1)$.

Утверждения VI.2.2, VI.2.3 и VI.2.4 легко доказываются индукцией по числу k , учитывая симметричность множеств S_i и V_i для любого натурального числа i и определение множества $F_k(V_1, \dots, V_k; S_1, \dots, S_k)$.

Утверждение VI.2.5 докажем индукцией по числу k .

Если $k=1$, то, учитывая утверждение VI.2.3, получим, что $F_{1+p}(V_1, \{e\}, \dots, \{e\}; S_1, \dots, S_{1+p}) = F_1(V_1 \cup F_p(\{e\}, \dots, \{e\}; S_2, \dots, S_{1+p}); S_1) = F_1(V_1 \cup \{e\}; S_1) = F_1(V_1; S_1)$ для любого натурального числа p .

Допустим, что требуемое равенство доказано для числа k и всех натуральных чисел p . Тогда $F_{k+1+p}(V_1, \dots, V_{k+1}, \{e\}, \dots, \{e\}; S_1, \dots, S_{k+1+p}) = F_1(V_1 \cup F_{k+p}(V_2, \dots, V_{k+1}, \{e\}, \dots, \{e\}; S_2, \dots, S_{k+1+p}); S_1) = F_1(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}); S_1) = F_{k+1}(V_1, V_2, \dots, V_{k+1}; S_1, S_2, \dots, S_{k+1})$.

Этим утверждение VI.2.5 доказано и для числа $k+1$, и значит, утверждение доказано для любого натурального числа k .

Утверждение VI.2.6 докажем индукцией по числу k .

Если $k=2$, то $F_2(V_1, V_2; S_1, S_2) = F_1(V_1 \cup F_1(V_2; S_2); S_1) = F_1(V_1 \cup F_1(V_2; S_2) \cup F_1(V_2; S_2); S_1) = F_2(V_1 \cup F_1(V_2; S_2), V_2; S_1, S_2)$.

Допустим, что требуемое равенство доказано для числа $k \geq 2$. Тогда $F_{k+1}(V_1, \dots, V_{k+1}; S_1, \dots, S_{k+1}) = F_1(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}), S_1) = F_1(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}) \cup F_k(V_2 \cup F_{k-1}(V_3, \dots, V_{k+1}; S_3, \dots, S_{k+1}), \dots, V_k \cup F_1(V_{k+1}, S_{k+1}), V_{k+1}; S_2); S_1) = F_{k+1}(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}), \dots, V_k \cup F_1(V_{k+1}; S_k), V_{k+1}; S_1, \dots, S_{k+1})$.

Этим утверждение VI.2.6 доказано и для числа $k+1$, и значит, оно доказано для любого натурального числа ≥ 2 .

Доказательство утверждения VI.2.7 проведем индукцией по числу k .

Если $k=1$, то $t=1$. Тогда из утверждения VI.2.1 следует, что $F_1(V_1; S_1) \supseteq V_1$.

Допустим, что требуемое включение доказано для числа k и всех чисел $1 \leq t \leq k$, и пусть t - такое натуральное число, что $k+1 \geq t$.

Если $t > 1$, то, учитывая индуктивное допущение, получим, что $F_{k+1}(V_1, \dots, V_{k+1}; S_1, \dots, S_{k+1}) \supseteq F_1(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}); S_1) \supseteq F_1(V_1 \cup V_t; S_1) \supseteq V_1 \cup V_t \supseteq V_t$.

Если же $t=1$, то, последовательно применяя утверждения VI.2.4 и VI.2.3 и индуктивное допущение, получим, что $F_{k+1}(V_1, \dots, V_{k+1}; S_1, \dots, S_{k+1}) \supseteq$

$$F_1(V_1 \cup F_k(V_2, \dots, V_{k+1}; S_2, \dots, S_{k+1}); S_1) \supseteq \\ F_1(V_1 \cup F_k(\{e\}, \dots, \{e\}; S_2, \dots, S_{k+1}); S_1) = F_1(V_1; S_1) \supseteq V_1.$$

Этим утверждение VI.2.7 доказано.

Доказательство утверждения VI.2.8 проведем индукцией по числу $s - t$.

Если $s - t = 0$, то $t = s$, и тогда $F_{k+1}(V_s, \dots, V_{k+s}; S_s, \dots, S_{k+s}) = F_{k+s-t+1}(V_t, \dots, V_{k+s}; S_t, \dots, S_{k+s})$ для любого натурального числа k .

Допустим, что требуемое включение доказано для числа $s - t = n$ и любого натурального числа k и пусть $s - t = n + 1$. Тогда, согласно индуктивному допущению и утверждению VI.2.7, имеем, что

$$F_{k+1}(V_s, \dots, V_{k+s}; S_s, \dots, S_k) \subseteq F_{k+(s-t-1)+1}(V_2, \dots, V_{k+s}; S_2, \dots, S_{k+s}) \subseteq \\ V_1 \cup F_{k+(s-t-1)+1}(V_2, \dots, V_{k+s}; S_2, \dots, S_{k+s}) \subseteq \\ F_1(V_1 \cup F_{k+s-t}(V_2, \dots, V_{k+s}; S_2, \dots, S_{k+s}), S_1) = \\ F_{k+s-t+1}(V_1, \dots, V_{k+s}; S_1, \dots, S_{k+s}) \text{ для любых натуральных чисел } s, k.$$

Этим утверждение VI.2.8, доказано, и значит предложение VI.2 полностью доказано.

Определение VI.3. Пусть $G(\cdot)$ - группа и x - некоторая переменная. Выражение вида $g_1 \cdot x^{k_1} \cdot g_2 \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot g_s \cdot x^{k_s} \cdot g_{s+1}$, где $g_i \in G$ для любого натурального чисел $1 \leq i \leq s+1$ и k_j - целое число для натурального числа $1 \leq j \leq s$, назовем *словом от переменной x над группой $G(\cdot)$* .

Обозначим через $G(x)$ множество всех слов от переменной x над группой $G(\cdot)$.

Добавляя в записи элемента $g_1 \cdot x^{k_1} \cdot g_2 \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot g_s \cdot x^{k_s} \cdot g_{s+1}$, если это необходимо единицу e , и считая, что $x^0 = e$, то можем считать, что все числа $k_i \in \{1, -1\}$.

Замечание VI.4. Легко заметить, что множество $G(x)$ будет группой относительно операции умножения слов.

Определение VI.5. Если $f(x)$ - некоторое слово от переменной x над группой $G(\cdot)$, то выражение вида $f(x) = g$, где $g \in G$ называется *уравнением над группой G* .

Определение VI.6. Элемент b группы $G(\cdot)$ назовем *корнем уравнения $f(x) = g$ над группой $G(\cdot)$* , если $f(b) = g$.

Обозначение VI.7. Пусть $G(\cdot)$ - счетная группа и $G = \{e, g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, \dots\}$ - некоторая нумерация элементов группы $G(\cdot)$.

Для каждого натурального числа k рассмотрим множество $S_k = \{g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}\}$.

Для каждой пары натуральных чисел (i, j) определим подмножества $V_{(i,j)}$ и $S_{(i,j)}$ группы $G(\cdot)$, и для каждой такой тройки натуральных чисел (i, j, k) , что $1 \leq k \leq j$ определим множество $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ уравнений от переменной x над группой $G(\cdot)$ следующим образом:

$V_{(1,j)} = \{e\}$, $S_{(1,j)} = S_j$ и $\Phi_{(1,j,k)}(x) = \{x = c \mid c \in S_k\}$ для любых натуральных чисел j, k таких, что $k \leq j$.

Допустим, что для натурального числа p уже определены множества $V_{(i,j)}$, $S_{(i,j)}$ для любого натурального числа $i \leq p$, и определено множество $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ для любых натуральных чисел i, j, k таких, что $i \leq p$ и $k \leq j$.

Если $p+1$ - четное число, то возьмем:

$V_{(p+1,j)} = \{e\}$ для любого натурального числа $j \geq p+1$;

$V_{(p+1,j)} = V_{(p,j)} \cup \{g, g^{-1}\}$, где g - некоторый элемент из множества

$G \setminus \bigcup_{s=1}^j S_{(s,j)}$ для любого натурального числа $j < p+1$;

$\Phi_{(p+1,j,k)}(x) = \Phi_{(p,j,k)}(x)$ для любых натуральных чисел $k < j$;

$S_{(p+1,j)} = \left\{ g \in G \mid g - \text{корень некоторого уравнения из } \bigcup_{k=1}^j \Phi_{(p+1,j,k)}(x) \right\}$

для любого натурального числа j .

Если же $p+1$ - нечетное число, то возьмем:

$V_{(p+1,j)} = \{e\}$ для любого натурального числа $j \geq p+1$;

$V_{(p+1,j)} = F_{p+1-j}(V_{(p,j+1)}, \dots, V_{(p,p+1)}; S_{j+1}, \dots, S_{p+1}) \cup V_{(p,j)}$ для любого натурального числа $j < p+1$;

$\Phi_{(p+1,j,j)}(x) = \{x = g \mid g \in S_j\}$ для любого натурального числа j и

$\Phi_{(p+1,j,k)}(x) = \left\{ f(x) = g \mid f(x) \in F_{j-k}(V_{(p+1,k+1)}, \dots, V_{(p+1,j-1)}, V_{(p,j)} \cup \{x, x^{-1}\}; S_{k+1}, \dots, S_j) \text{ и } g \in S_k \right\}$ для любых натуральных чисел $k < j$;

$S_{(p+1,j)} = S_{(p,j)}$ для любого натурального числа j .

Итак, для каждой пары (i, j) натуральных чисел мы определили подмножества $V_{(i,j)}$ и $S_{(i,j)}$ группы $G(\cdot)$ и для каждой такой тройки (i, j, k)

натуральных чисел, что $1 \leq k \leq j$ мы определили множество $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ уравнений над группой $G(\cdot)$.

Предложение VI.8. Для множеств $V_{(i,j)}$, $S_{(i,j)}$ и $\Phi_{(i,j,k)}$ (определение см. в VI.7) верны следующие утверждения:

VI.8.1. Если i, j - натуральные числа и $i \leq j$, то $V_{(i,j)} = \{e\}$;

VI.8.2. Если i, j, k - такие натуральные числа, что $i \leq k$, то $V_{(i,j)} \subseteq V_{(k,j)}$;

VI.8.3. $e \in V_{(i,j)}$ и $V_{(i,j)}$ является конечным симметричным множеством для любой пары (i, j) натуральных чисел;

VI.8.4. Если (i, j, p) - такая тройка натуральных чисел, что $j \leq i$, то $F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) \subseteq F_{i-j}(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i)$;

VI.8.5. $F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) \subseteq V_{(i+1,j)}$ для любой тройки (i, j, p) натуральных чисел;

VI.8.6. Если (i, j, p) - такая тройка натуральных чисел, что $k \leq j$, то $V_{(i,j)} \subseteq V_{(i+1,k)}$;

VI.8.7. $F_{p+1}(V_{(i+1,j+1)}, \dots, V_{(i+1,j+p)}, V_{(i,j+p+1)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}, S_{j+p+1}) = F_p(V_{(i+1,j+1)}, \dots, V_{(i+1,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p})$ для любой тройки (i, j, p) натуральных чисел;

VI.8.8. $S_j \subseteq S_{(i,j)}$ для любой пары (i, j) натуральных чисел;

VI.8.9. $S_j \cap V_{(i,j)} = \emptyset$ для любой пары (i, j) натуральных чисел;

VI.8.10. Множество $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ является конечным и единица e группы $G(\cdot)$ не является корнем любого уравнения из множества $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ для любой тройки (i, j, k) натуральных чисел;

VI.8.11. $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)} \right) \cap V_{(i,j)} = \emptyset$ для любой пары (i, j) натуральных чисел.

Доказательство. Верность утверждений VI.8.1 и VI.8.2 следует из построения множеств $V_{(i,j)}$, а верность утверждения VI.8.3 следует из построения множеств $V_{(i,j)}$ и утверждения VI.2.2.

Доказательство утверждения VI.8.4.

Если $p \leq i - j$, то, согласно утверждениям VI.2.5 и VI.2.4,

$$F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) = \\ F_{i-j}(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}, \{e\}, \dots, \{e\}; S_{j+1}, \dots, S_i) \subseteq \\ F_{i-j}(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i).$$

Если же $p > i - j$, то (см. построение множеств $V_{(k,l)}$ для $l \leq k$)

$V_{(i,i+s)} = \{e\}$ для любого натурального числа s . Тогда, учитывая утверждение VI.2.5, получим, что

$$F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) = \\ F_{i-j}(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,i)}, \{e\}, \dots, \{e\}; S_{j+1}, \dots, S_i) = F_{i-j}(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i).$$

Этим утверждение VI.8.4 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.5.

Если $j+1 \geq i$, то $V_{(i,j+1)} = \{e\}$. Тогда для любой такой тройки (i, j, p) натуральных чисел, что $j+1 \geq i$ получим, что $V_{(i+1,j)} \supseteq \{e\} = F_p(\{e\}, \dots, \{e\}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) = F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p})$.

Пусть теперь $j+1 < i$.

Если $i+1$ - нечетное число, то для любой такой тройки (i, j, p) натуральных чисел, что $j < i$ получим, что (см. утверждение VI.8.4 и определение множеств $V_{(i,j)}$) $F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) \subseteq F_{i-j}(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i) \cup V_{(i,j)} = V_{(i+1,j)}$.

Если же $i+1$ - четное число, то i будет нечетным числом. Тогда, последовательно применяя определение множества $V_{(i,j)}$ для случая, когда i является нечетным числом, утверждение VI.2.6, утверждение VI.8.5 для случая, когда i является нечетным числом (верность утверждения VI.8.5 для случая, когда i является нечетным числом была доказана выше) и утверждение VI.8.2, получим

$$F_p(V_{(i,j+1)}, \dots, V_{(i,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) = \\ F_p(V_{(i-1,j+1)} \cup F_{p-1}(V_{(i-2,j+2)}, \dots, V_{(i-2,j+p)}; S_{i+1}, \dots, S_{i+p}), \dots, \\ \dots, V_{(i-1,j+p-1)} \cup F_1(V_{(i-2,j-p)}; S_{j+p}), V_{(i-1,j+p)}; S_{i+1}, \dots, S_{i+p}) \subseteq \\ F_p(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,j+p)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p}) \subseteq V_{(i,j)} \subseteq V_{(i+1,j)}.$$

Этим утверждение VI.8.5 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.6.

Пусть (i, j, k) - такая тройка натуральных чисел, что $k \leq j$.

Если $k = j$, то, согласно утверждению VI.8.2, $V_{(i,j)} \subseteq V_{(i+1,j)} = V_{(i+1,k)}$.

Пусть теперь $k < j$. Если $i \leq j$, то (см. построение множеств $V_{(i,j)}$) $V_{(i,j)} = \{e\} \subseteq V_{(i+1,k)}$.

Если же $i > j$, то $i > k$. Тогда, учитывая утверждения VI.2.7 и VI.8.5, получим, что $V_{(i,j)} \subseteq F_{i-j}(V_{(i,k+1)}, \dots, V_{(i,i)}; S_{k+1}, \dots, S_i) \subseteq V_{(i+1,k)}$.

Этим утверждение VI.8.6 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.7 проведем индукцией по числу p .

Если $p = 1$, то, учитывая утверждение VI.8.5, получим, что $F_2(V_{(i+1,j+1)}, V_{(i,j+2)}; S_{j+1}, S_{j+2}) = F_1(V_{(i+1,j+1)} \cup F_1(V_{(i,j+2)}; S_{j+2}), S_{j+1}) = F_1(V_{(i+1,j+1)}; S_{j+1})$.

Допустим, что требуемое равенство доказано для числа p . Тогда, учитывая индуктивное допущение, получим, что

$$\begin{aligned} & F_{p+2}(V_{(i+1,j+1)}, \dots, V_{(i+1,j+p+1)}, V_{(i,j+p+2)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p+1}, S_{j+p+2}) = \\ & F_1(V_{(i+1,j+1)} \cup F_{p+1}(V_{(i+1,j+2)}, \dots, V_{(i+1,j+p+1)}, V_{(i,j+p+2)}; S_{j+2}, \dots, S_{j+p+2}), S_{j+1}) = \\ & F_1(V_{(i+1,j+1)} \cup F_p(V_{(i+1,j+2)}, \dots, V_{(i+1,j+p+1)}; S_{j+2}, \dots, S_{j+p}, S_{j+p+1}), S_{j+1}) = \\ & F_{p+1}(V_{(i+1,j+1)}, \dots, V_{(i+1,j+p+1)}; S_{j+1}, \dots, S_{j+p+1}). \end{aligned}$$

Этим утверждение VI.8.7 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.8.

Допустим противное, т.е. что $S_j \neq S_{(i,j)}$ и $S_j \not\subseteq S_{(i,j)}$ для некоторых натуральных чисел i, j , и пусть n - наименьшее из этих чисел i .

Так как (см. VI.7) $S_{(1,j)} = S_j$ для любого натурального числа j , то $n > 1$. Кроме того, поскольку $S_{(i,j)} = S_{(i-1,j)} \supseteq S_j$ для любого натурального числа j и нечетного числа i , то из минимальности числа n следует, что n является четным числом.

Тогда $n-1$ будет нечетным числом, и значит,

$$\Phi_{(n-1,j,j)}(x) = \{x = g \mid g \in S_j\} \subseteq \bigcup_{k=1}^j \Phi_{(n-1,j,k)}(x).$$

Так как $S_{(n,j)}$ является множеством всех корней уравнений из множества $\bigcup_{k=1}^j \Phi_{(n-1,j,k)}(x)$, а множество S_j является множеством всех корней уравнений из множества $\Phi_{(n-1,j,j)}(x) = \{x = g \mid g \in S_j\}$, то $S_j \subseteq S_{(n,j)}$ уравнений.

Получили противоречие с выбором числа n .

Этим утверждение VI.8.8 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.9.

Допустим противное, и пусть i - наименьшее из таких натуральных чисел k , что $S_j \cap V_{(k,j)} \neq \emptyset$ для некоторого натурального числа j .

Если i - четное число, то $V_{(i,j)} = \{e\}$ или $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)}$, или $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)} \cup \{g, g^{-1}\}$, где g - некоторый элемент из множества $G \setminus \left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)} \right)$. Из минимальности числа i следует, что $S_j \cap V_{(i-1,j)} = \emptyset$.

Так как $e \notin S_j$, то $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)} \cup \{g, g^{-1}\}$ и $S_j \cap \{g, g^{-1}\} \neq \emptyset$, и значит, $g \in S_j = S_{(1,j)} \subseteq \bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}$.

Получили противоречие с выбором элемента g , и значит, i не может быть четным числом.

Следовательно, i является нечетным числом.

Так как $V_{(1,j)} = \{e\}$ и $e \notin S_j$ (см. определение множеств $V_{(1,j)}$ и S_j), то $i > 1$. Тогда $V_{(i,j)} = F_{i-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i) \cup V_{(i-1,j)}$. Из минимальности числа i следует, что $S_j \cap V_{(i-1,j)} = \emptyset$, и значит, $S_j \cap F_{i-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i) \neq \emptyset$.

Пусть теперь m - наименьшее из таких натуральных чисел k , для которых $S_j \cap F_{k-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,k)}; S_{j+1}, \dots, S_k) \neq \emptyset$, и пусть $a \in S_j \cap F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m)}; S_{j+1}, \dots, S_m)$. Тогда $j \leq m$.

Так как $i-1$ является четным числом, то (см. построение множеств $V_{(s,t)}$ для четных чисел s) $V_{(i-1,m)} = \{e\}$ или $V_{(i-1,m)} = V_{(i-2,m)}$, или $V_{(i-1,m)} = V_{(i-2,m)} \cup \{h^{\pm 1}\}$, где $h \notin \bigcup_{t=1}^m S_{(i-2,t)}$.

Так как $S_j \cap F_{m-j}(\{e\}, \dots, \{e\}; S_{j+1}, \dots, S_m) = S_j \cap \{e\} = \emptyset$, то из утверждения VI.8.5, выбора числа i и того, что $S_j \cap F_{m-j}(V_{(i-2,t)}, \dots, V_{(i-2,m)}; S_{j+1}, \dots, S_m) \subseteq S_j \cap V_{(i-1,j)} = \emptyset$ следует, что $V_{(i-1,m)} \neq \{e\}$ и $V_{(i-1,m)} \neq V_{(i-2,m)}$, и значит, $V_{(i-1,m)} = V_{(i-2,m)} \cup \{h, h^{-1}\}$.

Поскольку, согласно утверждению VI.8.7,

$F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}, V_{(i-2,m)}; S_{j+1}, \dots, S_m) = F_{m-j-1}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}; S_{j+1}, \dots, S_{m-1})$, то из минимальности числа m следует, что в записи элемента a , как элемента из множества

$S_j \cap F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}, V_{(i-2,m)} \cup \{h, h^{-1}\}; S_{j+1}, \dots, S_m)$,
имеется элемент h .

Тогда, $f(h) = a$ для некоторого слова

$$f(x) \in F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}, V_{(i-2,m)} \cup \{x, x^{-1}\}; S_{j+1}, \dots, S_m).$$

Так как $a \in S_j \subseteq S_m$, то уравнение $f(x) = a$ принадлежит множеству $\Phi_{(i-1,j,m)}(x)$. Поскольку $i-1$ является нечетным числом, то из определения множества $S_{(p+1,j)}$ для случая, когда $p+1$ является нечетным числом, следует, что $h \in S_{(i-2,m)} \subseteq \bigcup_{t=1}^m S_{(i-2,t)}$.

Получили противоречие с выбором элемента h .

Этим утверждение VI.8.9 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.10.

Из утверждения VI.2.2 и построения множеств $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ легко следует конечность множества $\Phi_{(i,j,k)}(x)$ для любой тройки (i, j, k) натуральных чисел.

Покажем теперь, что для любой тройки (i, j, k) натуральных чисел единица e группы $G(\cdot)$ не является корнем любого уравнения из множества $\Phi_{(i,j,k)}(x)$.

Допустим противное, т.е. что для некоторой тройки (i, j, k) натуральных чисел единица e является корнем некоторого уравнения из множества $\Phi_{(i,j,k)}(x)$, и пусть q является наименьшим из чисел i , для которых единица является корнем некоторого уравнения из множества $\Phi_{(i,j,k)}(x)$.

Так как $\Phi_{(q,j,k)}(x) = \Phi_{(q-1,j,k)}(x)$ для любой такой тройки (q, j, k) натуральных чисел, что q является четным числом, то из минимальности числа q следует, что q является нечетным числом.

Тогда (см. определение множеств $\Phi_{(p+1,j,k)}(x)$ для случая, когда $p+1$ является нечетным числом) существуют такой элемент $a \in S_k$ и такое слово

$$f(x) \in F_{(j-k)}(V_{(q,k+1)}, \dots, V_{(q,j-1)}, V_{(q-1,j)} \cup \{x, x^{-1}\}; S_{k+1}, \dots, S_j), \text{ что } f(e) = a.$$

Последовательно применяя утверждения VI.8.7 и VI.8.5, получим, что $a = f(e) \in F_{(j-k)}(V_{(q,k+1)}, \dots, V_{(q,j-1)}, V_{(q-1,j)}; S_{k+1}, \dots, S_j) =$

$$F_{(j-k)}(V_{(q,k+1)}, \dots, V_{(q,j-1)}; S_{k+1}, \dots, S_{j-1}) \subseteq V_{(q+1,k)}, \text{ и значит, } a \in S_k \cap V_{(q+1,k)}.$$

Получили противоречие с утверждением VI.8.9.

Этим утверждение VI.8.10 доказано.

Доказательство утверждения VI.8.11.

Допустим противное, и пусть i - наименьшее из таких натуральных чисел s , что $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(s-1,t)}\right) \cap V_{(s,j)} \neq \emptyset$ для некоторого натурального числа j .

Согласно утверждению VI.10, единица e не является корнем любого уравнения из множества $\bigcup_{k=1}^j \Phi_{(i-1,t,k)}(x)$, и значит, $e \notin \bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}$, и так как $V_{(i,j)} = \{e\}$, для чисел $j \geq i$, то $j < i$.

Рассмотрим сначала случай, когда i - четное число.

Так как $j < i$, то $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)}$ или $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)} \cup \{g, g^{-1}\}$, где g - некоторый элемент из множества $G \setminus \left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right)$.

Если $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)}$, то из минимальности числа i и того, что $S_{(i-1,t)} = S_{(i-2,t)}$ для нечетного числа $i-1$ и всех натуральных чисел t следует, что этот случай невозможен.

Значит $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)} \cup \{g, g^{-1}\}$, где элемент $g \in G \setminus \left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right)$. Из минимальности числа i и того, что $S_{(i-1,t)} = S_{(i-2,t)}$ для нечетного числа $i-1$ следует, что $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap V_{(i-1,j)} = \left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-2,t)}\right) \cap V_{(i-1,j)} = \emptyset$. Тогда $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap \{g, g^{-1}\} \neq \emptyset$, и значит, $g \in \bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}$.

Получили противоречие с выбором элемента g , и значит, i не может быть четным числом.

Следовательно, i является нечетным числом.

Так как $V_{(1,j)} = \{e\}$ и $e \notin S_j = S_{(1,j)}$, то число $i > 1$. Тогда $V_{(i,j)} = F_{i-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i) \cup V_{(i-1,j)}$.

Возможны следующие два случая: $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap V_{(i-1,j)} \neq \emptyset$ или

$$\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap F_{i-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i) \neq \emptyset.$$

Если $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap V_{(i-1,j)} \neq \emptyset$ и $a \in \left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap V_{(i-1,j)}$, то $a \in S_{(i-1,t)}$ для некоторого числа $t \leq j$, и поскольку $i-1$ является четным числом, то a является корнем некоторого уравнения из множества $\Phi_{(i-1,t,k)}(x)$, где $k \leq t \leq j$.

Так как $\Phi_{(i-1,t,k)}(x) = \Phi_{(i-2,t,k)}(x)$ (см. построение множеств $\Phi_{(i-1,t,k)}(x)$ для случая, когда $i-1$ является четным числом), то существуют такое слово $f(x) \in F_{t-k}(V_{(i-2,k+1)}, \dots, V_{(i-2,t-1)}, V_{(i-3,t)} \cup \{x, x^{-1}\}; S_{k+1}, \dots, S_t)$ и такой элемент $g \in S_k$, что $f(a) = g$. Тогда, учитывая то, что $a \in V_{(i-1,j)} \subseteq V_{(i-1,t)}$, и применяя утверждения VI.8.2 и VI.8.5, получим, что $g = f(a) \in F_{t-k}(V_{(i-2,k+1)}, \dots, V_{(i-2,t-1)}, V_{(i-3,t)} \cup \{a, a^{-1}\}; S_{k+1}, \dots, S_t) \subseteq F_{t-k}(V_{(i-2,k+1)}, \dots, V_{(i-2,t-1)}, V_{(i-3,t)} \cup V_{(i-1,t)}; S_{k+1}, \dots, S_t) \subseteq F_{t-k}(V_{(i-1,k+1)}, \dots, V_{(i-1,t-1)}, V_{(i-1,t)}; S_{k+1}, \dots, S_t) \subseteq V_{(i,k)}$.

Тогда $g \in S_k \cap V_{(i,k)}$. Получили противоречие с утверждением VI.8.9.

Следовательно, случай $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap V_{(i-1,j)} \neq \emptyset$ невозможен

Значит, $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap F_{i-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,i)}; S_{j+1}, \dots, S_i) \neq \emptyset$.

Пусть m - наименьшее из таких чисел k , для которых $\left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap F_{k-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,k)}; S_{j+1}, \dots, S_k) \neq \emptyset$, и пусть $a \in \left(\bigcup_{t=1}^j S_{(i-1,t)}\right) \cap F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m)}; S_{j+1}, \dots, S_m)$.

Поскольку $i-1$ является четным числом, то $V_{(i-1,m)} = V_{(i-2,m)}$ или $V_{(i-1,m)} = V_{(i-2,m)} \cup \{h, h^{-1}\}$, где элемент $h \notin \bigcup_{t=1}^m S_{(i-2,t)}$ (см. построение множеств $V_{(s,t)}$ для четных чисел s).

Так как, согласно утверждению VI.8.7,

$F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}, V_{(i-2,m)}; S_{j+1}, \dots, S_m) = F_{m-j-1}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}; S_{j+1}, \dots, S_{m-1})$, то из минимальности числа m следует, что в записи элемента a , как элемента из множества $\left(\bigcup_{t=1}^m S_{(i-1,t)}\right) \cap F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}, V_{(i-2,m)} \cup \{h, h^{-1}\}; S_{j+1}, \dots, S_m)$,

имеется элемент h , и значит, $f(h) = a$ для некоторого слова $f(x) \in F_{m-j}(V_{(i-1,j+1)}, \dots, V_{(i-1,m-1)}, V_{(i-2,m)} \cup \{x, x^{-1}\}; S_{j+1}, \dots, S_m)$, что.

Тогда уравнение $f(x) = a$ принадлежит множеству $\Phi_{(i-1,j,m)}(x)$, и значит, (см. определение множества $S_{(p+1,j)}$ для случая, когда $p+1$ является четным числом) $h \in S_{(i-1,m)} = S_{(i-2,m)} \subseteq \bigcup_{t=1}^m S_{(i-2,t)}$.

Получили противоречие с выбором элемента h .

Этим утверждение VI.8.11 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Терема VI.9. Если $G = \{e, g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, \dots\}$ - счетная группа, то совокупность $\{W_j | j = 1, 2, \dots\}$ подмножеств $W_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)}$ (определение множеств $V_{(i,j)}$ см. в VI.7) является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии τ' на группе $G(\cdot)$, причем топологическая группа $(G(\cdot), \tau')$ будет отделимой.

Доказательство. Докажем вначале, что совокупность $\{W_j | j = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1.

Согласно утверждению VI.8.3, $e \in V_{(j,j)} \subseteq W_j$ для любого натурального числа j , т.е. условие 1 теоремы V.1 выполнено.

Из утверждений VI.8.2 и VI.8.5 следует, что $V_{(k,j)} \subseteq V_{(i,j+1)}$ для любых таких натуральных чисел i, j, k , что и $i \leq k$. Тогда $W_{\max\{s,t\}} = W_s \cap W_t$ для любых натуральных чисел s, t , и значит, условие 2 теоремы V.1 выполнено.

Последовательно применяя утверждения VI.8.6, VI.2.1 и VI.8.5 получим,

что $W_{j+1} \cdot W_{j+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j+1)} \right) \cdot \left(\bigcup_{t=1}^{\infty} V_{(t,j+1)} \right) =$

$$\bigcup_{i,t=1}^{\infty} (V_{(i,j+1)} \cdot V_{(t,j+1)}) \subseteq \bigcup_{i,t=1}^{\infty} V_{(\max\{i,t\},j+1)} \cdot V_{(\max\{i,t\},j+1)} \subseteq$$

$$\bigcup_{i,t=1}^{\infty} F_1(V_{(\max\{i,t\},j+1)}; S_1) \subseteq \bigcup_{i,t=1}^{\infty} V_{(\max\{i,t\}+1,j)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{(k,j)} = W_j, \text{ и значит, условие 3}$$

 теоремы V.1 выполнено.

Из утверждения VI.8.3 следует, что $(W_j)^{-1} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} \right)^{-1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (V_{(i,j)})^{-1} =$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} = W_j, \text{ и значит, условие 4 теоремы V.1 выполнено.}$$

Пусть теперь j - произвольное натуральное число, и $g \in G$. Если $g = e$, то $g \cdot W_j \cdot g^{-1} = W_j$.

Если же $g \neq e$, то существует такое натуральное число k , что $g \in S_k$. Тогда, учитывая утверждение VI.8.5, получим, что

$$g \cdot \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} V_{(s,i+k)} \right) \cdot g^{-1} = \bigcup_{s=1}^{\infty} (g \cdot V_{(s,i+k)} \cdot g^{-1}) \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} F_1(V_{(s,i+k)}; S_k) \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} V_{(s+1,i+k-1)} \subseteq W_{i+k-1} \subseteq W_i, \text{ и значит, условие 5 теоремы V.1 выполнено.}$$

Итак, мы доказали, что совокупность $\left\{ W_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} \mid j=1,2,\dots \right\}$ является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии τ' в группе $G(\cdot)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что в этой топологии топологическая группа $(G(\cdot), \tau')$ является отделимой.

Так как (см. утверждение VI.8.9) $S_j \cap V_{(i,j)} = \emptyset$ для любых натуральных чисел i, j , то $S_j \cap W_j = S_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} \right) = \emptyset$, и значит, $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} W_j \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (W_i \cap S_i) = \emptyset$.

Так как $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = G \setminus \{e\}$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \subseteq \{e\}$, и значит, $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \{e\}$.

Тогда, согласно теореме IV.1, топологическая группа $(G(\cdot), \tau')$ является отделимой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VI.10. *Счетная группа $G(\cdot)$ допускает неметризуемую, групповую топологию τ , в которой она является отделимой топологической группой тогда и только тогда, когда для любого конечного множества $M = \{f_1(x) = a_1, \dots, f_m(x) = a_m\}$ уравнений над группой $G(\cdot)$ таких, что единица e не является корнем любого из этих уравнений, в группе $G(\cdot)$ существует элемент $d \neq e$, который не является корнем любого из этих уравнений.*

Доказательство. Необходимость. Пусть счетная группа $G = \{e, g_1^{\pm 1}, \dots\}$ допускает такую неметризуемую, групповую топологию τ , в которой $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой.

Согласно теореме V.4 можем считать, что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы.

Пусть $M = \{f_1(x) = b_1, \dots, f_m(x) = b_m\}$ - такое конечное множество уравнений над группой $G(\cdot)$, что единица e не является корнем любого из этих уравнений.

Зафиксируем произвольное уравнение $f_j(x) = b_j$ из множества M , и пусть $f_j(x) = g_1 \cdot x^{k_1} \cdot g_2 \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot g_n \cdot x^{k_n} \cdot g_{n+1}$, где $k_i \in \{1, -1\}$. Для каждого натурального числа $1 \leq i \leq n+1$ положим $h_i = g_1 \cdot \dots \cdot g_i$. Тогда $f(x) = g_1 \cdot x^{k_1} \cdot g_2 \cdot x^{k_2} \cdot \dots \cdot g_n \cdot x^{k_n} \cdot g_{n+1} = (h_1 \cdot x^{k_1} \cdot h_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (h_n \cdot x^{k_n} \cdot h_n^{-1}) \cdot h_{n+1}$, и значит, это уравнение $f_j(x) = b_j$ переписывается в виде $(h_1 \cdot x^{k_1} \cdot h_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (h_n \cdot x^{k_n} \cdot h_n^{-1}) \cdot h_{n+1} = b_j$.

Так как $h_i \cdot e \cdot h_i^{-1} = e$ для любого $1 \leq i \leq n$ и единица e не является корнем уравнения $f_j(x) = b_j$, то $b_j \neq h_{n+1}$, и значит, $b_j \cdot h_{n+1}^{-1} \neq e$.

Из отделимости топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ следует, что существует такая окрестность U_0 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $b_j \cdot h_{n+1}^{-1} \notin U_0$.

Если теперь U_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $\underbrace{U_1 \cdot U_1 \cdot \dots \cdot U_1}_{n \text{ сомножьте лей}} \subseteq U_0$, то для каждого $1 \leq i \leq n$ найдется такая

симметричная окрестность V_i единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $h_i \cdot V_i \cdot h_i^{-1} \subseteq U_1$. Тогда $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $k_i \in \{-1, 1\}$ для любого натурального числа $1 \leq i \leq n$, то $V^{k_i} \subseteq V_i^{k_i} \subseteq V_i$ для любого натурального числа $1 \leq i \leq n$.

Тогда $(h_1 \cdot a^{k_1} \cdot h_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (h_n \cdot a^{k_n} \cdot h_n^{-1}) \in h_1 \cdot V_1 \cdot h_1^{-1} \cdot \dots \cdot h_n \cdot V_n \cdot h_n^{-1} \subseteq \underbrace{U_1 \cdot U_1 \cdot \dots \cdot U_1}_{n \text{ сомножьте лей}} \subseteq U_0$, и значит, $(h_1 \cdot a^{k_1} \cdot h_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (h_n \cdot a^{k_n} \cdot h_n^{-1}) \neq b_j \cdot h_{n+1}^{-1}$ для

любого элемента $a \in V$, т.е. $(h_1 \cdot a^{k_1} \cdot h_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (h_n \cdot a^{k_n} \cdot h_n^{-1}) \cdot h_{n+1} \neq b_j$ для любого элемента $a \in V$.

Итак, мы доказали, что для любого уравнения $f_j(x) = b_j$ из множества M существует такая окрестность W_j единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что произвольный элемент $a \in W_j$ не будет корнем этого уравнения.

Если теперь $W = \bigcap_{j=1}^m W_j$, то W будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и любой элемент из множества W не будет корнем любого уравнения из множества M .

Так как τ является неметризуемой топологией, то $W \neq \{e\}$, и значит, в группе $G(\cdot)$ имеется элемент $d \neq e$, который не является корнем любого уравнения из множества M .

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в группе $G(\cdot)$ для любого конечного множества $M = \{f_1(x) = a_1, \dots, f_m(x) = a_m\}$ уравнений над группой $G(\cdot)$, для которого единица e не является корнем любого из этих уравнений, имеется элемент $e \neq d \in G$, который не является корнем любого из этих уравнений.

Тогда искомую групповую топологию построим согласно теореме VI.9.

Так как (см. утверждение VI.8.10) для любых натуральных чисел i, j множество $\bigcup_{k=1}^j \Phi_{(i,j,k)}(x)$ является конечным множеством уравнений над группой $G(\cdot)$, и единица e группы $G(\cdot)$ не является корнем любого уравнения из множества $\bigcup_{k=1}^j \Phi_{(i,j,k)}(x)$, то, согласно условию теоремы, в группе $G(\cdot)$ имеется элемент $g_{(i,j)} \neq e$, который не будет корнем любого уравнения из множества $\bigcup_{k=1}^j \Phi_{(i,j,k)}(x)$.

Согласно построению множеств $S_{(i,j)}$ для случая, когда i является четным числом (см. VI.7,) элемент $g_{(i,j)} \notin \bigcup_{t=1}^j S_{(i,t)}$, и значит, при построении множеств $V_{(i,j)}$ для случая, когда i является четным числом и $j < i$, мы можем взять $V_{(i,j)} = V_{(i-1,j)} \cup \{g_{(i,j)}, g_{(i,j)}^{-1}\}$. Тогда каждое из множеств W_i будет отличным от множества $\{e\}$.

Так как совокупность $\{W_i \mid i - \text{натурально е число}\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$, то τ' будет неметризуемой, групповой топологией, причем топологическая группа $(G(\cdot), \tau')$ обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой группой.

Этим теорема полностью доказана.

Замечание VI.11. При доказательстве необходимости в предыдущей теореме, мы доказали следующий результат:

Если τ - такая неметризуемая, групповая топология в счетной группе $G(\cdot)$, что $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой, то для любого конечного множества уравнений, для которого единица не является корнем любого из этих уравнений, существует окрестность W единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, каждый элемент, которой не является корнем любого из этих уравнений.

Теорема VI.12. Если на счетной группе $G = \{e, g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, \dots\}$ задана такая неметризуемая, групповая топология τ , что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой и обладает счетным базисом окрестностей единицы, то топология τ может быть получена методом, который указан в теореме VI.9.

Доказательство. Для каждого натурального числа k рассмотрим множество $S_k = \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}\}$ элементов группы $G(\cdot)$.

Так как топологическая группа (G, τ) обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из симметричных множеств, то, из конечности множества S_k для любого натурального числа k , следует, что существует такой базис $B = \{V_1, V_2, \dots\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, который состоит из таких симметричных подмножеств V_i , что $V_{i+1} \cdot V_{i+1} \subseteq V_i$ и $\{g \cdot V_{i+1} \cdot g^{-1} \mid g \in S_{i+1}\} \subseteq V_i$ для любого натурального числа i .

Из отделимости топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, конечности множеств S_k и того, что $e \notin S_i$ для любого натурального числа i следует, что, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что окрестности V_k выбраны таким образом, что $S_k \cap V_k = \emptyset$ для любого натурального числа k .

Так как любая групповая топология определяется единственным образом любым базисом окрестностей единицы, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что при построении множеств $V_{(i,j)}$ в VI.7, элементы g можно выбрать таким образом, чтобы $W_i = V_i$ (определение множеств W_i см. в теореме VI.9) для любого натурального числа i .

Доказательство этого проведем в пять этапов.

I этап. Индукцией по натуральному числу k докажем, что $F_k(V_{i+1}, \dots, V_{i+k}; S_{i+1}, \dots, S_{i+k}) \subseteq V_i$ для любого натурального числа i (определение множеств $F_k(V_{i+1}, \dots, V_{i+k}; S_{i+1}, \dots, S_{i+k})$ см. в VI.1).

Если $k=1$, то $F_1(V_{i+1}; S_{i+1}) = V_{i+1} \cdot V_{i+1} \cup \{g \cdot V_{i+1} \cdot g^{-1} \mid g \in S_{i+1}\} \subseteq V_i$ для любого натурального числа i .

Допустим, что требуемое включение доказано для натурального числа k и любого натурального числа i . Тогда, учитывая индуктивное допущение, получим, что

$$F_{k+1}(V_{i+1}, \dots, V_{i+k+1}; S_{i+1}, \dots, S_{i+k+1}) = F_1(V_{i+1} \cup F_k(V_{i+2}, \dots, V_{i+k+1}; S_{i+2}, \dots, S_{i+k+1}), S_{i+1}) = F_1(V_{i+1}; S_{i+1}) \subseteq V_i.$$

Итак, мы доказали, что $F_k(V_{i+1}, \dots, V_{i+k}; S_{i+1}, \dots, S_{i+k}) \subseteq V_i$ для любых натуральных чисел i, k .

II этап. При построении множеств $V_{(i+1,j)}$ в VI.7 для случая, когда $i+1$ является четным числом и $j < i+1$, в качестве элемента g будем брать элемент g_s (нумерацию элементов группы $G(\cdot)$ см. в формулировке теоремы), где $s = \min \left\{ t \mid g_t \in (V_j \setminus V_{(i+1,j)}) \cap \left(G \setminus \bigcup_{t=1}^j S_{(t,j)} \right) \right\}$.

Покажем, что $W_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} \subseteq V_j$ для любого натурального числа j .

Индукцией по числу i проверим, что $V_{(i,j)} \subseteq V_j$ для любого натурального числа j .

Если $i=1$, то (см. VI.7) $V_{(1,j)} = \{e\} \subseteq V_j$ для любого натурального числа j .

Допустим, что для натурального числа k мы уже доказали, что $V_{(k,j)} \subseteq V_j$ для любого натурального числа j .

Если $k+1$ - нечетное число, то $V_{(k+1,j)} = \{e\} \subseteq V_j$ для $j \geq k+1$ и (см. этап I доказательства теоремы)

$$V_{(k+1,j)} = F_{k+1-j}(V_{(k+1,j)}, \dots, V_{(k+1,k+1)}; S_{j+1}, \dots, S_{k+1}) \subseteq F_{k+1-j}(V_{j+1}, \dots, V_k; S_{j+1}, \dots, S_k) \subseteq V_j \text{ для любого } j < k+1.$$

Если же $k+1$ является четным числом, то $V_{(k+1,j)} = \{e\} \subseteq V_j$ для $j \geq k+1$ и (см. выше, начало доказательства этого этапа, выбор элемента g при построении множества $V_{(i+1,j)}$ для случая, когда $i+1$ является четным числом и $j < i+1$) $V_{(k+1,j)} = V_{(k,j)} \cup \{g, g^{-1}\} \subseteq V_j$ для любого натурального числа $j < k+1$.

Итак, мы доказали, что $V_{(i,j)} \subseteq V_j$ для всех натуральных чисел i, j .

Тогда $W_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} \subseteq V_j$ для любого j .

III этап. Докажем, что $V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^i S_{(t,j)} \right) = \emptyset$ для любых натуральных чисел i, j .

Допустим противное, т.е. что $V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^k S_{(t,j)} \right) \neq \emptyset$ для некоторых натуральных чисел j, k

Так как $\bigcup_{t=1}^1 S_{(t,j)} = S_{(1,j)} = S_j$, и $V_j \cap S_j = \emptyset$ для любого натурального числа j (см. выбор базиса $B = \{V_1, V_2, \dots\}$ окрестностей единицы), то $k > 1$.

Пусть i - наименьшее из чисел k , для которых $V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^{k+1} S_{(t,j)} \right) \neq \emptyset$.

Тогда, учитывая индуктивное допущение, $V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^i S_{(t,j)} \right) = \emptyset$, и значит, $V_j \cap S_{(i+1,j)} \neq \emptyset$.

Если $i+1$ является нечетным числом, то (см. VI.7) $S_{(i+1,j)} = S_{(i,j)}$, и тогда $\emptyset \neq V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^{i+1} S_{(t,j)} \right) = V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^i S_{(t,j)} \right) = \emptyset$. Значит, $i+1$ не может быть нечетным числом.

Если же $i+1$ является четным числом, то (см. VI.7) любой элемент из множества $S_{(i+1,j)}$ является корнем некоторого уравнения из множества $\bigcup_{k=1}^j \Phi_{(i+1,j,k)}(x)$. Если $a \in V_j \cap S_{(i+1,j)}$ то существует такое натуральное число $1 \leq n < j$, что элемент a является корнем некоторого уравнения из множества $\Phi_{(i+1,j,n)}(x)$, и значит, $f(a) = g$ для некоторого слова $f(x) \in F_{j-n}(V_{(i+1,n+1)}, \dots, V_{(i+1,j-1)}, V_{(i,j)} \cup \{x, x^{-1}\}; S_{n+1}, \dots, S_j)$ и некоторого элемента $g \in S_n$.

Так как $V_{(s,t)} \subseteq V_t$ для любых натуральных чисел s, t (это было доказано при доказательстве этапа II) и $F_k(V_{i+1}, \dots, V_{i+k}; S_{i+1}, \dots, S_{i+k}) \subseteq V_i$ для любых натуральных чисел i, k (см. начало доказательства этапа II), то $g \in F_{j-n}(V_{(i+1,n+1)}, \dots, V_{(i+1,j-1)}, V_{(i,j)} \cup \{a, a^{-1}\}; S_{n+1}, \dots, S_j) \subseteq F_{j-n}(V_{n+1}, \dots, V_j; S_{n+1}, \dots, S_j) \subseteq V_n$, и значит, $V_n \cap S_n \neq \emptyset$.

Получили противоречие с выбором базиса $B = \{V_1, V_2, \dots\}$ окрестностей единицы в топологической группе (G, τ) .

Значит $V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^i S_{(t,j)} \right) = \emptyset$ для любых натуральных чисел i, j .

IV этап. Проверим теперь, что $V_j \subseteq W_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)}$ для любого натурального числа j .

Допустим противное, т.е., что $V_j \setminus W_j \neq \emptyset$ для некоторого натурального числа j , и пусть $b \in V_j \setminus W_j$.

Тогда $b \neq e$, и значит, $b \in \{g_m, g_m^{-1}\}$ для некоторого натурального числа m (нумерацию элементов группы $G(\cdot)$ см. в формулировке теоремы).

Так как $V_j \cap \left(\bigcup_{t=1}^i S_{(t,j)} \right) = \emptyset$ для любого натурального числа i , то,

$$(V_j \setminus V_{(i+1,j)}) \cap \left(G \setminus \bigcup_{t=1}^j S_{(t,j)} \right) = (V_j \setminus V_{(i+1,j)}).$$

Поскольку $i+1 = 2m$ является четным числом, и множество $\{k \mid 1 \leq k \leq 2m = i+1\}$ содержит m четных чисел, а на каждом четном шаге l мы присоединяли к множеству $V_{(l-1,j)}$ подмножество $\{g_s, g_s^{-1}\} \subseteq G$, где $s = \min \left\{ t \mid g_t \in (V_j \setminus V_{(i+1,j)}) \cap \left(G \setminus \bigcup_{t=1}^j S_{(t,j)} \right) = (V_j \setminus V_{(i+1,j)}) \right\}$, то при построении множества $V_{(i+1,j)}$ мы присоединили бы к множеству $V_{(i,j)}$ элемент $b = g_m^{\pm 1}$, если он там еще не содержится, и значит, $b \in W_j = \bigcup_{t=1}^{\infty} V_{(t,j)}$.

Получили противоречие с выбором элемента b .

Следовательно $V_j \subseteq W_j$, и значит, $V_j = W_j$ для любого натурального числа j .

Этим теорема полностью доказана.

Предложение VI.13. Существует такая совокупность $\tilde{N}$ мощности континуума подмножеств множества N натуральных чисел, что для любых различных $A, B \in \tilde{N}$ подмножества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ являются бесконечными.

Доказательство. Разобьем множество P всех простых чисел на два бесконечных подмножества P' и P'' . Тогда существует биекция $\varphi : P' \rightarrow P''$.

Если $\tilde{P}' = \{A' \mid A' \subseteq P'\}$ и $\tilde{P}'' = \{A'' \mid A'' \subseteq P''\}$, и $\tilde{\varphi} : \tilde{P}' \rightarrow \tilde{P}''$ - такое отображение, что $\tilde{\varphi}(A') = P'' \setminus \{\varphi(p) \mid p \in A'\}$ для любого $A' \in \tilde{P}'$. Тогда $\tilde{\varphi}$

является биекцией, причем $\tilde{\varphi}(A') \subseteq \tilde{\varphi}(C')$ тогда и только тогда, когда $C' \subseteq A'$.

Для каждого множества $A' \in \tilde{P}'$ рассмотрим множество натуральных чисел $N(A') = \{p^k \mid p \in A' \cup \tilde{\varphi}(A'), k \in N\}$, и пусть $\tilde{N} = \{N(A') \mid A' \in \tilde{P}'\}$.

Покажем, что совокупность $\tilde{N}$ является искомой.

Так как $P' \cap P'' = \emptyset$, то $N(A') \neq N(C')$ для любых $A', C' \in \tilde{P}'$ таких, что $A' \neq C'$, и значит, совокупность $\tilde{N}$ имеет мощность континуума. Кроме того, если $A, C \in \tilde{N}$ и $A \neq C$, то существуют такие множества $A', C' \in \tilde{P}'$, что $A = N(A')$ и $C = N(C')$, причем $A' \neq C'$.

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $A' \not\subseteq C'$. Тогда $\varphi(C') \not\subseteq \varphi(A')$, и значит, существуют простые числа $p_1 \in A' \setminus C'$ и $p_2 \in \varphi(C') \setminus \varphi(A')$. Тогда $\{p_1^k \mid k \in N\} \subseteq A' \setminus C'$ и $\{p_2^k \mid k \in N\} \subseteq C' \setminus A'$.

Этим предложение полностью доказано.

Терема VI.14. Если счетная группа $G(\cdot)$ допускает такую, не дискретную, групповую топологию τ_0 , в которой топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой, то в группе $G(\cdot)$ имеется континуум не дискретных, попарно несравнимых между собой групповых топологий более сильных, чем τ_0 , причем в каждой из них топологическая группа обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой.

Доказательство. Пусть $G = \{e, g_1^{\pm 1}, \dots\}$ - некоторая нумерация элементов группы G и $S_n = \{g_1^{\pm 1}, \dots, g_n^{\pm 1}\}$ для любого натурального числа n . Тогда, согласно теореме VI.12, совокупность $\left\{W_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{(i,j)} \mid j \in N\right\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе (G, τ_0) , причем (см. конец доказательства теоремы VI.12 и этап I теоремы VI.12) $F_k(W_{i+1}, \dots, W_{i+k}; S_{i+1}, \dots, S_{i+k}) \subseteq W_i$ для любых натуральных чисел i, k и $S_j \cap W_j = \emptyset$ для любого натурального числа j .

Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

I этап. По индукции построим такую последовательность $k_1, k_2, \dots$ натуральных чисел, что $k_i \geq i$ для всех натуральных чисел i , и такую последовательность $h_1, h_2, \dots$ элементов из множества $G \setminus \{e\}$, что для любых натуральных чисел $1 \leq i < k$. Имеет место $\{e, h_i, h_i^{-1}\} \subseteq W_{k_i}$ и $h_i \notin F_k(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_k, h_k^{-1}\}; S_1, \dots, S_k)$

Возьмем $k_1 = 1$, а в качестве элемента h_1 возьмем произвольный элемент из множества $W_1 \setminus \{e\}$.

Допустим, что уже определены такие натуральные числа $k_1, k_2, \dots, k_n$, что $k_i \geq i$, и такие элементы $h_1, h_2, \dots, h_n$ из множества $G \setminus \{e\}$, что $\{e, h_i, h_i^{-1}\} \subseteq W_{k_i}$ и для любого натурального числа $1 \leq i < n$ имеет место $h_i \notin F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n)$ и $h_n \notin F_{n-1}(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{n-1}, h_{n-1}^{-1}\}; S_1, \dots, S_{n-1})$. Тогда для любого числа $i < n+1$ рассмотрим множество $\Omega_{(n+1,i)}(x) = F_{n+1}(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}, \{x, x^{-1}\}; S_1, \dots, S_{n+1})$ слов от переменной x над группой $G(\cdot)$ и множество $\Phi'_{n+1}(x) = \bigcup_{i=1}^n \{f(x) = g \mid f(x) \in \Omega_{(n+1,i)}, g \in \{h_i, h_i^{-1}\}\}$ уравнений.

Так как, (см. утверждение VI.2.5) $F_{n+1}(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}, \{e\}; S_1, \dots, S_{n+1}) = F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n)$, и согласно индуктивному допущению, $h_i \notin F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n)$, то $f(e) \notin \{h_i, h_i^{-1}\}$ для любого натурального числа $i \leq n$ и любого слова $f(x)$ из множества $\Omega_{(n+1,i)}(x)$. Значит, единица e группы G не является корнем любого уравнения из множества $\Phi'_{n+1}(x)$.

Итак, мы доказали, что $\Phi'_{n+1}(x)$ является конечным множеством уравнений над группой $G(\cdot)$ и единица e не является корнем любого уравнения из этого множества.

Так как, τ_0 является такой неметризуемой, групповой топологией, что $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой, то согласно замечанию VI.11, в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ имеется окрестность W единицы, любой элемент, которой не является корнем любого уравнения из множества $\Phi'_{n+1}(x)$.

Из конечности множества $F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n)$ следует существование такого натурального числа $k_{n+1} > n+1$, что $W_{k_{n+1}} \subseteq W$ и $F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n) \cap W_{k_{n+1}} = \{e\}$.

В качестве элемента h_{n+1} , возьмем любой элемент из множества $W_{k_{n+1}} \setminus \{e\}$.

Покажем, что указанные условия выполняются уже для натуральных чисел $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ и элементов $h_1, h_2, \dots, h_{n+1}$ группы $G(\cdot)$. Так как $h_{n+1} \in W_{k_{n+1}} \setminus \{e\}$, то $h_{n+1} \notin F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n)$. Согласно индуктивному допущению, и утверждению VI.2.5, $h_i \notin F_n(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}; S_1, \dots, S_n) = F_{n+1}(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_n, h_n^{-1}\}, \{e\}; S_1, \dots, S_{n+1})$.

Так как элемент h_{n+1} не является корнем любого уравнения из множества

$$\Phi'_{n+1}(x) = \bigcup_{j=1}^n \{f(x) = g \mid f(x) \in \Omega'_{(n+1,j)}, g \in \{h_j, h_j^{-1}\}\}, \quad \text{то}$$

$$h_i \notin F_{n+1}(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_{n+1}, h_{n+1}^{-1}\}; S_1, \dots, S_{n+1}).$$

Итак, мы построили такую последовательность $k_1, k_2, \dots$ натуральных чисел и такую последовательность $h_1, h_2, \dots$ элементов группы $G(\cdot)$, что $k_i \geq i$, $\{e, h_i, h_i^{-1}\} \subseteq W_{k_i}$ для любого натурального числа i и $h_i \notin F_k(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{i-1}, h_{i-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{i+1}, h_{i+1}^{-1}\}, \dots, \{e, h_k, h_k^{-1}\}; S_1, \dots, S_k)$ для любых натуральных чисел $1 \leq i < k$.

II этап. Построение групповой топологии $\tau(A)$ для любого бесконечного подмножества A множества всех натуральных чисел.

Для любого натурального числа i рассмотрим множество $U_{i,A} = \{e\}$, если $i \notin A$ и множество $U_{i,A} = \{e, h_i, h_i^{-1}\}$, если $i \in A$. Кроме того, для любой пары (i, j) натуральных чисел рассмотрим множество $U_{(i,j),A} = F_j(U_{i+1,A}, \dots, U_{i+j,A}; S_{i+1}, \dots, S_{i+j})$ и покажем, что для множеств $U_{(i,j),A}$ выполняются следующие включения:

1. Из утверждений VI.2.3 и VI.2.4 следует, что $e \in U_{(i,j),A}$ для любых натуральных чисел i, j .

2. Из утверждения VI.2.5 следует, что $U_{(k,j),A} \subseteq U_{(k,n),A}$ для любых натуральных чисел $j \leq n$.

3. Из утверждения VI.2.8 следует, что $U_{(i,j),A} \subseteq U_{(k,j),A}$ для любых натуральных чисел $k \leq i$.

4. Из утверждения VI.2.2 следует, что множества $U_{(i,j),A}$ является симметричным множеством, т.е. $(U_{(i,j),A})^{-1} = U_{(i,j),A}$ для любых натуральных чисел i, j .

5. Индукцией по числу j докажем, что $U_{(i+1,j),A} \cdot U_{(i+1,j),A} \subseteq U_{(i,j),A}$ и $g \cdot U_{(i+1,j),A} \cdot g^{-1} \subseteq U_{(i,j),A}$ для любых натуральных чисел i, j , таких, что $j > 1$ и любого элемента $g \in S_{i+1}$.

В самом деле, если $j = 2$, то, последовательно применяя определение множеств $U_{(i,j),A}$, утверждения VI.2.1, VI.2.4 и VI.2.6, получим, что

$$\begin{aligned} U_{(i+1,2),A} \cdot U_{(i+1,2),A} &= F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}) \cdot F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}) \subseteq \\ &F_1(F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}); S_{i+1}) \subseteq F_1(U_{i+1,A} \cup F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}); S_{i+1}) = \\ &F_2(U_{i+1,A}, U_{i+2,A}; S_{i+1}, S_{i+2}) = U_{(i,2),A} \text{ и} \\ g \cdot U_{(i+1,2),A} \cdot g^{-1} &= g \cdot F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}) \cdot g^{-1} \subseteq F_1(F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}); S_{i+1}) \subseteq \\ &F_1(U_{i+1,A} \cup F_1(U_{i+2,A}; S_{i+2}); S_{i+1}) = F_2(U_{i+1,A}, U_{i+2,A}; S_{i+1}, S_{i+2}) = U_{(i,2),A} \text{ для} \\ &\text{любого натурального числа } i \in N. \end{aligned}$$

Допустим, что требуемое включение доказано для числа $j = n \geq 2$ и любого натурального числа i . Тогда

$$\begin{aligned} U_{(i+1,i+n+1),A} \cdot U_{(i+1,i+n+1),A} &= \\ &F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}) \cdot F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}) \subseteq \\ &F_1(F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}); S_{i+1}) \subseteq \\ &F_1(U_{i+1,A} \cup F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}); S_{i+1}) = \\ &F_{n+1}(U_{i+1,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+1}, \dots, S_{i+n+1}) = U_{(i,n+1),A} \text{ и} \\ g \cdot U_{(i+1,i+n+1),A} \cdot g^{-1} &= g \cdot F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}) \cdot g^{-1} \subseteq \\ &F_1(F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}); S_{i+1}) \subseteq \\ &F_1(U_{i+1,A} \cup F_n(U_{i+2,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+2}, \dots, S_{i+n+1}); S_{i+1}) = \\ &F_{n+1}(U_{i+1,A}, \dots, U_{i+n+1,A}; S_{i+1}, \dots, S_{i+n+1}) = U_{(i,n+1),A}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что $U_{(i+1,j),A} \cdot U_{(i+1,j),A} \subseteq U_{(i,j),A}$ и

$g \cdot U_{(i+1,j),A} \cdot g^{-1} \subseteq U_{(i,j),A}$ для любых натуральных чисел i и $j > 1$, и любого элемента $g \in S_{i+1}$.

Аналогично доказательству теоремы VI.9, используя доказанные выше включения 1 – 5, доказывается, что совокупность

$\left\{ \hat{U}_i(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{(i,j),A} \mid i - \text{натурально е число} \right\}$ является базисом

окрестностей единицы для некоторой групповой топологии $\tau(A)$ на группе $G(\cdot)$.

Так как $U_{(i,j)} \subseteq W_{k_i} \subseteq W_i$ для любых натуральных чисел i, j , то $U_i \subseteq W_i$ для любого натурального числа i , и значит, $\tau_0 \leq \tau(A)$. Тогда из отделимости топологической группы $(G(\cdot), \tau_0)$ следует, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{U}_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \{e\}$, и значит, топологическая группа $(G(\cdot), \tau(A))$ тоже будет отделимой.

III этап. Построение континуума групповых топологий, в которых топологическая группа будет отделимой.

Для любого подмножества $A \in \tilde{N}$ (определение множества $\tilde{N}$ см. в предложении VI.13) рассмотрим групповую топологию $\tau(A)$, построенную во II этапе.

Так как совокупность $\tilde{N}$ имеет мощность континуума, то для завершения доказательства теоремы, осталось проверить, что для различных множеств $A, B \in \tilde{N}$ топологии $\tau(A)$ и $\tau(B)$ будут несравнимыми между собой.

Допустим противное, и пусть, для определенности, $\tau(A) \leq \tau(B)$.

Если $n \in A$, то $\hat{U}_{n,A}$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G, \tau(A))$. Так как $\tau(A) \leq \tau(B)$, то $\hat{U}_{n,A}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G, \tau(B))$, и значит, существует такое натуральное число $k \in B$, что $\hat{U}_{k,B} \subseteq \hat{U}_{n,A}$.

Из бесконечности множества $B \setminus A$ следует, что существует такое натуральное число $s \in B \setminus A$, что $s > k$ и $s > n$. Тогда

$$h_s \in F_{k-s}(U_{k+1,B}, \dots, U_{s,B}; S_{k+1}, \dots, S_s) \subseteq \hat{U}_{k,B} \subseteq \hat{U}_{n,A}.$$

Согласно построению элементов h_i (см. I этап этого доказательства),

$$h_s \notin F_t(\{e, h_1, h_1^{-1}\}, \dots, \{e, h_{s-1}, h_{s-1}^{-1}\}, \{e\}, \{e, h_{s+1}, h_{s+1}^{-1}\}, \{e, h_{s+t}, h_{s+t}^{-1}\}; S_1, \dots, S_{s+t}) \text{ для любого натурального числа } t.$$

Так как $s \notin A$, то $U_{s,A} = \{e\}$. Тогда, учитывая, свойства элементов h_i получим, что $h_s \notin F_t(U_{n+1,A}, \dots, U_{n+t,A}; S_{n+1}, \dots, S_{n+t}) = U_{(n,t),A}$ для любого натурального числа $t \in N$, и значит, $h_s \notin \bigcup_{t=1}^{\infty} U_{(n,t),A} = \hat{U}_{n,A}$.

Получили противоречие. Следовательно, топологии $\tau(A)$ и $\tau(B)$ являются несравнимыми между собой.

Этим теорема полностью доказана.

Терема VI.15. Пусть счетная группа G допускает некоторую, неметризуемую, групповую топологию τ_0 , в которой топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы и топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)$ является отделимой группой. Тогда в группе G имеется континуум неметризуемых, групповых топологий более сильных, чем τ_0 , причем верны следующие утверждения:

1. В каждой из этих топологий топологическая группа обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой;
2. Любые две из этих топологий сравнимы между собой.

Доказательство. Пусть P - множество всех простых натуральных чисел, Q - множество всех рациональных чисел и R - множество всех положительных действительных чисел. Тогда существует биекция $\xi: Q \rightarrow P$.

Для каждого положительного действительного числа r рассмотрим бесконечное множество $A_r = \xi(\{q \mid q \in Q, r \leq q\})$ простых чисел и пусть $\tau(A_r)$ - групповая топология на группе G , построенная при доказательстве II этапа теоремы VI.14.

Покажем, что совокупность $\{\tau(A_r) \mid r \in R\}$ групповых топологий является искомой.

Так как множество $\{\hat{U}_i(A_r) \mid i - \text{натурально число}\}$ является базисом окрестностей единицы для групповой топологии $\tau(A_r)$, то топологическая группа $(G, \tau(A_r))$ обладает счетным базисом окрестностей единицы.

Покажем, что для любых различных действительных чисел $r, r' \in R$ топология $\tau(A_r)$ и $\tau(A_{r'})$ являются различными и сравнимыми между собой.

В самом деле, если $r < r'$, то $A_r \setminus A_{r'}$ является бесконечным множеством. Тогда, аналогично, как при доказательстве III этапа теоремы VI.14, доказывается, что $\tau(A_r) \neq \tau(A_{r'})$, и значит, совокупность $\{\tau(A_r) \mid r \in R\}$ имеет мощность континуума.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что любые две топологии из совокупности $\{\tau(A_r) \mid r \in R\}$ сравнимы между собой.

Пусть $r, r' \in R$, и допустим, для определенности, что $r < r'$. Так как $A_{r'} = \xi(\{q \mid q \in Q, r' \leq q\}) \subseteq \xi(\{q \mid q \in Q, r \leq q\}) = A_r$, то (см. определение множеств $U_{(i,j),A}$ при доказательстве II этапа теоремы VI.14), $U_{(i,j),A_{r'}} \subseteq U_{(i,j),A_r}$ для любых $i, j \in N$. Тогда $\hat{U}_{n,A_{r'}} \subseteq \hat{U}_{n,A_r}$ для любого натурального числа n . Так как каждая из совокупностей $\{U_{n,A_{r'}} \mid n - \text{натурально е число}\}$ и $\{U_{n,A_r} \mid n - \text{натурально е число}\}$ являются базисами окрестностей единицы в

топологических группах $(G, \tau(A_+))$ и $(G, \tau(A))$, соответственно, и любая групповая топология определяется базисом окрестностей единицы, то $\tau(A_+) \leq \tau(A)$.

Этим теорема полностью доказана.

Предложение VI.16. Пусть $G(\cdot)$ - коммутативная группа и $f(x) = g_0$ - такое уравнение над группой G , что единица не является его корнем. Если для любого натурального числа n множество $G_n = \{g \in G \mid g^n = e\}$ является конечным, то в группе G имеется только конечное число корней уравнения $f(x) = g_0$.

Доказательство. Пусть $a, b \in G$ и каждый из этих двух элементов является корнем уравнения $f(x) = g_0$. Если $f(x) = g_1 \cdot x^{k_1} \cdot \dots \cdot g_m \cdot x^{k_m} \cdot g_{m+1}$, то из коммутативности группы $G(\cdot)$ следует, что

$$g_0 = g_1 \cdot a^{k_1} \cdot \dots \cdot g_m \cdot a^{k_m} \cdot g_{m+1} = (g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \cdot g_{m+1}) \cdot a^{k_1 + \dots + k_m} \text{ и}$$

$g_0 = g_1 \cdot b^{k_1} \cdot \dots \cdot g_m \cdot b^{k_m} \cdot g_{m+1} = (g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \cdot g_{m+1}) \cdot b^{k_1 + \dots + k_m}$ для любых элементов $a, b \in G$.

Тогда, если элементы $a, b \in G$ являются корнями уравнения $f(x) = g_0$, то $(g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \cdot g_{m+1}) \cdot a^{k_1 + \dots + k_m} = (g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \cdot g_{m+1}) \cdot b^{k_1 + \dots + k_m}$, и значит, $e = a^{k_1 + \dots + k_m} \cdot (b^{k_1 + \dots + k_m})^{-1} = (a \cdot b^{-1})^{k_1 + \dots + k_m}$, т.е. $a \cdot b^{-1} \in G_{k_1 + \dots + k_m}$. Так как множество $G_{k_1 + \dots + k_m}$ является конечным, то множество корней уравнения $f(x) = g_0$ будет конечным.

Этим предложение полностью доказано.

Терема VI.17. Всякая бесконечная коммутативная группа $G(\cdot)$ допускает такую неметризуемую, отделимую, групповую топологию τ , что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой топологической группой.

Доказательство. Выберем некоторую счетную подгруппу $G'(\cdot)$ группы $G(\cdot)$.

Если для любого натурального числа n множество $G'_n = \{g \in G' \mid g^n = e\}$ является конечным, то согласно предложению VI.16, для любого такого конечного множества M уравнений над группой $G'(\cdot)$, что единица не является корнем любого уравнения из множества M в группе $G'(\cdot)$, имеется элемент $g \neq e$, который не будет корнем любого уравнения из множества M .

Тогда по теореме VI.10, группа G' допускает такую неметризуемую, групповую топологию τ' , что топологическая группа (G', τ') обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой.

Если теперь B - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то B , как совокупность подмножеств группы $G'(\cdot)$, удовлетворяет условиям 1 – 4 замечания II.8.

Тогда B , как совокупность подмножеств группы $G(\cdot)$ удовлетворяет условиям 1 – 4 следствия V.2, и значит, B является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии τ уже в группе $G(\cdot)$, причем топологическая группа (G, τ) обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой.

Пусть теперь для некоторого натурального числа n группа $G(\cdot)$ содержит бесконечное множество таких элементов g , что $g^n = e$. Тогда в группе $G(\cdot)$ имеется такая счетная подгруппа $G'(\cdot)$, что $g^n = e$ для любого элемента $g \in G'$. Согласно теореме Б.20, группа $G'(\cdot)$ является прямой суммой счетного множества $\{A_1, A_2, \dots\}$ конечных, циклических подгрупп.

Для каждого натурального числа n рассмотрим множество $U_n = \{g \in G'(\cdot) \mid \pi_i(g) = e \text{ для } i \leq n\}$.

Легко заметить, что совокупность $\{U_k \mid k=1, 2, \dots\}$ подмножеств U_k группы G удовлетворяет условиям 1 – 4 следствия V.2, и значит она, является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии τ в группе $G(\cdot)$, причем топологическая группа (G, τ) обладает счетным базисом окрестностей единицы и является отделимой.

Этим теорема полностью доказана.

Замечание VI.18. В работе [10] указан пример счетной группы, которая не допускает неметризуемых, отделимых, групповых топологий.

VII. ПОДГРУППЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Теорема VII.1. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа и A - подгруппа группы $G(\cdot)$. Тогда $[A]_{(G, \tau)}$ тоже будет подгруппой группы $G(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $a, b \in [A]_{(G, \tau)}$ и V - произвольная окрестность элемента $a \cdot b$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существуют такие окрестности V_a и V_b элементов a и b , в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, соответственно, что $V_a \cdot V_b \subseteq V$.

Так как $a, b \in [A]_{(G, \tau)}$, то $V_a \cap A \neq \emptyset$ и $V_b \cap A \neq \emptyset$. Если $c \in V_a \cap A$ и $d \in V_b \cap A$, то $c \cdot d \in V_a \cdot V_b \subseteq V$ и $c \cdot d \in A \cdot A = A$, и значит, $A \cap V \neq \emptyset$. Из произвольности V следует, что $a \cdot b \in [A]_{(G, \tau)}$.

Пусть теперь $a \in [A]_{(G, \tau)}$ и V - произвольная окрестность элемента a^{-1} в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существует такая окрестность V_a элемента a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_a^{-1} \subseteq V$.

Так как $a \in [A]_{(G, \tau)}$, то $V_a \cap A \neq \emptyset$. Если $c \in V_a \cap A$, то $c^{-1} \in V_a^{-1} \subseteq V$ и $c^{-1} \in A^{-1} = A$, и значит, $A \cap V \neq \emptyset$. Из произвольности окрестности V следует, что $a^{-1} \in [A]_{(G, \tau)}$.

Итак, мы показали, что $[A]_{(G, \tau)}$ является подгруппой группы $G(\cdot)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.2. Если $(G(\cdot), \tau)$ - отделимая топологическая группа и A - коммутативная подгруппа группы $G(\cdot)$, то $[A]_{(G, \tau)}$ тоже будет коммутативной подгруппой группы $G(\cdot)$.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, $[A]_{(G, \tau)}$ является подгруппой группы $G(\cdot)$.

Докажем, что $[A]_{(G, \tau)}$ является коммутативной подгруппой.

Допустим противное, и пусть $a, b \in [A]_{(G, \tau)}$ - такие элементы, что $a \cdot b \neq b \cdot a$. Так $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой, то (см. теорему IV.1) в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существуют такие окрестности V и U элементов $a \cdot b$ и $b \cdot a$, соответственно, что $V \cap U = \emptyset$.

Из непрерывности операции умножения следует, что существуют такие окрестности V_a и U_a элемента a и окрестности V_b и U_b элемента b в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_a \cdot V_b \subseteq V$ и $U_b \cdot U_a \subseteq U$.

Так как $a, b \in [A]_{(G, \tau)}$, то $(V_a \cap U_a) \cap A \neq \emptyset$ и $(V_b \cap U_b) \cap A \neq \emptyset$. Если $a_1 \in (V_a \cap U_a) \cap A$ и $b_1 \in (V_b \cap U_b) \cap A$, то из коммутативности группы A следует, что $a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1$. Кроме того $a_1 \cdot b_1 \in V_a \cdot V_b \subseteq V$ и $a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1 \in U_b \cdot U_a \subseteq U$, и значит, $V \cap U \neq \emptyset$.

Получили противоречие с выбором окрестностей V и U .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.3. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, и A - нормальный делитель группы $G(\cdot)$, то и $[A]_{(G, \tau)}$ тоже будет нормальным делителем группы $G(\cdot)$.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме $[A]_{(G, \tau)}$ является подгруппой группы $G(\cdot)$.

Для завершения доказательства утверждения 1 осталось только проверить, что $g \cdot [A]_{(G, \tau)} \cdot g^{-1} \subseteq [A]_{(G, \tau)}$ для любого элемента $g \in G$.

Итак, пусть $g \in G$ и $a \in [A]_{(G, \tau)}$. Если V произвольная окрестность элемента $g \cdot a \cdot g^{-1}$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существуют такие окрестности $V_g, V_a, V_{g^{-1}}$ элементов g, a, g^{-1} , соответственно, что $V_g \cdot V_a \cdot V_{g^{-1}} \subseteq V$.

Так как $a \in [A]_{(G, \tau)}$, то $V_a \cap A \neq \emptyset$, и пусть $b \in V_a \cap A$. Тогда $g \cdot b \cdot g^{-1} \in V_g \cdot V_a \cdot V_{g^{-1}} \subseteq V$ и $g \cdot b \cdot g^{-1} \in g \cdot A \cdot g^{-1} \subseteq A$, и значит, $V \cap A \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности V элемента $g \cdot a \cdot g^{-1}$ следует, что $g \cdot a \cdot g^{-1} \in [A]_{(G, \tau)}$, а из произвольности элемента a следует, что $g \cdot [A]_{(G, \tau)} \cdot g^{-1} \subseteq [A]_{(G, \tau)}$ для любого элемента $g \in G$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.4. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа и $A(\cdot)$ - подгруппа группы $G(\cdot)$. Тогда $(A(\cdot), \tau|_A)$ (определение топологии $\tau|_A$ см. В.11) тоже будет топологической группой.

Топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ называется подгруппой топологической группы.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и V - окрестность элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$. Тогда существует такая окрестность U элемента $a \cdot b$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V = A \cap U$.

Так как $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, то существуют такие окрестности U_a и U_b элементов a и b , соответственно, в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_a \cdot U_b \subseteq U$. Тогда $V_a = U_a \cap A$ и $V_b = U_b \cap A$ будут окрестностями элементов a и b , соответственно, в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$, причём $V_a \cdot V_b = (U_a \cap A) \cdot (U_b \cap A) \subseteq (U_a \cdot U_b) \cap (A \cdot A) \subseteq U \cap A = V$.

Из произвольности окрестности V следует, что операция умножения в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$ является непрерывной.

Аналогично, если $a \in A$ и V - окрестность элемента a^{-1} в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$, то $V = U \cap A$ для некоторой окрестности U элемента a^{-1} в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, то существует такая окрестность U_a элемента a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_a^{-1} \subseteq U$. Тогда $V_a = U_a \cap A$ будет окрестностью элемента a в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$, причём $V_a^{-1} = (U_a \cap A)^{-1} \subseteq U_a^{-1} \cap A^{-1} \subseteq U \cap A = V$.

Из произвольности окрестности V следует, что и операция взятия обратного в топологическом пространстве $(A, \tau|_A)$ является непрерывной, и значит, $(A(\cdot), \tau|_A)$ является топологической группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.5. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, A - подгруппа в группе $G(\cdot)$ и $B \subseteq G$. Если B является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ (определение предкомпактности множества см. III.12), то $B \cap A$ будет предкомпактным множеством в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$.

Доказательство. Согласно замечанию III.13 множество $B \cap A$ будет предкомпактным в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Пусть теперь U произвольная окрестность единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$ и V такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U = A \cap V$. Так как $B \cap A$ является предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то согласно утверждению 5

теоремы III.13, существует такое конечное подмножество $S \subseteq A \cap B \subseteq A$, что $B \cap A \subseteq S \cdot V$ и $B \cap A \subseteq V \cdot S$.

Если теперь, $b \in B \cap A$, то $b = s \cdot v$, где $s \in S$ и $v \in V$. Тогда $v = s^{-1} \cdot b \in A^{-1} \cdot (B \cap A) \subseteq A$, и значит, $v \in V \cap A = U$, т.е. $b = s \cdot v \in S \cdot U$.

Аналогично, $b = v' \cdot s'$, где $s' \in S$ и $v' \in V$. Тогда $v' = b \cdot (s')^{-1} \in (B \cap A) \cdot A^{-1} \subseteq A$, и значит, $v' \in V \cap A = U$. Тогда $b = v' \cdot s' \in U \cdot S$.

Из произвольности элемента $b \in B \cap A$ следует, что $B \cap A \subseteq S \cdot U$ и $B \cap A \subseteq U \cdot S$, а из произвольности окрестности U в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$ следует, что множество $B \cap A$ является предкомпактным в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$.

Этим теорема полностью доказана.

Из определения III.12 и предыдущей теоремы следует:

Следствие VII.6. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является предкомпактной, то для любой подгруппы $A(\cdot)$ группы $G(\cdot)$ топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ тоже будет предкомпактной

Теорема VII.7. Если Z - центр группы $G(\cdot)$ (см. Б.5) и τ - такая групповая топология на группе $G(\cdot)$, что $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой, то Z является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Согласно Б.6, Z является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$.

Осталось проверить, что Z является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Допустим противное, т.е. что Z не является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда (см. В.9) $[Z]_{(G, \tau)} \neq Z$.

Если $b \in [Z]_{(G, \tau)} \setminus Z$, то существует такой элемент $g \in G$, что $b \cdot g \neq g \cdot b$. Так как $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой, то в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существуют такие окрестности V и U элементов $b \cdot g$ и $g \cdot b$, соответственно, что $V \cap U = \emptyset$.

Так как в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ операция умножения является непрерывной, то существуют такие окрестности W_1 и W_2 элемента b , что $W_1 \cdot g \subseteq V$ и $g \cdot W_2 \subseteq U$. Тогда $W_1 \cap W_2$ будет окрестностью элемента b в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и поскольку $b \in [Z]_{(G, \tau)}$, то $(W_1 \cap W_2) \cap Z \neq \emptyset$.

Если $c \in (W_1 \cap W_2) \cap Z$, то $c \cdot g = g \cdot c$. Тогда $c \cdot g \in W_1 \cdot g \subseteq V$ и $c \cdot g = g \cdot c \in g \cdot W_2 \subseteq U$, и значит, $V \cap U \neq \emptyset$.

Получили противоречие с выбором окрестностей V и U .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.8. Если $A(\cdot)$ - плотная (см. В.10) подгруппа в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и U - окрестность единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, то $[U]_{(G, \tau)}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Согласно (теореме В.12) существует такая окрестность V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U = V \cap A$.

Если V_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, то покажем, что $V_1 \subseteq [U]_{(G, \tau)}$.

В самом деле, пусть $x \in V_1$ и W - произвольная окрестность элемента x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $V_1 \cdot x$ будет окрестностью элемента x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $(V_1 \cdot x) \cap W$ будет окрестностью элемента x в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $A(\cdot)$ является плотной подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $[A]_{(G, \tau)} = G$, и значит, $((V_1 \cdot x) \cap W) \cap A \neq \emptyset$.

Если $c \in ((V_1 \cdot x) \cap W) \cap A$, то $c \in V_1 \cdot x \subseteq V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, и $c \in A$. Тогда $c \in V \cap A = U$. Так как $c \in W$, то $W \cap U \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности W следует, что $x \in [U]_{(G, \tau)}$, а из произвольности элемента x следует, что $V_1 \subseteq [U]_{(G, \tau)}$, и значит, $[U]_{(G, \tau)}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.9. Если A - плотная подгруппа в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп (из нормальных делителей), то и топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп (из нормальных делителей).

Доказательство. Пусть Ω - базис окрестностей единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, который состоит из подгрупп (нормальных делителей). Тогда согласно теоремам VII.1 и VII.3 $[V]_{(G, \tau)}$ является подгруппой (нормальным делителем) для любого подмножества $V \in \Omega$.

Если $\hat{\Omega} = \{[V]_{(G,\tau)} \mid V \in \Omega\}$, то согласно предыдущей теореме $\hat{\Omega}$ состоит из окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причём каждая из этих окрестностей является подгруппой (нормальным делителем) в группе $G(\cdot)$.

Кроме того, если U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и U_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U_1 \cdot U_1 \subseteq U$, то из утверждения 1 теоремы II.5. следует, что $[U_1]_{(G,\tau)} \subseteq U$.

Так как Ω - базис окрестностей единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, то существует такое множество $V \in \Omega$, что $V \subseteq U_1 \cap A$. Тогда $[V]_{(G,\tau)} \in \hat{\Omega}$ и $[V]_{(G,\tau)} \subseteq [U_1]_{(G,\tau)} \subseteq U$.

Из произвольности окрестности U следует, что $\hat{\Omega}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, который состоит из подгрупп (нормальных делителей) в группе $G(\cdot)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.10. Если пространство топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ является связным пространством (см. В.26) и U - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то группа $G(\cdot)$ порождается множеством U (см. Б.7).

Доказательство. Если $\hat{U}(\cdot)$ - подгруппа, порожденная множеством U , то $U \subseteq \hat{U}$, и значит, $\hat{U}$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда, согласно теореме III.8, $\hat{U}$ будет открытой подгруппой, а согласно теореме III.9, $\hat{U}$ будет замкнутой подгруппой, и значит, $\hat{U}$ является открыто-замкнутым подмножеством в связном пространстве (G, τ) . Так как $\hat{U} \neq \emptyset$, то $\hat{U} = G$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.11. Если в связной топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ задан такой нормальный делитель N , что $(N(\cdot), \tau|_N)$ является дискретной подгруппой, то N содержится в центре группы $G(\cdot)$.

Доказательство. Если $a \in N$, то из дискретности группы $(N(\cdot), \tau|_N)$ следует, что существует такая окрестность V элемента a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V \cap N = \{a\}$.

Так как $a = e^{-1} \cdot a \cdot e$, то существует такая окрестность U единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U^{-1} \cdot a \cdot U \subseteq V$. Тогда $u^{-1} \cdot a \cdot u \in V$ для любого элемента $u \in U$.

Так как N является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$, то $u^{-1} \cdot a \cdot u \in N$ для любого элемента $u \in U$, и значит, $u^{-1} \cdot a \cdot u \in N \cap V = \{a\}$. Тогда $u^{-1} \cdot a \cdot u = a$, и значит $a \cdot u = u \cdot a$ для любого элемента $u \in U$.

Согласно теореме II.4, существует такая симметричная окрестность W единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $W \subseteq U$.

Если теперь, $g \in G$, то (см. теорему VII.10) из связности топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ следует, что существуют такие элементы $u_1, \dots, u_n \in W \subseteq U$, что $u_1 \cdot \dots \cdot u_n = g$. Тогда $g \cdot a = u_1 \cdot \dots \cdot u_n \cdot a = u_1 \cdot \dots \cdot u_{n-1} \cdot a \cdot u_n = \dots = a \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_n = a \cdot g$

Из произвольности элементов $g \in G$ и $a \in N$ следует, что N содержится в центре группы $G(\cdot)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.12. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, и N - нормальный делитель группы $G(\cdot)$, то в группе $G(\cdot)$ существует такая групповая топология $\tau' \geq \tau$ (см. B.15), что N является открытым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$ и $\tau|_N = \tau'|_N$.

Доказательство. Если Δ - множество всех окрестностей единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то совокупность $\Delta' = \{V \cap N \mid V \in \Delta\}$ подмножеств группы $G(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1.

В самом деле, легко заметить, что для этой совокупности выполняются условия 1 – 4 теоремы V.1.

Пусть теперь g - произвольный элемент из группы $G(\cdot)$, и $V \cap N \in \Delta'$. Тогда для элемента g и окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $g \cdot U \cdot g^{-1} \subseteq V$. Так как N является нормальным делителем в группе $G(\cdot)$, то $g \cdot N \cdot g^{-1} \subseteq N$, и значит, $g \cdot (N \cap U) \cdot g^{-1} \subseteq N \cap (g \cdot U \cdot g^{-1}) \subseteq N \cap V$

Итак, мы проверили, что совокупность Δ' удовлетворяет всем условиям теоремы V.1, и значит, на группе $G(\cdot)$ существует, такая групповая топология τ' , что совокупность Δ' является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$.

Так как $U \cap N \subseteq N$ для любого множества $U \in \Delta$, то множество N является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$, и, согласно теореме III.8, N является открытым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$.

Проверим теперь, что $\tau' \geq \tau$.

Так как $U \cap N \subseteq U$, то любая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ будет окрестностью единицы и в топологической группе $(G(\cdot), \tau')$. Поскольку любая групповая топология единственным образом определяется любым базисом окрестностей единицы, то $\tau' \geq \tau$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $\tau|_N = \tau'|_N$.

Легко заметить, что совокупность $\Delta' = \{V \cap N \mid V \in \Delta\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(N(\cdot), \tau|_N)$, а совокупность $\{V \cap N \mid V \in \Delta'\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(N(\cdot), \tau'|_N)$. Так как $(U \cap N) \cap N = U \cap N$, то $\{U \cap N \mid U \in \Delta\} = \{U' \cap N \mid U' \in \Delta'\}$, и поскольку групповая топология единственным образом определяется любым базисом окрестностей единицы, то $\tau|_N = \tau'|_N$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VII.13. Если $A(\cdot)$ - подгруппа коммутативной группы $G(\cdot)$, то для любой групповой топологии τ , заданной на группе $A(\cdot)$, существует такая групповая топология $\hat{\tau}$ на группе $G(\cdot)$, что A является открытой подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \hat{\tau})$ и $\hat{\tau}|_A = \tau$.

Доказательство. Если Δ - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau)$, то совокупность Δ удовлетворяет условиям 1 – 4 замечания II.8. Тогда, совокупность Δ , рассмотренная как совокупность подмножеств группы $G(\cdot)$, удовлетворяет всем условиям следствия V.2, и значит, на группе $G(\cdot)$ существует такая групповая топология $\hat{\tau}$, что Δ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \hat{\tau})$.

Как и при доказательстве теоремы VII.12, доказывается, что $A(\cdot)$ является открытой подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \hat{\tau})$.

Так как $\{V \cap A \mid V \in \Delta\} = \Delta$ и эта совокупность является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, то, как и при доказательстве теоремы VII.12, доказывается, что $\hat{\tau}|_A = \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

VIII. ГОМОМОРФИЗМЫ И ФАКТОРГРУППА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ.

Определение VIII.1. Пусть (G, τ) и (G', τ') - топологические группы, и $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ - групповой гомоморфизм (см. Б.8). Тогда гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ называется:

VIII.1.1. *Непрерывным гомоморфизмом*, если отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является непрерывным отображением топологических пространств.

VIII.1.2. *Открытым гомоморфизмом*, если отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является открытым отображением топологических пространств.

VIII.1.3. *Топологическим гомоморфизмом*, если отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является открытым и непрерывным отображением топологических пространств.

VIII.1.4. *Непрерывным изоморфизмом*, если отображение $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ является изоморфизмом (см. Б.8) и отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является непрерывным отображением топологических пространств.

VIII.1.5. *Открытым изоморфизмом*, если отображение $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ является изоморфизмом и отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является открытым отображением топологических пространств.

VIII.1.6. *Топологическим изоморфизмом*, если отображение $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ является изоморфизмом и отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является непрерывным и открытым отображением топологических пространств, т.е. $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ является гомеоморфизмом.

Замечание VIII.2. Так как изоморфные алгебраические системы (группы, кольца, тела и т.д.) обладают одинаковыми алгебраическими свойствами, то в алгебре алгебраические системы изучаются с точностью до изоморфизма.

Аналогично, так как гомеоморфные пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами, то в общей топологии топологические пространства изучаются с точностью до гомеоморфности.

В топологической алгебре топологические группы, топологические кольца и т.д. изучаются с точностью до топологического изоморфизма, так как топологические группы, которые являются топологически изоморфными, обладают одинаковыми как топологическими, так и алгебраическими свойствами.

В топологической алгебре такие топологические группы иногда отождествляются.

Теорема VIII.3. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ и $(G'(\cdot), \tau')$ - топологические группы, и $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ - некоторый групповой гомоморфизм. Тогда верны следующие утверждения:

1. для непрерывности гомоморфизма $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ необходимо и достаточно его непрерывность в точке e ;
2. для открытости гомоморфизма $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ необходимо и достаточно, чтобы $f(V)$ было окрестностью единицы e' в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$ для любой окрестности V единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство.

Доказательство утверждения 1.

Так как непрерывное отображение является непрерывным в любой точке, то $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ будет непрерывным отображением и в точке e .

Этим необходимость доказана.

Пусть теперь, гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ будет непрерывным в точке e , и g - произвольный элемент из группы $G(\cdot)$.

Покажем, что отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (G', \tau')$ будет непрерывным и в точке g .

Если V' - произвольная окрестность точки $f(g)$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то, согласно теореме II.2, $(f(g))^{-1} \cdot V'$ будет окрестностью единицы e' в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Так как $f(e) = e'$ и гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным в точке e , то существует такая окрестность V единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $f(V) \subseteq (f(g))^{-1} \cdot V'$.

Тогда, согласно теореме II.1, $g \cdot V$ будет окрестностью точки g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причём $f(g \cdot V) = f(g) \cdot f(V) \subseteq f(g) \cdot (f(g))^{-1} \cdot V' = e' \cdot V' = V'$.

Из произвольности окрестности V' элемента $f(g)$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$ следует, что гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным в точке g , а из произвольности элемента g следует, что гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным.

Этим утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2.

Пусть V - произвольная окрестность единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и U - такое открытое множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $e \in U \subseteq V$. Так как отображение $f: (G, \tau) \rightarrow G'(G', \tau')$ является открытым отображением, то $f(U) \in \tau'$, причём $e' = f(e) \in f(U) \subseteq f(V)$, и значит, $f(V)$ является окрестностью единицы e' в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Этим необходимость доказана.

Пусть теперь, $V \in \tau$. Если $V = \emptyset$, то $f(V) = f(\emptyset) = \emptyset \in \tau'$.

Если же $V \neq \emptyset$, то V является окрестностью любой своей точки b . Согласно теореме II.2, $b^{-1} \cdot V$ будет окрестностью единицы e в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $f(b^{-1} \cdot V)$ будет окрестностью единицы e' в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$ для любого элемента $b \in V$.

Тогда, согласно теореме II.1, $f(b) \cdot f(b^{-1} \cdot V)$ будет окрестностью элемента $f(b)$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$ для любого элемента $b \in V$. Так как отображение $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ является гомоморфизмом, то $f(b) \cdot f(b^{-1} \cdot V) = f(b \cdot b^{-1} \cdot V) = f(V)$ для любого элемента $b \in V$.

Итак, мы доказали, что $f(V)$ является окрестностью элемента $f(b)$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, и значит, $f(V)$ является окрестностью любого элемента из множества $f(V)$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$. Тогда (см. В.6) $f(V) \in \tau'$.

Этим утверждение 2 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема VIII.4. Пусть $G(\cdot)$ и $\hat{G}(\cdot)$ - группы и $f: G \rightarrow \hat{G}$ - групповой гомоморфизм. Если $\hat{\tau}$ - некоторая групповая топология в группе $\hat{G}(\cdot)$ и τ - прообраз топологии $\hat{\tau}$ относительно отображения f (см. В. 25), то τ является групповой топологией в группе $G(\cdot)$.

Доказательство. Если $a, b \in G$ и V - окрестность элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) , то существует такое множество $W \in \tau$, что $a \cdot b \in W \subseteq V$, и значит, $W = f^{-1}(\hat{W})$ для некоторого $\hat{W} \in \hat{\tau}$.

Тогда $f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b) \in f(W) = f(f^{-1}(\hat{W})) \subseteq \hat{W}$. Так как $\hat{W} \in \hat{\tau}$, то $\hat{W}$ является окрестностью элемента $f(a) \cdot f(b)$, и поскольку $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является топологической группой, то существуют такие окрестности $\hat{U}_{f(a)}$ и $\hat{U}_{f(b)}$ элементов $f(a)$ и $f(b)$, соответственно, в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$,

что $\hat{U}_{f(a)} \cdot \hat{U}_{f(b)} \subseteq \hat{W}$, и существуют такие $\hat{V}_{f(a)} \in \hat{\tau}$ и $\hat{V}_{f(b)} \in \hat{\tau}$, что $f(a) \in \hat{V}_{f(a)} \subseteq \hat{U}_{f(a)}$ и $f(b) \in \hat{V}_{f(b)} \subseteq \hat{U}_{f(b)}$.

Тогда $V_a = f^{-1}(\hat{V}_{f(a)}) \in \tau$ и $V_b = f^{-1}(\hat{V}_{f(b)}) \in \tau$, причём $a \in f^{-1}(f(a)) \subseteq f^{-1}(\hat{V}_{f(a)})$ и $b \in f^{-1}(f(b)) \subseteq f^{-1}(\hat{V}_{f(b)})$. Так как $V_a \in \tau$ и $V_b \in \tau$, то множества V_a и V_b будут окрестностями точек a и b , соответственно, в топологическом пространстве (G, τ) , причём

$$V_a \cdot V_b = f^{-1}(\hat{V}_{f(a)}) \cdot f^{-1}(\hat{V}_{f(b)}) \subseteq f^{-1}(\hat{V}_{f(a)} \cdot \hat{V}_{f(b)}) \subseteq f^{-1}(\hat{U}_{f(a)} \cdot \hat{U}_{f(b)}) \subseteq f^{-1}(\hat{W}) = W \subseteq V.$$

Из произвольности элементов a и b , и произвольности окрестности V элемента $a \cdot b$ в топологическом пространстве (G, τ) следует, что в топологическом пространстве (G, τ) операция умножения является непрерывной.

Если теперь $a \in G$ и V - окрестность элемента a^{-1} в топологическом пространстве (G, τ) , то существует такое $W \in \tau$, что $a^{-1} \in W \subseteq V$. Тогда $W = f^{-1}(\hat{W})$ для некоторого $\hat{W} \in \hat{\tau}$.

Так как $f(a^{-1}) \in f(W) = f(f^{-1}(\hat{W})) \subseteq \hat{W}$ и $\hat{W} \in \hat{\tau}$, то $\hat{W}$ является окрестностью элемента $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$, и поскольку $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является топологической группой, то существует такая окрестность $\hat{U}_{f(a)}$ элемента $f(a)$, что $(\hat{U}_{f(a)})^{-1} \subseteq \hat{W}$, и существует такое множество $\hat{V}_{f(a)} \in \hat{\tau}$, что $f(a) \in \hat{V}_{f(a)} \subseteq \hat{U}_{f(a)}$.

Тогда $V_a = f^{-1}(\hat{V}_{f(a)}) \in \tau$, причём $a \in f^{-1}(f(a)) \subseteq f^{-1}(\hat{V}_{f(a)})$. Так как $V_a \in \tau$, то V_a будет окрестностью точки a в топологическом пространстве (G, τ) , причём $(V_a)^{-1} = (f^{-1}(\hat{V}_{f(a)}))^{-1} = f^{-1}((\hat{V}_{f(a)})^{-1}) \subseteq f^{-1}((\hat{U}_{f(a)})^{-1}) \subseteq f^{-1}(\hat{W}) = W \subseteq V$.

Из произвольности элемента a и произвольности окрестности V элемента a^{-1} в топологическом пространстве (G, τ) следует, что операция взятия обратного элемента является непрерывной, и значит, $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой.

Теорема VIII.5. Пусть $G(\cdot)$ и $\hat{G}(\cdot)$ - группы и $f: G(\cdot) \rightarrow \hat{G}(\cdot)$ - групповой гомоморфизм. Если $\hat{\tau}$ - групповая топология в группе $\hat{G}(\cdot)$ и τ - прообраз

топологии $\hat{\tau}$ относительно гомоморфизма f , то верны следующие утверждения:

1. гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является непрерывным;
2. если $f: G \rightarrow \hat{G}$ является сюръективным отображением, то $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ будет непрерывным и открытым гомоморфизмом;
3. если $f: G \rightarrow \hat{G}$ является сюръективным отображением, и $\hat{A}$ является предкомпактным множеством в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то $f^{-1}(\hat{A})$ будет предкомпактным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Если $a \in G$ и $\hat{V}$ - окрестность элемента $f(a)$ в топологическом пространстве $(\hat{G}, \hat{\tau})$, то существует такое множество $\hat{U} \in \hat{\tau}$, что $f(a) \in \hat{U} \subseteq \hat{V}$. Тогда $U = f^{-1}(\hat{U}) \in \tau$, причём $a \in f^{-1}(f(a)) \subseteq f^{-1}(\hat{U}) = U$.

Так как $U \in \tau$, то U будет окрестностью точки a в топологическом пространстве (G, τ) , причём $f(U) = f(f^{-1}(\hat{U})) \subseteq \hat{U} \subseteq \hat{V}$.

Из произвольности элемента a и произвольности окрестности $\hat{V}$ следует, что отображение $f: (G, \tau) \rightarrow (\hat{G}, \hat{\tau})$ является непрерывным.

Этим утверждение 1) доказано.

Пусть теперь $U \in \tau$. Тогда $U = f^{-1}(\hat{U})$ для некоторого $\hat{U} \in \hat{\tau}$. Так как $f: G \rightarrow \hat{G}$ является сюръективным отображением, то (см. А.8) $f(U) = f(f^{-1}(\hat{U})) = \hat{U} \in \hat{\tau}$.

Из произвольности множества U следует открытость отображения $f: (G, \tau) \rightarrow (\hat{G}, \hat{\tau})$.

Так как непрерывность отображения $f: (G, \tau) \rightarrow (\hat{G}, \hat{\tau})$ было доказано выше, то утверждение 2) доказано.

Пусть теперь $\hat{A}$ - предкомпактное множество в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ то существует такое множество $U \in \tau$, что $e \in U \subseteq V$. Тогда $U = f^{-1}(\hat{U})$ для некоторого $\hat{U} \in \hat{\tau}$.

Так как $\hat{e} = f(e) \in f(U) \subseteq f(f^{-1}(\hat{U})) \subseteq \hat{U}$, то $\hat{U}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Тогда, из предкомпактности множества $\hat{A}$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ следует, что существует такое конечное подмножество $\hat{S} \subseteq \hat{G}$, что $\hat{A} \subseteq \hat{S} \cdot \hat{U}$ и $\hat{A} \subseteq \hat{U} \cdot \hat{S}$.

Для каждого элемента $\hat{s} \in \hat{S}$ выберем такой элемент $s \in G$, что $f(s) = \hat{s}$ (это возможно ввиду сюръективности отображения $f: (G, \tau) \rightarrow (\hat{G}, \hat{\tau})$), и пусть S - множество всех выбранных элементов.

Тогда из утверждения 1 теоремы Б.12 следует, что $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\hat{A}) \subseteq f^{-1}(\hat{S} \cdot \hat{U}) = S \cdot f^{-1}(\hat{U}) = S \cdot U \subseteq S \cdot V$ и $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\hat{A}) \subseteq f^{-1}(\hat{U} \cdot \hat{S}) = f^{-1}(\hat{U}) \cdot S = U \cdot S \subseteq V \cdot S$.

Из конечности множества S и произвольности окрестности V следует предкомпактность множества A в топологической группе (G, τ) .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VIII.6. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, N - нормальный делитель в группе $G(\cdot)$, и $\bar{G} = G/N$ - факторгруппа группы $G(\cdot)$ по нормальному делителю N (см. Б.10). Если $f: G \rightarrow G/N$ - канонический гомоморфизм (см. Б.11) и Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то совокупность $\bar{\Omega} = \{f(U) \mid U \in \Omega\}$, удовлетворяет условиям теоремы V.1, и значит, является базисом окрестностей единицы $\bar{e}$ для некоторой групповой топологии $\bar{\tau}$ на группе $\bar{G}(\cdot)$.

Доказательство. Так как $\bar{e} = f(e) \in f(U)$ для любого $U \in \Omega$, то для совокупности $\bar{\Omega}$ выполняется условие 1 теоремы V.1.

Если $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2 \in \bar{\Omega}$, то существуют такие множества $U_1, U_2 \in \Omega$, что $\bar{U}_1 = f(U_1)$ и $\bar{U}_2 = f(U_2)$. Так как $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$ и $U_1 \cap U_2 \in \Omega$, то для совокупности $\bar{\Omega}$ выполняется условие 2 теоремы V.1

Пусть теперь $\bar{U}_1 \in \bar{\Omega}$ и $U_1 \in \Omega$ - такое подмножество, что $\bar{U}_1 = f(U_1)$. Так как $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой и Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое множество $U_2 \in \Omega$, что $U_2 \cdot U_2 \subseteq U_1$. Тогда $\bar{U}_2 = f(U_2) \in \bar{\Omega}$ и $\bar{U}_2 \cdot \bar{U}_2 = f(U_2) \cdot f(U_2) = f(U_2 \cdot U_2) \subseteq f(U_1) = \bar{U}_1$, и значит, для совокупности $\bar{\Omega}$ выполняется и условие 3 теоремы V.1.

Пусть теперь $\bar{U}_1 \in \bar{\Omega}$ и U_1 - такое множество из совокупности Ω , что $\bar{U}_1 = f(U_1)$. Так как Ω является множеством всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое $U_2 \in \Omega$, что $U_2^{-1} \subseteq U_1$.

Тогда $\bar{U}_2 = f(U_2) \in \bar{\Omega}$ и $\bar{U}_2^{-1} = (f(U_2))^{-1} = f(U_2^{-1}) \subseteq f(U_1) = \bar{U}_1$, и значит, для совокупности $\bar{\Omega}$ выполняется и условие 4 теоремы V.1.

Пусть теперь $\bar{U}_1 \in \bar{\Omega}$ и $\bar{g} \in \bar{G}$. Тогда существуют такое множество $U_1 \in \Omega$ и такой элемент $g \in G$, что $\bar{U}_1 = f(U_1)$ и $\bar{g} = f(g)$.

Так как $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа и Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность $U_2 \in \Omega$, что $g \cdot U_2 \cdot g^{-1} \subseteq U_1$. Тогда $\bar{U}_2 = f(U_2) \in \bar{\Omega}$ и $\bar{g} \cdot \bar{U}_2 \cdot \bar{g}^{-1} = f(g) \cdot f(U_2) \cdot (f(g))^{-1} = f(g \cdot U_2 \cdot g^{-1}) \subseteq f(U_1) = \bar{U}_1$, и значит, для совокупности $\bar{\Omega}$ выполняется условие 5 теоремы V.1.

Итак, мы доказали, что совокупность $\bar{\Omega}$ является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии $\bar{\tau}$ в группе $\bar{G}(\cdot)$.

Определение VIII.7. Пусть N - нормальный делитель в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и $\bar{G}(\cdot) = G(\cdot)/N$ - факторгруппа группы $G(\cdot)$ по нормальному делителю N (см. Б.10). Если $f: G(\cdot) \rightarrow G(\cdot)/N$ - канонический гомоморфизм (см. Б.11), и $\bar{\tau}$ - топология, определенная согласно теореме VIII.6, то топологическая группа $(\bar{G}(\cdot), \bar{\tau})$ называется *факторгруппой топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ по нормальному делителю N* , и ее будем обозначить $(G(\cdot), \tau)/N$.

Теорема VIII.8. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, N - нормальный делитель в группе $G(\cdot)$, и $(G(\cdot), \tau)/N$ - факторгруппа топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ по нормальному делителю N . Тогда верны следующие утверждения:

1. канонический гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$ является непрерывным и открытым гомоморфизмом;

2. если Ω - базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $\bar{\Omega} = \{f(V) | V \in \Omega\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$;

3. если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп (нормальных делителей), то и топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/N$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп (нормальных делителей).

4. если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является локально-компактной группой, то и топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/N$ будет локально-компактной группой.

Доказательство. Пусть $g \in G$ и $\bar{U}$ - произвольная окрестность элемента $\bar{g} = f(g)$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$.

Так как $(G(\cdot), \tau)/N$ является топологической группой, то по теореме II.2, $(\bar{g})^{-1} \cdot \bar{U}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, и значит, существует такая окрестность V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $f(V) \subseteq (\bar{g})^{-1} \cdot \bar{U}$ (см. теорему VIII.6). Тогда (см. теорему II.1) $g \cdot V$ будет окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причем $f(g \cdot V) = f(g) \cdot f(V) \subseteq \bar{g} \cdot (\bar{g})^{-1} \cdot \bar{U} = \bar{U}$.

Из произвольности элемента g и окрестности $\bar{U}$ следует непрерывность гомоморфизма $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$.

Пусть теперь $U \in \tau$.

Если $U = \emptyset$, то $f(U) = \emptyset \in \bar{\tau}$.

Если же $U \neq \emptyset$ и $g \in U$, то U является окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $g^{-1} \cdot U$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда (см. теорему VIII.6) $f(g^{-1} \cdot U)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$.

Тогда множество $f(g) \cdot f(g^{-1} \cdot U)$ будет окрестностью элемента $f(g)$ в $(G(\cdot), \tau)/N$, причем $f(g) \cdot f(g^{-1} \cdot U) = f(g) \cdot f(g^{-1}) \cdot f(U) = f(U)$.

Итак, мы доказали, что для любого элемента $g \in U$ множество $f(U)$ является окрестностью элемента $f(g)$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$.

Так как $f(U) = \{f(g) | g \in U\}$, то $f(U)$ является окрестностью любого своего элемента, и значит, $f(U) \in \bar{\tau}$.

Этим утверждение 1 доказано.

Пусть теперь Ω - базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $f(V)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$ для любого множества $V \in \Omega$.

Кроме того, если $\bar{U}$ - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, то $\bar{U} = f(U)$ для окрестности $U = f^{-1}(\bar{U})$ единицы в топологической группы $(G(\cdot), \tau)$.

Так как Ω является базисом окрестностей единицы в $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое множество $V \in \Omega$, что $V \subseteq U$. Тогда $f(V) \in \bar{\Omega}$ и $f(V) \subseteq \bar{U}$, и значит, $\bar{\Omega}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$.

Этим утверждение 2 доказано.

Пусть теперь топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом Ω окрестностей единицы, который состоит из подгрупп (нормальных делителей).

Так как при сюръективном гомоморфизме гомоморфный образ подгруппы (нормального делителя) является подгруппой (нормальным делителем), то из предыдущего утверждения следует верность утверждения 3.

Если теперь V - компактная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $f(V)$ будет компактным множеством, как непрерывный образ компактного множества и является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$.

Итак, мы доказали, что в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$ единица обладает компактной окрестностью.

Так как $\bar{g} \cdot f(V)$ является окрестностью элемента $\bar{g}$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$ и $\bar{g} \cdot f(V)$, как непрерывный образ компактного множества является компактным множеством, то в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$ всякий элемент обладает компактной окрестностью, т.е. топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/N$ является локально-компактной.

Этим утверждение 4 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема VIII.9. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, и N - нормальный делитель в группе $G(\cdot)$, то факторгруппа $(G(\cdot), \tau)/N$ топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ по нормальному делителю N является отделимой тогда и только тогда, когда N является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Пусть N является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Если Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно утверждению 1 теоремы II.5, $N = [N]_{(G, \tau)} = \bigcap_{V \in \Omega} N \cdot V$.

Так как $f^{-1}(f(V \cdot N)) = V \cdot N \cdot N = V \cdot N$ для любого множества $V \in \Omega$, то согласно предложению A.8, $f\left(\bigcap_{V \in \Omega} N \cdot V\right) = \bigcap_{V \in \Omega} f(N \cdot V)$. Тогда $\{\bar{e}\} = f(N) = \bigcap_{V \in \Omega} f(N \cdot V) = \bigcap_{V \in \Omega} (f(N) \cdot f(V)) = \bigcap_{V \in \Omega} \bar{e} \cdot f(V) = \bigcap_{V \in \Omega} f(V)$.

Так как $\{f(V) \mid V \in \Omega\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, то, согласно утверждению 5 теоремы IV.1, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/N$ будет отделимой.

Пусть теперь топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/N$ является отделимой топологической группой, т.е. топологическое пространство $(G(\cdot), \tau)/N$ является T_1 - пространством. Тогда, согласно теореме В.23, всякое одноэлементное множество в нём является замкнутым. В частности, $\{e\}$ будет замкнутым множеством.

Так как канонический гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$ является непрерывным отображением, то $N = f^{-1}(\{e\})$ будет замкнутым множеством, как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VIII.10. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ и $(G'(\cdot), \tau')$ - топологические группы, N - нормальный делитель группы $G(\cdot)$ и $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ - такой групповой гомоморфизм, что $N \subseteq \{g \in G \mid f(g) = e'\}$. Если $\omega: G \rightarrow G/N$ - канонический гомоморфизм и $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ - такой гомоморфизм, что $f(g) = \varphi(\omega(g))$ для любого $g \in G$, то верны следующие утверждения:

1. Гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным тогда и только тогда, когда $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным гомоморфизмом.

2. Гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым тогда и только тогда, когда $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым гомоморфизмом.

3. Гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является топологическим тогда и только тогда, когда $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является топологическим гомоморфизмом.

Доказательство. Пусть гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным, и пусть $g \in G$. Если U' - произвольная окрестность элемента $f(g)$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то из непрерывности гомоморфизма $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ и того, что $f(g) = \varphi(\omega(g))$ следует, что существует такая окрестность $\bar{V}$ элемента $\omega(g)$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, что $\varphi(\bar{V}) \subseteq U'$.

Из непрерывности гомоморфизма $\omega: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$ следует, что $\omega^{-1}(\bar{V})$ будет окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, причём $f(\omega^{-1}(\bar{V})) = \varphi(\omega(\omega^{-1}(\bar{V}))) \subseteq \varphi(\bar{V}) \subseteq U'$.

Из произвольности элемента g и произвольности окрестности U' следует, что гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным.

Пусть теперь гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ будет непрерывным, и пусть $\bar{g} \in G/N$, и U' - произвольная окрестность элемента $\varphi(\bar{g})$ в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$. Если $g \in G$ такой элемент, что $\omega(g) = \bar{g}$, то из непрерывности гомоморфизма $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ и из того, что $f(g) = \varphi(\omega(g))$ следует, что $f^{-1}(U')$ будет окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, существует такое множество $W \in \tau$, что $g \in W \subseteq f^{-1}(U')$.

Так как гомоморфизм $\omega: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$ является открытым, то множество $\omega(W)$ будет открытым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, и. так как $\bar{g} = \omega(g) \in \omega(W)$, то $\omega(W)$ будет окрестностью элемента $\bar{g}$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, причём, $\varphi(\omega(W)) = f(W) \subseteq f(f^{-1}(U')) \subseteq U'$.

Из произвольности элемента $\bar{g}$ и окрестности U' следует, что гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным.

Этим утверждение 1. доказано.

Пусть гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau)/N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым, и пусть $U \in \tau$. Так как канонический гомоморфизм $\omega: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$ является открытым гомоморфизмом, то множество $\omega(U)$ будет открытым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$. Тогда $f(U) = \varphi(\omega(U)) \in \tau'$.

Из произвольности множества U следует, что гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым.

Если теперь гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым, и $\bar{U}$ - открытое множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$, то из непрерывности канонического гомоморфизма $\omega: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/N$ следует, что $U = \omega^{-1}(\bar{U}) \in \tau$.

Так как отображение $\omega: G \rightarrow G/N$ является сюръективным, то $\omega(\omega^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$. Тогда $\varphi(\bar{U}) = \varphi(\omega(\omega^{-1}(\bar{U}))) = f(\omega^{-1}(\bar{U})) = f(U)$, и поскольку гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым, то $\varphi(\bar{U}) = f(U) \in \tau'$.

Из произвольности множества $\overline{U}$ следует, что гомоморфизм $\varphi: (G(\cdot), \tau) / N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является открытым.

Этим утверждение 2 доказано.

Утверждение 3 является следствием утверждений 1 и 2, и значит, теорема полностью доказана.

Следствие VIII.11. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ и $(G'(\cdot), \tau')$ - топологические группы. Если $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ - сюръективный, топологический, групповой гомоморфизм и $N = \ker f = \{g \in G \mid f(g) = e'\}$, то топологические группы $(G(\cdot), \tau) / N$ и $(G'(\cdot), \tau')$ являются топологически изоморфными.

В самом деле, если $\omega: G(\cdot) \rightarrow G(\cdot) / N$ - канонический гомоморфизм, то существует такой изоморфизм $\varphi: G(\cdot) / N \rightarrow G'(\cdot)$, что $f(g) = \varphi(\omega(g))$ для любого $g \in G$ (см. Б.13). Тогда, согласно предыдущей теореме, $\varphi: (G(\cdot), \tau) / N \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является топологическим изоморфизмом.

Теорема VIII.12. Пусть $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, N и A - такие нормальные делители в группе $G(\cdot)$, что $N \subseteq A$, и $\omega: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ - канонический гомоморфизм. Тогда топологические группы $(G(\cdot), \tau) / A$ и $((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$ будут топологически изоморфными.

Доказательство. Согласно теореме VIII.8, канонические гомоморфизмы $\varpi: (G(\cdot), \tau) / N \rightarrow ((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$ и $\omega: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ будут топологическими гомоморфизмами.

Если $\hat{\omega}: G(\cdot) \rightarrow ((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$ является таким отображением, что $\hat{\omega}(g) = \varpi(\omega(g))$ для любого $g \in G$, то $\hat{\omega}: G(\cdot) \rightarrow ((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$ является топологическим гомоморфизмом, как суперпозиция топологических гомоморфизмов.

Если $\bar{e}$ - единица в группе $((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$, то $A = \{g \in G \mid \varpi(\omega(g)) = \bar{e}\}$, и $\hat{\omega}: G(\cdot) \rightarrow ((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$ является сюръективным гомоморфизмом. Тогда, согласно следствию VIII.11, топологические группы $(G(\cdot), \tau) / A$ и $((G(\cdot), \tau) / N) / (\omega(A))$ являются топологически изоморфными группами.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VIII.13. Пусть в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ заданы нормальный делитель N и подмножество B . Если $f: G(\cdot) \rightarrow G(\cdot) / N$ - канонический гомоморфизм, то множество $f(B)$ будет замкнутым в

топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$ тогда и только тогда, когда $N \cdot B$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Если B - такое множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $N \cdot B$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $U = G \setminus (N \cdot B) \in \tau$ и $N \cdot U = U$. Согласно утверждению 1 теоремы VIII.8, $f(U)$ будет открытым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$.

Так как $f^{-1}(f(B)) = N \cdot B = B$ и $f^{-1}(f(U)) = N \cdot U = U$, то $f^{-1}(f(B)) \cap f^{-1}(f(U)) = B \cap U = \emptyset$, и значит, $f(B) \cap f(U) = \emptyset$.

Кроме того, $f(f^{-1}(f(B))) = f(B)$ и $f(f^{-1}(f(U))) = f(U)$, причём, $f(B) \cup f(U) = f(B \cup U) = f(G) = G / N$. Тогда $f(B) = (G / N) \setminus f(U)$, и значит, $f(B)$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$.

Пусть теперь B - такое подмножество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $f(B)$ является замкнутым подмножеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$.

Так как гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ является непрерывным гомоморфизмом, то $f^{-1}(f(B))$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $N \cdot B = f^{-1}(f(B))$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Следствие VIII.14. Если N является компактным нормальным делителем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то канонический гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ является замкнутым отображением (см. В.24).

В самом деле, если B - замкнутое множество в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, по теореме III.6, множество $N \cdot B$ является замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда, согласно предыдущей теореме, множество $f(B)$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$.

Из произвольности множества B следует, что отображение $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ является замкнутым отображением.

Замечание VIII.15. Построим пример топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, нормального делителя N в группе $G(\cdot)$ и замкнутого множества A , который покажет, что требование в следствии VIII.14, чтобы N был компактным нормальным делителем, являются существенными.

Пусть $(R(+), \tau_{\text{инт}})$ - аддитивная группа действительных чисел с интервальной топологией $\tau_{\text{инт}}$. Рассмотрим подгруппу $Z(+)$ целых чисел и множество $A = \left\{ k + \frac{1}{k} \mid k = 2, 3, \dots \right\}$.

Так как $R(+)$ является коммутативной группой, то Z будет нормальным делителем в группе $R(+)$.

В примере III.5 было показано, что A является замкнутым множеством в топологической группе $(R(+), \tau_{\text{инт}})$, а множество $Z + A$ не является замкнутым множеством в топологической группе $(R(+), \tau_{\text{инт}})$.

Тогда, если $f: R(+) \rightarrow R(+)/Z$ - канонический гомоморфизм, то, согласно теореме VIII.13, множество $f(A)$ не будет замкнутым множеством в топологической группе $(R(+), \tau_{\text{инт}})/Z$.

Теорема VIII.16. Пусть:

- $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа;
- N - нормальный делитель в группе $G(\cdot)$;
- $B(\cdot)$ - подгруппа группы $G(\cdot)$;
- $(G(\cdot)/N, \bar{\tau}) = (G(\cdot), \tau)/N$, и $f: G(\cdot) \rightarrow G(\cdot)/N$ - канонический гомоморфизм.

Если $\bar{B} = f(B)$ и $\varpi: B(\cdot)/(B \cap N) \rightarrow \bar{B}$ - естественный изоморфизм (см. Б.15), то верны следующие утверждения:

1. изоморфизм $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B)/(B \cap N) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является непрерывным;
2. если $N \subseteq B$, то $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B)/(B \cap N) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является топологическим изоморфизмом;
3. если $B(\cdot)$ - замкнутая подгруппа в $(G(\cdot), \tau)$ и, N - компактный нормальный делитель, то $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B)/(B \cap N) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является топологическим изоморфизмом.
4. если Ω - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $N \subseteq \bigcap_{V \in \Omega} V$, то изоморфизм $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B)/(B \cap N) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является топологическим изоморфизмом.

Доказательство. Если $\omega: B(\cdot) \rightarrow B(\cdot)/(B \cap N)$ - канонический гомоморфизм, то $f(b) = \varpi(\omega(b))$ для любого элемента $b \in B$.

Тогда, согласно теореме VIII.8, гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ будет непрерывным гомоморфизмом, и значит, гомоморфизм $f|_B: (B(\cdot), \tau|_B) \rightarrow (f(B, \tau|_B)) = (\bar{B}, \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ тоже будет непрерывным гомоморфизмом, как сужение непрерывного отображения.

Если $\bar{e}$ - единица группы $G(\cdot) / N$, то $B \cap N = \{g \in B \mid f(g) = \bar{e}\}$. Тогда из утверждения 1 теоремы VIII.10 следует, что $\varpi: (B, \tau|_B) / (B \cap N) \rightarrow (\bar{B}, \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ будет непрерывным изоморфизмом.

Этим утверждение 1 доказано.

Если теперь $N \subseteq B$, то $B \cap N = N$, и значит, $B / (B \cap N) = B / N = \bar{B}$. Тогда $\omega = f|_B$ и канонический гомоморфизм $\varpi: B / N \rightarrow \bar{B}$ будет тождественным отображением.

Покажем, что изоморфизм $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является открытым.

Так как $f(b) = \omega(b) = \varpi(\omega(b))$ для любого элемента $b \in B$, то согласно утверждению 2 теоремы VIII.10, достаточно доказать, что гомоморфизм $f|_B: (B(\cdot), \tau|_B) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является открытым отображением.

Если $U \in \tau|_B$, то $U = B \cap V$ для некоторого множества $V \in \tau$. Тогда, согласно утверждению 1 теоремы VIII.8, множество $f(V) \in \bar{\tau}$, причем $f(V \cap B) \subseteq f(V) \cap f(B) = f(V) \cap \bar{B}$.

Кроме того, если $\bar{g} \in f(V) \cap \bar{B}$ то существуют такие элементы $g \in G$ и $g_1 \in V$, что $f(g) = \bar{g} = f(g_1)$. Так как $N \subseteq B$, то $g_1 \in g \cdot N \subseteq B \cdot N \subseteq B \cdot B = B$, и значит, $g_1 \in V \cap B$. Тогда $\bar{g} = f(g_1) \in f(V \cap B)$.

Из произвольности элемента $\bar{g}$ следует, что $f(V) \cap \bar{B} \subseteq f(V \cap B)$, и значит, $f(V) \cap \bar{B} = f(V \cap B) = f(U)$. Так как $f(V) \cap \bar{B} \in \bar{\tau}$, то $f(U) \in \bar{\tau}$.

Поскольку $f|_B(U) = f(U)$, то $f|_B(U) \in \bar{\tau}$.

Из произвольности множества U следует, что $f|_B: (B(\cdot), \tau|_B) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является открытым гомоморфизмом, и значит, $\varpi: (B, \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}, \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ будет открытым изоморфизмом.

Тогда, согласно утверждению 1, $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ будет непрерывным изоморфизмом, и значит, $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ будет топологическим изоморфизмом.

Этим утверждение 2 доказано.

Пусть теперь $B(\cdot)$ является замкнутой подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и N является компактным нормальным делителем. Так как,

согласно утверждению 1, $\varpi : (B(\cdot), \tau|_B) / (N \cap B) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является непрерывным изоморфизмом, то достаточно показать, что изоморфизм $\varpi : (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является открытым отображением.

Поскольку $\varpi(B \setminus \bar{U}) = \varpi(B) \setminus \varpi(\bar{U})$ для любого подмножества $\bar{U} \subseteq B / (N \cap B)$, то достаточно доказать, что отображение $\varpi : (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является замкнутым отображением.

Итак, пусть $\bar{F}$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(B(\cdot), \tau|_B) / N$. Тогда, из непрерывности канонического гомоморфизма $\omega : B(\cdot) \rightarrow B(\cdot) / (B \cap N)$ следует, что $F = \omega^{-1}(\bar{F})$ является замкнутым множеством в топологической группе $(B(\cdot), \tau|_B)$, а из замкнутости подгруппы B в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ следует, что множество $F = \omega^{-1}(\bar{F})$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Тогда, согласно следствию VIII.14, $f(F)$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$, и значит, $f(F)$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$. Кроме того, так как $f(F) = f(\omega^{-1}(\bar{F})) = \varpi(\bar{F})$, то $\bar{\omega}(\bar{F})$ будет замкнутым множеством в топологической группе $(\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$.

Из произвольности множества $\bar{F}$ следует, что изоморфизм $\varpi : (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является замкнутым отображением.

Этим утверждение 3 доказано.

Пусть теперь $N \subseteq \bigcap_{V \in \Omega} V$. Так как, согласно утверждению 1, изоморфизм $\varpi : (B(\cdot), \tau|_B) / N \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является непрерывным, то осталось проверить, что он является и открытым, а согласно утверждению 2 теоремы VIII.10, достаточно проверить, что гомоморфизм $f|_B : (B(\cdot), \tau|_B) \rightarrow (\bar{B}(\cdot), \bar{\tau}|_{\bar{B}})$ является открытым гомоморфизмом.

Итак, пусть U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(B(\cdot), \tau|_B)$, и пусть V - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U = B \cap V$. Если V_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, то $V \supseteq V_1 \cdot V_1 \supseteq N \cdot V_1 = f^{-1}(f(V_1))$.

Тогда, из предложения A.8 следует, что $f(U) = f(V \cap B) \supseteq f(B \cap f^{-1}(f(V_1))) = f(B) \cap f(V_1) = \bar{B} \cap f(V_1)$. Так как $f(V_1)$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$, то $\bar{B} \cap f(V_1)$

будет окрестностью единицы в топологической группе $(\overline{B}(\cdot), \overline{\tau}|_{\overline{B}})$, и значит, множество $f(U)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\overline{B}(\cdot), \overline{\tau}|_{\overline{B}})$.

Тогда из произвольности окрестности U и утверждения 2 теоремы VIII.3 следует, что гомоморфизм $f|_B: (B(\cdot), \tau|_B) \rightarrow (\overline{B}(\cdot), \overline{\tau}|_{\overline{B}})$ будет открытым гомоморфизмом.

Этим доказано утверждение 4, и значит, теорема полностью доказана.

Замечание VIII.17. Позже (см. теорему IX.9) будет показано, что в общем случае изоморфизм $\varpi: (B(\cdot), \tau|_B)/(B \cap N) \rightarrow (\overline{B}(\cdot), \overline{\tau}|_{\overline{B}})$ другими свойствами кроме непрерывности не обладает.

Теорема VIII.18. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, существует такой нормальный делитель N группы $G(\cdot)$, который является связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $(G(\cdot), \tau)/N$ является связной группой, то и топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ будет связной группой.

Доказательство. Допустим противное, т.е., что топологическая группа (G, τ) не является связной группой и пусть U - такое открыто-замкнутое множество в топологической группе (G, τ) , что $U \neq \emptyset$ и $U \neq G$.

Покажем вначале, что $N \cdot U \subseteq U$. В самом деле, для любого элемента $g \in U$ множество $N \cdot g = R_g(N)$, как непрерывный образ (см. теорему I.3) связанного множества, будет связным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $g = e \cdot g \in N \cdot g \cap U$. Так как U является открыто-замкнутым множеством, то (см. теорему В. 31) $N \cdot g \subseteq U$. Из произвольности элемента g следует, что $N \cdot U \subseteq U$, и значит, $N \cdot U = U$.

Тогда, согласно утверждению 1 теоремы VIII.8 и теоремы VIII.13, множество $f(U)$ будет открыто-замкнутым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/N$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/N$ является связной группой и $f(U) \neq \emptyset$, то $f(U) = G/N$. Тогда $U = N \cdot U = f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(G/N) = G$. Получили противоречие с выбором множества U .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема VIII.19. Если C - связная компонента единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/C$ является вполне несвязной группой.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/C$ не является вполне несвязной группой. Тогда в топологической

группе $(G(\cdot), \tau)/C$ имеется связное множество, которое содержит больше чем один элемент.

Если $\bar{C}$ - связная компонента единицы $\bar{e}$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/C$, то из теоремы III.11 следует, что $\bar{C} \neq \{\bar{e}\}$, и значит, $C \subset D = f^{-1}(\bar{C})$, где $f: G(\cdot) \rightarrow G(\cdot)/C$ - канонический гомоморфизм.

Так как, согласно утверждению 2 теоремы VIII.16, топологические группы $(D(\cdot), \tau|_D)/C$ и $(\bar{C}(\cdot), \tau|_{\bar{C}})$ являются топологически изоморфными, то топологическая группа $(D(\cdot), \tau|_D)/C$ будет связной.

Тогда, согласно предыдущей теореме, топологическая группа $(D(\cdot), \tau|_D)$ является связной, и значит, D будет связным множеством в топологической группе (G, τ) , причем $C \subset D$.

Получили противоречие с тем, что C является связной компонентой единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

IX. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Теорема IX.1. Пусть дана некоторая совокупность $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп, $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямое произведение совокупности $\{G_\delta(\cdot) \mid \delta \in \Delta\}$ групп (см. Б.17) и $\hat{\tau}$ - топология произведения $\prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta, \tau_\delta)$ совокупности $\{(G_\delta, \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических пространств (см. В.42). Тогда верны следующие утверждения:

1. $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является топологической группой (эту группу будем обозначать $\prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$)
2. проекция $\pi_{\delta_0} : \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \rightarrow (G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})$ является сюръективным, топологическим (см. VIII.1) гомоморфизмом для каждого элемента $\delta_0 \in \Delta$.

Доказательство. Согласно Б.16, $\hat{G}(\cdot)$ является группой и для каждого $\delta_0 \in \Delta$ проекция $\pi_{\delta_0} : \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \rightarrow (G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})$ является сюръективным, групповым гомоморфизмом. Так как $(G_{\delta_0}(\cdot))$ является топологической группой и $\hat{\tau}_{\delta_0}$ является прообразом топологии τ_{δ_0} относительно гомоморфизма $\pi_{\delta_0} : \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$, то, согласно теореме VIII.4, $\hat{\tau}_{\delta_0}$ будет групповой топологией на группе $\hat{G}(\cdot)$ для каждого элемента $\delta_0 \in \Delta$. Тогда, согласно теореме I.6, $\hat{\tau} = \sup \{\hat{\tau}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ будет групповой топологией на группе $\hat{G}(\cdot)$ причем, (см. В.43), $\pi_{\delta_0} : \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta, \tau_\delta) \rightarrow (G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})$ будет открытым и непрерывным отображением.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IX.2. Пусть дана некоторая совокупность $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп, и $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямое произведение совокупности $\{G_\delta(\cdot) \mid \delta \in \Delta\}$ групп (см. Б.16). Если $\hat{\tau}_\rho$ - прообраз топологии τ_ρ относительно гомоморфизма $\pi_\rho : \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot) \rightarrow G_\rho(\cdot)$ и B_ρ - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_\rho)$ то совокупность B всех множеств вида $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho$, где $\hat{U}_\rho \in B_\rho$ является базисом окрестностей единицы для некоторой групповой топологии $\tilde{\tau}$ на группе $\hat{G}(\cdot)$, причем для

каждого $\delta_0 \in \Delta$ проекция $\pi_{\delta_0} : (\hat{G}, \tilde{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})$ будет сюръективным, топологическим (см. VIII.1) гомоморфизмом.

Доказательство. Если $\hat{e}$ - единица в группе $\hat{G}(\cdot)$, то $\hat{e} \in \hat{U}_\rho$ для любого $\rho \in \Delta$. Тогда $\hat{e} \in \bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho$, и значит, совокупность В удовлетворяет условию 1 теоремы V.1.

Если $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho \in B$ и $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \in B$, то $\bigcap_{\rho \in \Delta} (U_\rho \cap \hat{V}_\rho) \subseteq \left(\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho \right) \cap \left(\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \right)$ и $\bigcap_{\rho \in \Delta} (U_\rho \cap \hat{V}_\rho) \in B$, и значит, совокупность В удовлетворяет условию 2 теоремы V.1.

Если $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho \in B$, то для каждого $\rho \in \Delta$ существует такое множество $\hat{V}_\rho \in B_\rho$, что $\hat{V}_\rho \cdot \hat{V}_\rho \subseteq \hat{U}_\rho$. Тогда $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \in B$ и $\left(\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \right) \cdot \left(\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \right) \subseteq \bigcap_{\rho \in \Delta} (\hat{V}_\rho \cdot \hat{V}_\rho) \subseteq \bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho$, и значит, совокупность В удовлетворяет условию 3 теоремы V.1.

Аналогично, если $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho \in B$, то для каждого $\rho \in \Delta$ существует такое множество $\hat{V}_\rho \in B_\rho$, что $(\hat{V}_\rho)^{-1} \subseteq \hat{U}_\rho$. Тогда $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \in B$ и $\left(\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \right)^{-1} \subseteq \bigcap_{\rho \in \Delta} (\hat{V}_\rho)^{-1} \subseteq \bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho$, и значит, совокупность В удовлетворяет условию 4 теоремы V.1.

Если теперь $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho \in B$ и $\hat{g} \in \hat{G}$, то для каждого $\rho \in \Delta$ существует такое множество $\hat{V}_\rho \in B_\rho$, что $\hat{g} \cdot \hat{V}_\rho \cdot \hat{g}^{-1} \subseteq \hat{U}_\rho$. Тогда $\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \in B$ и $\hat{g} \cdot \left(\bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{V}_\rho \right) \cdot \hat{g}^{-1} \subseteq \bigcap_{\rho \in \Delta} (\hat{g} \cdot \hat{V}_\rho \cdot \hat{g}^{-1}) \subseteq \bigcap_{\rho \in \Delta} \hat{U}_\rho$, и значит, совокупность В удовлетворяет и условию 5 теоремы V.1.

Итак, мы доказали, что совокупность В удовлетворяет всем условиям теоремы V.1, и значит, она задает на группе $\hat{G}(\cdot)$ некоторую групповую топологию $\tilde{\tau}$, являясь базисом окрестностей единицы.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что проекция $\pi_{\delta_0} : (\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ является сюръективным, топологическим гомоморфизмом для любого элемента $\delta_0 \in \Delta$.

Если $\hat{\tau}$ - топология прямого произведения топологических пространств, то, согласно теореме IX.1, проекция $\pi_{\delta_0} : (\hat{G}, \hat{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})$ является сюръективным, топологическим гомоморфизмом для любого $\delta_0 \in \Delta$.

Так как любая окрестность единицы топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является окрестностью единицы топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, то из непрерывности гомоморфизма $\pi_{\delta_0} : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ следует непрерывность гомоморфизма $\pi_{\delta_0} : (\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ для любого элемента $\delta_0 \in \Delta$.

Пусть теперь $\tilde{U} = \bigcap_{\delta \in \Delta} \hat{U}_\delta \in B$. Тогда $U_\delta = \pi_\delta(\hat{U}_\delta)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ для любого элемента $\delta \in \Delta$. Если $g_{\delta_0} \in U_{\delta_0}$ и $\hat{g} \in \hat{G}$ - такой элемент, что $\pi_{\delta_0}(\hat{g}) = g_{\delta_0}$ и $\pi_\delta(\hat{g}) = e_\delta$ для любого $\delta \neq \delta_0$, то $\hat{g} \in \pi_\delta^{-1}(\pi_\delta(\hat{g})) \in \pi_\delta^{-1}(U_\delta) = \hat{U}_\delta$ для любого элемента $\delta \in \Delta$, и значит, $\hat{g} \in \bigcap_{\delta \in \Delta} \hat{U}_\delta = \tilde{U}$. Так как $g_{\delta_0} = \pi_{\delta_0}(\hat{g}) \in \pi_{\delta_0}(\tilde{U})$, то, из произвольности элемента $g_{\delta_0} \in U_{\delta_0}$, следует, что $U_{\delta_0} \subseteq \pi_{\delta_0}(\tilde{U})$, и значит, $\pi_{\delta_0}(\tilde{U})$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ для любого элемента $\delta_0 \in \Delta$.

Тогда, согласно теореме VIII.3, $\pi_{\delta_0} : (\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ является открытым гомоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

Определения IX.3:

1. групповую топологию $\hat{\tau}$, указанную в теореме IX.1, будем называть *топологией прямого произведения совокупности $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп*, а топологическую группу $(\hat{G}, \hat{\tau})$ будем называть *прямым произведением совокупности $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп*.

2. групповую топологию $\tilde{\tau}$, указанную в предыдущей теореме, будем называть *кирпичной топологией* в прямом произведении совокупности $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп.

Теорема IX.4. Пусть дана совокупность $\{(G_\delta, \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп, $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямое произведение совокупности $\{G_\delta(\cdot) \mid \delta \in \Delta\}$ групп. Если $\tilde{G}(\cdot) = \sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямая сумма совокупности $\{G_\delta(\cdot) \mid \delta \in \Delta\}$ групп (см. Б.18), то верны следующие утверждения:

1. если $\hat{\tau}$ - топология прямого произведения на группе $\hat{G}$, то группа $\tilde{G}(\cdot)$ является плотным подмножеством (см. В.10) в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$;

2.. если $\tilde{\tau}$ - кирпичная топология в прямом произведении $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$, то группа $\tilde{G}(\cdot)$ является замкнутым множеством в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$.

Доказательство. Пусть $\hat{g} \in \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ и $\hat{U}$ - произвольная окрестность элемента $\hat{g}$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Так как $\hat{\tau} = \sup\{\hat{\tau}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, то, согласно утверждению 2 теоремы В.17, существует конечное множество $\{\hat{\tau}_{\delta_1}, \dots, \hat{\tau}_{\delta_n}\}$ топологий на группе $\hat{G}(\cdot)$ и такие окрестности $\hat{U}_{\delta_1}, \dots, \hat{U}_{\delta_n}$ элемента $\hat{g}$ в топологических пространствах $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_{\delta_1}), \dots, (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_{\delta_n})$, соответственно, что $\hat{U} = \bigcap_{i=1}^n \hat{U}_{\delta_i}$.

Для каждого числа $1 \leq i \leq n$ существует такое открытое множество $\hat{V}_{\delta_i} \in \hat{\tau}_{\delta_i}$, что $\hat{g} \in \hat{V}_{\delta_i} \subseteq \hat{U}_{\delta_i}$.

Из определения топологий $\hat{\tau}_\delta$ (см. В.42 и В.25) следует, что $\hat{V}_{\delta_i} = \pi_{\delta_i}^{-1}(V_{\delta_i})$, где $V_{\delta_i} \in \tau_{\delta_i}$ для каждого числа $1 \leq i \leq n$.

Рассмотрим такой элемент $\hat{g}' \in \hat{G}$, что $\pi_\delta(\hat{g}') = \pi_\delta(\hat{g})$ если $\delta \in \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ и $\pi_\delta(\hat{g}') = e_\delta$ если $\delta \notin \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Тогда $\hat{g}' \in \sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$, и так как $\pi_{\delta_i}(\hat{g}') = \pi_{\delta_i}(\hat{g}) \in \pi_{\delta_i}(\hat{V}_{\delta_i}) = \pi_{\delta_i}(\pi_{\delta_i}^{-1}(V_{\delta_i})) = V_{\delta_i}$ для любого числа $1 \leq i \leq n$, то $\hat{g}' \in \pi_{\delta_i}^{-1}(V_{\delta_i}) = \hat{V}_{\delta_i} \subseteq \hat{U}_{\delta_i}$ для любого числа $1 \leq i \leq n$, и значит, $\hat{g}' \in \bigcap_{i=1}^n \hat{U}_{\delta_i} = \hat{U}$.

Итак, мы доказали, что $\hat{g}' \in (\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)) \cap \hat{U}$, и значит, $(\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)) \cap \hat{U} \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности $\hat{U}$ следует, что $\hat{g} \in \left[\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot) \right]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$, а из произвольности элемента $\hat{g}$ следует, что $\hat{G} = \left[\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot) \right]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$.

Этим утверждение 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 2. Допустим противное, т.е. что $\tilde{G}(\cdot)$ не является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$. Тогда $\tilde{G}(\cdot) \neq \left[\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot) \right]_{(\hat{G}, \tilde{\tau})}$. Если $\hat{g} \in \left[\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot) \right]_{(\hat{G}, \tilde{\tau})} \setminus \tilde{G}(\cdot)$, то множество $A = \{\delta \in \Delta \mid \pi_\delta(\hat{g}) \neq e_\delta\}$ является бесконечным.

Так как для каждого элемента $\delta \in A$ топологические группы $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является отделимой, то в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ имеется такая окрестность V_δ единицы, что $(\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} \notin V_\delta$.

Возьмем $V_\delta = G_\delta$ для любого элемента $\delta \notin A$. Тогда $\tilde{V} = \bigcap_{\delta \in \Delta} \pi_\delta^{-1}(V_\delta)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, причем $\pi_\delta(\hat{h}) \neq e_\delta$ для любого элемента $\hat{h} \in \tilde{V} \cdot \hat{g}$ и любого элемента $\delta \in A$.

Так как для любого элемента $\tilde{g} \in \tilde{G}$ множество $\{\delta \in \Delta \mid \pi_\delta(\tilde{g}) \neq e_\delta\}$ является конечным, а множество A является бесконечным, то $\tilde{G} \cap \tilde{V} \cdot \hat{g} = \emptyset$.

С другой стороны, поскольку $\tilde{V} \cdot \hat{g}$ является окрестностью элемента $\hat{g}$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, и $\hat{g} \in [\tilde{G}]_{(\hat{G}, \tilde{\tau})}$, то $\tilde{G} \cap \tilde{V} \cdot \hat{g} \neq \emptyset$.

Получили противоречие.

Этим утверждение 2 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема IX.5. Пусть $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ - прямое произведение семейства $\{(G_\delta, \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп. Если $\rho \in \Delta$ и $\hat{G}_\rho = \{\hat{g} \in \hat{G} \mid \pi_\delta(\hat{g}) = e_\delta \text{ для } \delta \neq \rho\}$, то топологические группы $(G_\rho(\cdot), \tau_\rho)$ и $(\hat{G}_\rho(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho})$ являются топологически изоморфными.

Доказательство. Согласно теореме IX.1, $\pi_\rho : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_\rho(\cdot), \tau_\rho)$ является непрерывным гомоморфизмом. Тогда (см. В.30) и отображение

$\pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}:(\hat{G}_\rho(\cdot),\hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho})\rightarrow(G_\rho(\cdot),\tau_\rho)$ будет непрерывным отображением как сужение непрерывного отображения.

Легко заметить, что $\pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}:\hat{G}_\rho(\cdot)\rightarrow G_\rho(\cdot)$ является групповым изоморфизмом.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $\pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}:(\hat{G}_\rho(\cdot),\hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho})\rightarrow(G_\rho(\cdot),\tau_\rho)$ является открытым отображением.

Согласно теореме VIII.3, достаточно проверить, что $\pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}(V)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_\rho(\cdot),\tau_\rho)$ для любой окрестности V единицы в топологической группе $(\hat{G}_\rho(\cdot),\hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho})$.

Итак, пусть V - окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}_\rho(\cdot),\hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho})$. Тогда $V=\hat{V}\cap\hat{G}_\rho$ для некоторой окрестности $\hat{V}$ единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot),\hat{\tau})$.

Из определения топологии $\hat{\tau}$ следует, что существует такое конечное подмножество $\{\delta_1,\dots,\delta_n\}\subseteq\Delta$ и существуют такие открытые множества $\hat{U}_{\delta_1},\dots,\hat{U}_{\delta_n}$ в топологических пространствах $(\hat{G}(\cdot),\hat{\tau}_{\delta_1}),\dots,(\hat{G}(\cdot),\hat{\tau}_{\delta_n})$, соответственно, что $\hat{e}\in\bigcap_{i=1}^n\hat{U}_{\delta_i}\subseteq\hat{V}$.

Из определения топологий $\hat{\tau}_\delta$ (см. В.42) следует, что существуют такие множества $U_i\in\tau_{\delta_i}$, что $\hat{U}_{\delta_i}=\pi_{\delta_i}^{-1}(U_{\delta_i})$ для любого натурального числа $1\leq i\leq n$, и значит, $\hat{e}\in\left(\bigcap_{i=1}^n\hat{U}_{\delta_i}\right)\cap\hat{G}_\rho\subseteq\hat{V}\cap\hat{G}_\rho=V$.

Так как $\pi_\rho:(\hat{G},\hat{\tau})\rightarrow(G_\rho,\tau_\rho)$ является открытым отображением, то $U_\rho=\pi_\rho\left(\bigcap_{i=1}^n\hat{U}_{\delta_i}\right)\in\tau_\rho$.

Покажем, что $U_\rho\subseteq\pi_\rho(V)=\pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}(V)$.

В самом деле, если $g_\rho\in U_\rho$, то рассмотрим такой элемент $\hat{g}\in\hat{G}$, что $\pi_\delta(\hat{g})=g_\rho$ если $\delta=\rho$ и $\pi_\delta(\hat{g})=e_\delta$ если $\delta\neq\rho$.

Так как $\pi_{\delta_i}(\hat{g})=g_\rho\in U_\rho$ если $\delta_i=\rho$ и $\pi_{\delta_i}(\hat{g})=e_{\delta_i}\in\pi_{\delta_i}(\hat{V})$ если $\delta_i\neq\rho$, то $\hat{g}\in\hat{U}_{\delta_i}$ для любого числа $1\leq i\leq n$, и значит $\hat{g}\in\bigcap_{i=1}^n\hat{U}_{\delta_i}\subseteq\hat{V}$.

Кроме того, поскольку $\pi_\delta(\hat{g}) = e_\delta$ если $\delta \neq \rho$, то $\hat{g} \in \hat{G}_\rho$, и значит, $\hat{g} \in \hat{G}_\rho \cap \hat{V} = V$. Так как $\pi_\delta(\hat{g}) = g_\rho$, то из произвольности элемента g_ρ следует, что $U_\rho \subseteq \pi_\rho(V) = \pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}(V)$, а из произвольности окрестности V следует, что $\pi_\rho|_{\hat{G}_\rho}: (\hat{G}_\rho(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho}) \rightarrow (G_\rho(\cdot), \tau_\rho)$ является открытым отображением.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IX.6. Пусть дано семейство $\{(G_\delta, \tau_\delta) | \delta \in \Delta\}$ топологических групп, $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямое произведение и $\tilde{G} = \sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямая сумма семейства $\{G_\delta(\cdot) | \delta \in \Delta\}$ групп. Если $\hat{\tau}$ и $\tilde{\tau}$ - топологии прямого произведения и кирпичная топология в прямом произведении, соответственно, то следующие утверждения эквивалентны:

1. топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является связной;
2. каждая топологическая группа из семейства $\{(G_\delta, \tau_\delta) | \delta \in \Delta\}$ является связной;
3. топологическая группа $(\tilde{G}, \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$ является связной;
4. топологическая группа $(\tilde{G}, \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ является связной.

Доказательство. Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Итак, пусть топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является связной. Так как для любого элемента $\delta \in \Delta$ отображение $\pi_\rho: (\hat{G}, \hat{\tau}) \rightarrow (G_\rho, \tau_\rho)$ является непрерывным, сюръективным отображением, то, согласно теореме В.30, для каждого элемента $\delta \in \Delta$ топологическая группа $(G_\rho(\cdot), \tau_\rho)$ будет связной, и значит $1 \Rightarrow 2$.

Пусть теперь, для каждого элемента $\delta \in \Delta$ топологическая группа $(G_\rho(\cdot), \tau_\rho)$ является связной. Тогда, согласно теореме IX.5, каждое из множеств $\hat{G}_\rho = \{\hat{g} \in \hat{G} | \pi_\delta(\hat{g}) = e_\delta \text{ для } \delta \neq \rho\}$ будет связным множеством в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и значит, топологическая группа $(\hat{G}_\rho(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho})$ будет связной группой.

Легко заметить, что $\hat{\tau}|_{\hat{G}_\rho} = \tilde{\tau}|_{\hat{G}_\rho}$ для любого элемента $\delta \in \Delta$. Тогда топологическая группа $(\hat{G}_\rho, \tilde{\tau}|_{\hat{G}_\rho})$ будет связной группой, и так как $\hat{G}_\rho \subseteq \tilde{G}$

для любого элемента $\rho \in \Delta$, то каждое из множеств $\hat{G}_\rho$ будет связным множеством в топологической группе $(\tilde{G}, \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$ и содержит единицу $\hat{e}$.

Тогда, если $\tilde{C}$ - связная компонента единицы $\hat{e}$ в топологической группе $(\tilde{G}, \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$, то $\hat{G}_\rho \subseteq \tilde{C}$ для любого элемента $\rho \in \Delta$. Легко заметить, что группа $\tilde{G}(\cdot)$ порождается (см. Б.7) множеством $\bigcup_{\rho \in \Delta} \hat{G}_\rho$.

Так как (см. теорему III.11) $\tilde{C}$ является подгруппой группы $\tilde{G}(\cdot)$, то $\tilde{C} = \tilde{G}$, и значит, топологическая группа $(\tilde{G}, \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$ является связной.

Следовательно, $2 \Rightarrow 3$.

Пусть теперь $(\tilde{G}, \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$ является связной группой. Так как $\tilde{\tau} \geq \hat{\tau}$, то $\tilde{\tau}|_{\tilde{G}} \geq \hat{\tau}|_{\tilde{G}}$. Тогда тождественное отображение топологической группы $(\tilde{G}, \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$ на топологическую группу $(\tilde{G}, \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ будет непрерывным, и значит, (см. утверждение 2 теоремы В.30) топологическая группа $(\tilde{G}, \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ будет связной.

Следовательно, $3 \Rightarrow 4$.

Пусть теперь топологическая группа $(\tilde{G}, \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ является связной. Тогда $\tilde{G}$ будет связным множеством в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Согласно утверждению 1 теоремы IX.4, множество $\tilde{G}$ будет плотным в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и значит, $[\tilde{G}]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} = \hat{G}$. Тогда из теоремы В.29 следует, что $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ будет связной группой.

Следовательно, $4 \Rightarrow 1$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IX.7. Если $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ - прямое произведение семейства $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп, то подмножество $\hat{A} \subseteq \hat{G}$ является предкомпактным в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $\delta \in \Delta$ множество $\pi_\delta(\hat{A})$ будет предкомпактным в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$.

Доказательство. Необходимость. Если подмножество $\hat{A} \subseteq \hat{G}$ является предкомпактным в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то из теоремы IX.1 и утверждения 6 теоремы III.13 следует, что для любого $\delta \in \Delta$ множество $\pi_\delta(\hat{A})$ будет предкомпактным в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любого элемента $\delta \in \Delta$ множество $\pi_\delta(\hat{A})$ является предкомпактным в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$. Тогда, согласно утверждению 3 теоремы VIII.5, для любого элемента $\delta \in \Delta$ множество $\pi_\delta^{-1}(\pi_\delta(\hat{A}))$ будет предкомпактным в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_\delta)$ (определение топологии $\hat{\tau}_\delta$ см. в В.42). Так как $\hat{A} \subseteq \pi_\delta^{-1}(\pi_\delta(\hat{A}))$, то множество $\hat{A}$ будет предкомпактным в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_\delta)$ для любого элемента $\delta \in \Delta$. Тогда, согласно теореме III.15, множество $\hat{A}$ будет предкомпактным в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, ибо $\hat{\tau} = \sup \{\hat{\tau}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$.

Этим теорема полностью доказана.

Следствие IX.8. Прямое произведение $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ семейства $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп является предкомпактной группой тогда и только тогда, когда для любого элемента $\delta \in \Delta$ топологическая группа $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является предкомпактной группой.

Теорема IX.9. Если $(G_1(\cdot), \tau_1)$ и $(G_2(\cdot), \tau_2)$ - топологические группы и $f: (G_1(\cdot), \tau_1) \rightarrow (G_2(\cdot), \tau_2)$ - непрерывный групповой изоморфизм, то в прямом произведении $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = (G_1(\cdot), \tau_1) \times (G_2(\cdot), \tau_2)$ топологических групп $(G_1(\cdot), \tau_1)$ и $(G_2(\cdot), \tau_2)$, существует такая подгруппа $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ и существует такой топологический групповой изоморфизм $\tilde{f}: (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G_1(\cdot), \tau_1)$, что $f \circ \tilde{f} = (\pi_2|_{\tilde{G}})$ (см. А.6).

Доказательство. Если $\tilde{G} = \{(g, f(g)) \in \hat{G} \mid g \in G_1\}$, то легко заметить, что $\tilde{G}(\cdot)$ является подгруппой группы $\hat{G}(\cdot)$, причем отображение $\tilde{f}: \tilde{G}(\cdot) \rightarrow G_1(\cdot)$, переводящее элемент $(g, f(g)) \in \tilde{G}$ в элемент $g \in G_1$, является групповым изоморфизмом, причем $f \circ \tilde{f} = (\pi_2|_{\tilde{G}})$.

Согласно теореме V.4, $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ является топологической группой. Проверим, что $\tilde{f}: (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G_1(\cdot), \tau_1)$ является топологическим изоморфизмом.

Если $\tilde{U}$ - окрестность единицы в топологической группе $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$, то существуют такие окрестности U и V единицы в топологических группах $(G_1(\cdot), \tau_1)$ и $(G_2(\cdot), \tau_2)$, соответственно, что $\tilde{U} = \tilde{G} \cap (\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V))$. Так как $f: (G_1(\cdot), \tau_1) \rightarrow (G_2(\cdot), \tau_2)$ является непрерывным изоморфизмом, то

существует такая окрестность U_1 единицы в топологической группе $(G_1(\cdot), \tau_1)$, что $f(U_1) \subseteq V$. Тогда $U \cap U_1$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_1(\cdot), \tau_1)$.

Если теперь, $g \in U \cap U_1$, то $\pi_2((g, f(g))) = f(g) \in V$, и значит, $(g, f(g)) \in \pi_2^{-1}(V)$. Кроме того, $\pi_1((g, f(g))) = g = f'((g, f(g))) = \pi_1(f(g)) \in \pi_1(U \cap U_1) \subseteq \pi_1(U)$, и значит, $(g, f(g)) \in \pi_1^{-1}(U)$.

Тогда $(g, f(g)) \in \tilde{G} \cap (\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)) = \tilde{U}$, и значит, $g = \tilde{f}((g, f(g))) \in \tilde{f}(\tilde{U})$.

Из произвольности элемента g следует, что $U \cap U_1 \subseteq \tilde{f}(\tilde{U})$, и значит, $\tilde{f}(\tilde{U})$ будет окрестностью единицы в топологической группе (G_1, τ_1) . Тогда, согласно теореме VIII.3, изоморфизм $\tilde{f}: (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G_1(\cdot), \tau_1)$ будет открытым изоморфизмом.

Если теперь U_2 - окрестностью единицы в топологической группе (G_1, τ_1) , то $\pi_1^{-1}(U_2)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\hat{G}, \hat{\tau})$. Тогда $\tilde{G} \cap \pi_1^{-1}(U_2)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\tilde{G}, \tilde{\tau})$, причем для любого элемента $(g, f(g)) \in \tilde{G} \cap \pi_1^{-1}(U_2)$ имеем, что $\tilde{f}((g, f(g))) = g \in \pi_1(\pi_1^{-1}(U_2)) = U_2$.

Из произвольности элемента $(g, f(g)) \in \tilde{G} \cap \pi_1^{-1}(U_2)$ следует, что $\tilde{f}(\tilde{G} \cap \pi_1^{-1}(U_2)) \subseteq U_2$. Тогда, согласно теореме VIII.2, изоморфизм $\tilde{f}: (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G_1(\cdot), \tau_1)$ будет непрерывным изоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IX.10. Пусть $\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - некоторое множество групповых топологий на группе $G(\cdot)$ и для любого элемента $\delta \in \Delta$ рассмотрим топологическую группу $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) = (G(\cdot), \tau_\delta)$. Если в прямом произведении $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ семейства $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп для каждого элемента $g \in G$ рассмотрим такой элемент $\hat{h}_g$, что $\pi_\delta(\hat{h}_g) = g$ для любого $\delta \in \Delta$, то множество $\tilde{G} = \{\hat{h}_g \mid g \in G\}$ является подгруппой группы $\hat{G}(\cdot)$, причем топологические группы $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ и $(G(\cdot), \sup\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\})$ являются топологически изоморфными.

Доказательство. Если каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствии элемент $\hat{h}_g \in \tilde{G}$ (обозначение элемента $\hat{h}_g$ см. в формулировке теоремы), то определим отображение $\xi : G \rightarrow \tilde{G}$.

Легко заметить, что $\xi : G(\cdot) \rightarrow \tilde{G}(\cdot)$ является групповым изоморфизмом.

Проверим, что $\xi : (G(\cdot), \sup\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}) \rightarrow (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ является открытым изоморфизмом.

Если U - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\})$, то (см. утверждение 2 теоремы В.17) существует конечное подмножество $\{\tau_{\delta_1}, \dots, \tau_{\delta_n}\} \subseteq \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ групповых топологий и существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G(\cdot), \tau_{\delta_n})$, соответственно, что $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Тогда

$\hat{U} = \bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\hat{G}, \hat{\tau})$, и значит, $\hat{U} \cap \tilde{G}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$.

Если теперь $\hat{g} \in \hat{U} \cap \tilde{G}$, то $\hat{g} = \hat{h}_g$ для некоторого элемента $g \in G$. Так как $\pi_{\delta_j}(\hat{g}) \in U_j$ для любого $1 \leq j \leq n$ и $\pi_\delta(\hat{g}) = \pi_\delta(\hat{h}_g) = g$ для любого $\delta \in \Delta$, то $g \in \bigcap_{j=1}^n U_j$. Кроме того, $\xi(g) = \hat{h}_g = \hat{g}$, и значит, $\hat{g} \in \xi(U)$. Из произвольности элемента $\hat{g}$ следует, что $\xi(U) \supseteq \hat{U} \cap \tilde{G}$. Тогда (см. теорему VIII.3) $\xi : (G(\cdot), \sup\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}) \rightarrow (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ будет открытым изоморфизмом.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $\xi : (G(\cdot), \sup\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}) \rightarrow (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ является непрерывным изоморфизмом.

Если $\tilde{U}$ - окрестность единицы в топологической группе $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$, то существует конечное множество $\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subseteq \Delta$, и существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ единицы в топологических группах $(G_{\delta_1}(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G_{\delta_n}(\cdot), \tau_{\delta_n})$, соответственно, что $\tilde{U} \supseteq \bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j)$.

Тогда $U_1, \dots, U_n$ будут окрестностями единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G(\cdot), \tau_{\delta_n})$, соответственно, и значит, $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\})$. Если теперь $g \in U$, то $\pi_{\delta_j}(\hat{h}_g) = g \in U_j$ для любого $1 \leq j \leq n$, и значит, $\xi(g) = \hat{h}_g \in \bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j) \subseteq \tilde{U}$. Из произвольности элемента $g \in U$ следует, что $\xi(U) \subseteq \tilde{U}$. Тогда, согласно теореме VIII.2, будет непрерывным изоморфизм $\xi : (G(\cdot), \sup \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}) \rightarrow (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau} \mid_{\tilde{G}})$

Этим теорема полностью доказана.

Теорема IX.11. Пусть топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является прямым произведением семейства $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп, $(G(\cdot), \tau)$ - некоторая топологическая группа, и для каждого $\delta \in \Delta$ задан некоторый групповой гомоморфизм $f_\delta : G(\cdot) \rightarrow G_\delta(\cdot)$. Если $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - гомоморфизм, указанный в Б.22, то $\psi : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot), \hat{\tau})$ будет непрерывным гомоморфизмом тогда и только тогда, когда для каждого элемента $\delta \in \Delta$ гомоморфизм $f_\delta : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ будет непрерывным гомоморфизмом.

Доказательство. Пусть для каждого элемента $\delta \in \Delta$ гомоморфизм $f_\delta : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является непрерывным, и $\hat{U}$ - окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Тогда существует конечное множество $\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subseteq \Delta$, и существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ единицы в топологических группах $(G_{\delta_1}(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G_{\delta_n}(\cdot), \tau_{\delta_n})$, соответственно, что $\hat{U} \supseteq \bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j)$.

Так как для каждого $\delta \in \Delta$ гомоморфизм $f_\delta : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является непрерывным, то существуют такие окрестности $V_1, \dots, V_n$ единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $f_{\delta_j}(V_j) \subseteq U_j$ для любого $1 \leq j \leq n$. Тогда $V = \bigcap_{j=1}^n V_j$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если теперь $g \in U$, то $\pi_{\delta_j}(\psi(g)) = f_{\delta_j}(g) \in U_j$ для любого $1 \leq j \leq n$, и значит, $\psi(g) \in \bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j) \subseteq \hat{U}$. Из произвольности элемента $g \in V$ следует, что $\psi(V) \subseteq \hat{U}$. Тогда, согласно утверждению 1 теоремы VIII.3, гомоморфизм $\psi : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot), \hat{\tau})$ будет непрерывным

Пусть теперь гомоморфизм $\psi : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot), \hat{\tau})$ является непрерывным и $\rho \in \Delta$. Так как $f_\rho(g) = \pi_\rho(\psi(g))$ для любого элемента $g \in G$, то $f_\rho = \pi_\rho \circ \psi$, и поскольку (см. теорему IX.1) гомоморфизм $\pi_\rho : (\prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_\rho, \tau_\rho)$ является непрерывным гомоморфизмом, то $f_\rho = \pi_\rho \circ \psi$ будет непрерывным гомоморфизмом, как суперпозиция непрерывных гомоморфизмов.

Этим теорема полностью доказана.

Определение IX.12. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ задана такая совокупность $\{A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ нормальных делителей, что $\bigcap_{\delta \in \Delta} A_\delta = \{e\}$, то говорим, что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является *подпрямым произведением семейства* $\{(G(\cdot), \tau) / A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ *топологических групп*.

Теорема IX.13. Пусть топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является подпрямым произведением семейства $\{(G(\cdot), \tau) / A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп $(G(\cdot), \tau) / A_\delta$ и $f_\delta : G(\cdot) \rightarrow G(\cdot) / A_\delta$ - канонический гомоморфизм для каждого $\delta \in \Delta$. Если $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G(\cdot) / A_\delta$ - отображение, указанное в Б.21, то $\psi : (G(\cdot), \tau) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G(\cdot) / A_\delta$ будет инъективным непрерывным групповым гомоморфизмом.

Доказательство. Так как в этом случае гомоморфизм $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G(\cdot) / A_\delta$ совпадает с гомоморфизмом, который указан в Б.22, то, согласно теореме IX.11, гомоморфизм $\psi : (G(\cdot), \tau) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} (G(\cdot), \tau) / A_\delta$ будет непрерывным. Кроме того, в формулировке теореме Б.21 утверждалась инъективность гомоморфизма $\psi : G(\cdot) \rightarrow \prod_{\delta \in \Delta} G(\cdot) / A_\delta$.

Этим теорема полностью доказана.

Х. ПОЛНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ИХ СВОЙСТВА.

Определение Х.1. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа и Φ - фильтр на множестве G (см. А.21), то Φ называется *фильтром Коши* в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, если для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такое множество $F \in \Phi$, что $F \cdot F^{-1} \subseteq V$.

Теорема Х.2. Пусть даны топологические группы $(G(\cdot), \tau)$ и $(G'(\cdot), \tau')$, и $\varphi: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ - непрерывный гомоморфизм. Если Φ является базисом фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то совокупность $\{\varphi(F) \mid F \in \Phi\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши Φ' в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Доказательство. Легко заметить, что совокупность $\{\varphi(F) \mid F \in \Phi\}$ подмножеств группы $G'(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы А.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра Φ' во множестве G' .

Если теперь V' - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то $V = \varphi^{-1}(V')$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, существует такое множество $F \in \Phi$, что $F \cdot F^{-1} \subseteq V$. Тогда $\varphi(F) \cdot \varphi(F)^{-1} = \varphi(F \cdot F^{-1}) \subseteq \varphi(V) \subseteq V'$.

Из произвольности окрестности V' следует, что Φ' является фильтром Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема Х.3. Пусть для групп $G(\cdot)$ и $G'(\cdot)$ дан сюръективный групповой гомоморфизм $\varphi: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$. Если τ' - групповая топология на группе $G'(\cdot)$ и τ - прообраз топологии τ' относительно гомоморфизма φ (см. VIII.4), то для любого фильтра Φ' Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, совокупность $\{\varphi^{-1}(F') \mid F' \in \Phi'\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Из сюръективности отображения $\varphi: G \rightarrow G'$ легко следует, что совокупность $\{\varphi^{-1}(F') \mid F' \in \Phi'\}$ подмножеств группы $G(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы А.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра Φ во множестве G .

Покажем, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и U - такое множество, что $U \in \tau$ и $e \in U \subseteq V$, то $U = \varphi^{-1}(U')$ для некоторого множества $U' \in \tau$.

Так как $e' = \varphi(e) \in \varphi(U) = U'$, то U' является окрестностью единицы в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, и поскольку Φ' является фильтром Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то $F' \cdot (F')^{-1} \subseteq U'$ для некоторого множества $F' \in \Phi'$.

Тогда $\varphi^{-1}(F') \cdot \varphi^{-1}((F')^{-1}) = \varphi^{-1}(F' \cdot (F')^{-1}) \subseteq \varphi^{-1}(U') = U \subseteq V$.

Из произвольности окрестности V следует, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.4. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа и совокупность Δ является базисом некоторого фильтра Φ во множестве G , то следующие утверждения эквивалентны:

1. фильтр Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;
2. для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такое множество $F \in \Delta$, что $F \cdot F^{-1} \subseteq V$;
3. для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существуют такое множество $F \in \Delta$, и такой элемент $g \in G$ что $F \subseteq V \cdot g$.

Доказательство. Пусть Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и V - любая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда существуют такое множество $\hat{F} \in \Phi$, что $\hat{F} \cdot \hat{F}^{-1} \subseteq V$. Так как Δ является базисом фильтра Φ , то $F \subseteq \hat{F}$ для некоторого множества $F \in \Delta$. Тогда $F \cdot F^{-1} \subseteq \hat{F} \cdot \hat{F}^{-1} \subseteq V$, и значит, из утверждения 1 следует утверждение 2.

Пусть теперь будет верным утверждение 2. Если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое множество F из совокупности Δ , что $F \cdot F^{-1} \subseteq V$. Выберем некоторый элемент g из множества F . Тогда $F \cdot g^{-1} \subseteq F \cdot F^{-1} \subseteq V$, и значит, $F \subseteq V \cdot g$.

Следовательно, из утверждения 2 следует утверждение 3.

Пусть теперь будет верным утверждение 3. Если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U \cdot U^{-1} \subseteq V$. Согласно утверждению 3, существуют множество $F \in \Delta$ и элемент $g \in G$, такие что $F \subseteq U \cdot g$. Тогда $F \cdot F^{-1} \subseteq (U \cdot g) \cdot (U \cdot g)^{-1} = U \cdot g \cdot g^{-1} \cdot U^{-1} =$

$U \cdot U^{-1} \subseteq V$. Так как $\Delta \subseteq \Phi$, то $F \in \Phi$, и значит, из утверждения 3 следует утверждение 1.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.5. Если совокупность Ω является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и $\bigcap_{F \in \Omega} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$ то верны следующие утверждения:

1. $a \in \bigcap_{F \in \Omega} [F]_{(G, \tau)}$, тогда и только тогда, когда для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такое множество $F \in \Omega$, что $F \subseteq V \cdot a$;

2 совокупность $\Omega^{-1} = \{F^{-1} \mid F \in \Omega\}$ тоже будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство.

Пусть $a \in \bigcap_{F \in \Omega} [F]_{(G, \tau)}$ и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq V$. Согласно утверждению 2 теоремы X.4, существует такое множество $F_0 \in \Omega$, что $F_0 \cdot F_0^{-1} \subseteq V_1$. Согласно теореме II.5, $a \in [F_0]_{(G, \tau)} \subseteq V_1 \cdot F_0$, и значит, $a^{-1} \in (V_1 \cdot F_0)^{-1} = F_0^{-1} \cdot V_1^{-1}$. Тогда $F_0 \cdot a^{-1} \in F_0 \cdot F_0^{-1} \cdot V_1^{-1} \subseteq V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq V$, и значит, $F_0 \subseteq V \cdot a$.

Из произвольности окрестности V следует, что необходимость доказана.

Пусть теперь, для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такое множество $F_0 \in \Omega$, что $F_0 \subseteq V \cdot a$.

Если теперь $F \in \Omega$ и U - произвольная окрестность элемента a в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $V = U \cdot a^{-1}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, существует такое множество $F_0 \in \Omega$, что $F_0 \subseteq V \cdot a = U$. Так как Ω является базисом некоторого фильтра, то $\emptyset \neq F \cap F_0 \subseteq F \cap U$. Из произвольности окрестности U следует, что $a \in [F]_{(G, \tau)}$, а из произвольности множества F следует, что $a \in \bigcap_{F \in \Omega} [F]_{(G, \tau)}$.

Этим утверждение 1 доказано.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 2 теоремы.

Легко заметить (см. A.25), что совокупность $\Omega^{-1} = \{F^{-1} \mid F \in \Omega\}$ подмножеств группы $G(\cdot)$ является базисом некоторого фильтра во множестве G .

Пусть U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, выберем некоторый элемент a из множества $\bigcap_{F \in \Omega} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$.

Существует такая окрестность V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $a^{-1} \cdot V^{-1} \cdot a \subseteq U$, и, как было отмечено выше (см. утверждение 1), существует такое множество $F_0 \in \Omega$, что $F_0 \subseteq V \cdot a$.

Так как $F_0^{-1} \subseteq (V \cdot a)^{-1} = a^{-1} \cdot V^{-1} = a^{-1} \cdot V^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} \subseteq U \cdot a^{-1}$, то (см. теорему X.4) из произвольности окрестности U следует, что совокупность $\Omega^{-1} = \{F^{-1} \mid F \in \Omega\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.6. Пусть на группе $G(\cdot)$ задана совокупность $\{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ групповых топологий и $\tau = \sup \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$. Если Φ - некоторый фильтр на множестве G , то Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ тогда и только тогда, когда Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau_\delta)$ для любого элемента $\delta \in \Delta$.

Доказательство. Пусть Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Если $\delta \in \Delta$ и V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_\delta)$, то V будет окрестностью единицы и в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, существует такое множество $F \in \Phi$, что $F \cdot F^{-1} \subseteq V$.

Из произвольности окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_\delta)$ следует, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau_\delta)$.

Пусть теперь для каждого $\delta \in \Delta$ фильтр Φ будет фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau_\delta)$ и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $\tau = \sup \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, то, согласно теореме B.17, существует конечное множество $\{\tau_{\delta_1}, \dots, \tau_{\delta_n}\} \subseteq \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ топологий и такие окрестности единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G(\cdot), \tau_{\delta_n})$,

соответственно, что $V = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Поскольку Φ является фильтром Коши в каждой из топологических групп $(G(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G(\cdot), \tau_{\delta_n})$, то для каждого натурального числа $1 \leq j \leq n$ существует такое множество $F_j \in \Phi$, что

$$F_j \cdot F_j^{-1} \subseteq U_j. \quad \text{Тогда} \quad F = \bigcap_{j=1}^n F_j \in \Phi \quad \text{и} \quad F \cdot F^{-1} = \left(\bigcap_{j=1}^n F_j \right) \cdot \left(\bigcap_{j=1}^n F_j \right)^{-1} \subseteq \bigcap_{j=1}^n (F_j \cdot F_j^{-1}) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j = V.$$

Из произвольности окрестности V следует, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.7. Пусть топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является прямым произведением совокупности $\{(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп (см. IX.1). Если совокупность $\hat{S}$ подмножеств множества $\hat{G}$ является базисом фильтра $\hat{\Phi}$ во множестве $\hat{G}$, то фильтр $\hat{\Phi}$ будет фильтром Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ тогда и только тогда, когда для каждого $\delta \in \Delta$ совокупность $S_\delta = \{\pi_\delta(\hat{F}) \mid \hat{F} \in \hat{S}\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$.

Доказательство. Пусть $\hat{\Phi}$ является фильтром Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Так как (см. IX.1) для каждого $\delta \in \Delta$ проекция $\pi_\delta : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является непрерывным гомоморфизмом, то, согласно теореме X.2, совокупность $S_\delta = \{\pi_\delta(\hat{F}) \mid \hat{F} \in \hat{S}\}$ подмножеств группы $G_\delta(\cdot)$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$.

Этим необходимость доказана.

Пусть теперь для каждого $\delta \in \Delta$ совокупность $S_\delta = \{\pi_\delta(\hat{F}) \mid \hat{F} \in \hat{S}\}$ подмножеств группы $G_\delta(\cdot)$ является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$. Так как (см. IX.1) для каждого элемента $\delta \in \Delta$ проекция $\pi_\delta : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является сюръективным гомоморфизмом, то, согласно теореме X.3, совокупность $\hat{S}_\delta = \{\pi_\delta^{-1}(\pi_\delta(\hat{F})) \mid \hat{F} \in \hat{S}\}$ подмножеств группы $\hat{G}(\cdot)$ будет базисом некоторого фильтра $\hat{\Phi}_\delta$ Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_\delta)$ (определение топологии $\hat{\tau}_\delta$ см. в B.42). Поскольку $\hat{F} \subseteq \pi_\delta^{-1}(\pi_\delta(\hat{F}))$ для любого $\hat{F} \in \hat{S}$, то совокупность $\hat{S}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_\delta)$.

Итак, мы доказали, что совокупность $\hat{S}$ является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}_\delta)$ для любого $\delta \in \Delta$. Так как (см. В.42) $\hat{\tau} = \sup \{\tau_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, то, согласно теореме X.6, совокупность $\hat{S}$ будет базисом некоторого фильтром Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Этим теорема полностью доказана.

Определение X.8. Топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ называется *полной топологической группой*, если $\bigcap_{F \in \Omega} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$ для любой совокупности Ω , которая является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Теорема X.9. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является локально компактной группой (см. В.40), то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ будет полной.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ не является полной. Тогда существует такой фильтр Коши Φ , что $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)} = \emptyset$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является локально компактной группой, то единица группы $G(\cdot)$ обладает компактной окрестностью U . Согласно теореме X.4, существуют множество $F_0 \in \Phi$ и элемент $g \in G$ такие, что $F_0 \subseteq U \cdot g$.

Легко заметить, что совокупность $\Delta = \{F_0 \cap F \mid F \in \Phi\}$ подмножеств множества $U \cdot g$ удовлетворяет условиям теоремы A.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра во множестве $U \cdot g$.

Так как (см. теорему I.3) отображение $R_g : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является непрерывным, то (см. теорему В.38) множество $A = U \cdot g$ будет компактным, и значит, $(A, \tau|_A)$ является компактным топологическим пространством. Тогда (см. теорему В.39) $\bigcap_{F \in \Phi} [F_0 \cap F]_{(A, \tau|_A)} \neq \emptyset$. Так как $\bigcap_{F \in \Phi} [F_0 \cap F]_{(A, \tau|_A)} \subseteq \bigcap_{F \in \Phi} [F_0 \cap F]_{(G, \tau)}$, то $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)} = \bigcap_{F \in \Phi} [F_0 \cap F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$.

Получили противоречие с выбором фильтра Φ .

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.10. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ пересечение всех окрестностей единицы является окрестностью единицы, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной.

Доказательство. Если множество V , равное пересечению всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, является окрестностью единицы, то $\tau|_V$ является антидискретной топологией на множестве V , и значит, топологическое пространство $(V, \tau|_V)$ является компактным. Тогда топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ будет локально компактной группой, и согласно предыдущей теореме, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.11. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ имеется такая открытая подгруппа $A(\cdot)$, что топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ является полной группой, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной.

Доказательство. Если Φ - фильтр Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно утверждению 3 теоремы X.4, существуют такое множество $F_0 \in \Phi$ и такой элемент $g_0 \in G$, что $F_0 \cdot g_0^{-1} \subseteq A$. Тогда легко проверить, что совокупность $\Delta = \{(F \cdot g_0^{-1}) \cap A \mid F \in \Phi\}$ подмножеств множества A удовлетворяет всем условиям теоремы A.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра Φ' на множестве A .

Тогда, $((F \cdot g_0^{-1}) \cap A) \cdot ((F \cdot g_0^{-1}) \cap A)^{-1} = ((F \cdot g_0^{-1}) \cdot (F \cdot g_0^{-1})^{-1}) \cap A = (F \cdot g_0^{-1} \cdot g_0 \cdot F^{-1}) \cap A = (F \cdot F^{-1}) \cap A$ для любого множества $F \in \Phi$, и значит, фильтр Φ' будет фильтром Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$.

Так как топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ является полной группой, то $\emptyset \neq \bigcap_{F \in \Phi} [F \cdot g_0^{-1}]_{(A, \tau|_A)}$. Тогда, из теоремы III.3, следует, что $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)} = \bigcap_{F \in \Phi} ([F \cdot g_0^{-1}]_{(G, \tau)} \cdot g_0) = (\bigcap_{F \in \Phi} [F \cdot g_0^{-1}]_{(G, \tau)}) \cdot g_0 = (\bigcap_{F \in \Phi} [F \cdot g_0^{-1}]_{(G, \tau)}) \cdot g_0 \neq \emptyset$.

Из произвольности фильтра Φ следует полнота топологической группы $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.12. Если в полной топологической группе (G, τ) множество M является предкомпактным множеством, то множество $A = [M]_{(G, \tau)}$ будет компактным множеством.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что множество $A = [M]_{(G, \tau)}$ не является компактным. Тогда топологическое пространство $(A, \tau|_A)$ не будет компактным пространством, и значит (см. теорему B.39), существует такой фильтр Φ на множестве A , что $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(A, \tau|_A)} = \emptyset$.

Согласно теореме А.26, на множестве A существует такой ультрафильтр Ω , что $\Phi \subseteq \Omega$. Если теперь V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то из предкомпактности множества $A = [M]_{(G, \tau)}$ (см. утверждение 3 теоремы III.13) следует, что существует такое конечное множество $S \subseteq G$, что $A \subseteq V \cdot S = \bigcup_{g \in S} V \cdot g$. Так как $A \in \Omega$, то из теоремы А.23 следует, что $V \cdot g_0 \in \Omega$.

Легко заметить, что совокупность Ω подмножеств группы $G(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы А.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра $\tilde{\Phi}$ на множестве G .

Так как для каждой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такой элемент $g \in G$, что $V \cdot g \in \Omega \subseteq \tilde{\Phi}$, то согласно теореме Х.4, $\tilde{\Phi}$ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $\bigcap_{F \in \tilde{\Phi}} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$. Тогда, поскольку $\Phi \subseteq \Omega \subseteq \tilde{\Phi}$, то

$$\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)} \supseteq \bigcap_{F \in \tilde{\Phi}} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset.$$

Так как множество A является замкнутым в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $[F]_{(A, \tau|_A)} = [F]_{(G, \tau)}$, и значит, $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(A, \tau|_A)} \neq \emptyset$.

Получили противоречие с выбором фильтра Φ .

Этим теорема полностью доказана.

Следствие Х.13. Если полная топологическая группа (G, τ) является предкомпактной группой, то топологическая группа (G, τ) будет компактной группой.

Теорема Х.14. Замкнутая подгруппа полной топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ является полной топологической группой.

Доказательство. Пусть топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой и $A(\cdot)$ - замкнутая подгруппа в $(G(\cdot), \tau)$. Если Φ - фильтр Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, то совокупность Φ подмножеств группы $G(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы А.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра $\tilde{\Phi}$ на множестве G .

Из того, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, следует, что $\tilde{\Phi}$ будет фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $\emptyset \neq \bigcap_{F \in \tilde{\Phi}} [F]_{(G, \tau)} \subseteq \bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)}$.

Так как $A(\cdot)$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (G, τ) , то $[F]_{(A, \tau|_A)} = [F]_{(G, \tau)}$, и значит, $\emptyset \neq \bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(A, \tau|_A)}$.

Из произвольности фильтра Φ следует, что топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ является полной группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.15. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой топологической группой, и $A(\cdot)$ - такая подгруппа в группе $G(\cdot)$, что топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ является полной группой, то $A(\cdot)$ будет замкнутой подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$

Доказательство. Допустим противное, т.е. что $A(\cdot)$ не является замкнутой подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда $[A]_{(G, \tau)} \neq A$, и пусть $g \in [A]_{(G, \tau)} \setminus A$.

Так как g является точкой прикосновения к множеству A , то $A \cap (V \cdot g) \neq \emptyset$ для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то совокупность $\Delta = \{A \cap (V \cdot g) \mid V \in \Omega\}$ подмножеств множества A удовлетворяет условиям теоремы A.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра Φ во множестве A .

Покажем, что фильтр Φ является фильтром Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$.

Если U - окрестность единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, то $U = V_0 \cap A$ для некоторой окрестности $V_0 \in \Omega$. Существует такая окрестность $V_1 \in \Omega$, что $V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq V_0$. Тогда $A \cap (V_1 \cdot g) \in \Delta \subseteq \Phi$ и $(A \cap (V_1 \cdot g)) \cdot (A \cap ((V_1 \cdot g)^{-1})) = A \cap (V_1 \cdot g \cdot g^{-1} \cdot V_1^{-1}) = A \cap (V_1 \cdot V_1^{-1}) \subseteq A \cap V_0 = U$.

Из произвольности окрестности U следует, что фильтр Φ является фильтром Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$ и так как $(A(\cdot), \tau|_A)$ является полной группой, то $\bigcap_{V \in \Omega} [A \cap V \cdot g]_{(A, \tau|_A)} \neq \emptyset$.

Пусть $b \in \bigcap_{V \in \Omega} [A \cap V \cdot g]_{(A, \tau|_A)} \subseteq A$. Тогда поскольку $g \notin A$, то $b \neq g$. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой, (см. теоремы IV.1 и II.1) то существует такая окрестность $V_2 \in \Omega$, что $V_2 \cdot g \cap V_2 \cdot b = \emptyset$, и значит, $b \notin [V_2 \cdot g]_{(G, \tau)}$.

Тогда $b \in \bigcap_{V \in \Omega} [A \cap V \cdot g]_{(A, \tau|_A)} \subseteq [A \cap V_2 \cdot g]_{(A, \tau|_A)} \subseteq [V_2 \cdot g]_{(G, \tau)}$, то

получили противоречие с ранее доказанным, что $b \notin [V_2 \cdot g]_{(G, \tau)}$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.16. Пусть $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ - сюръективный, групповой гомоморфизм. Если τ' - групповая топология на группе $G'(\cdot)$ и τ - прообраз топологии τ' относительно гомоморфизма $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной тогда и только тогда, когда топологическая группа $(G'(\cdot), \tau')$ является полной.

Доказательство.

Необходимость. Пусть топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной, и Φ' - фильтр Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Согласно теореме X.3, совокупность $\Phi = \{f^{-1}(F') \mid F' \in \Phi'\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной, то $\bigcap_{F' \in \Phi'} [f^{-1}(F')]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$.

Тогда (см. A.8 и B.21) $\emptyset \neq f\left(\bigcap_{F' \in \Phi'} [f^{-1}(F')]_{(G, \tau)}\right) \subseteq \bigcap_{F' \in \Phi'} f([f^{-1}(F')]_{(G, \tau)}) \subseteq \bigcap_{F' \in \Phi'} [f(f^{-1}(F'))]_{(G', \tau')} = \bigcap_{F' \in \Phi'} [F']_{(G', \tau')}.$

Из произвольности фильтра Φ' следует полнота топологической группы $(G'(\cdot), \tau')$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь топологическая группа $(G'(\cdot), \tau')$ является полной, и Φ - фильтр Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как гомоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau')$ является непрерывным, то, согласно теореме X.2, совокупность $\Phi' = \{f(F) \mid F \in \Phi\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, и поскольку топологическая группа $(G'(\cdot), \tau')$ является полной, то $\bigcap_{F \in \Phi} [f(F)]_{(G', \tau')} \neq \emptyset$.

Если $g' \in \bigcap_{F \in \Phi} [f(F)]_{(G', \tau')}$, то из того, что гомоморфизм $f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$ является сюръективным отображением, следует, что существует элемент $g \in f^{-1}(g')$

Покажем, что $g \in [F]_{(G, \tau)}$ для любого множества $F \in \Phi$.

Пусть V - произвольная окрестность элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $V \in \tau$. Тогда существует такое множество $V' \in \tau'$, что $g' \in V'$ и $V = f^{-1}(V')$.

Так как $g' \in [f(F)]_{(G', \tau')}$, то $V' \cap f(F) \neq \emptyset$. Тогда из предложения А.8 следует, что $f(V \cap F) = V' \cap f(F) \neq \emptyset$, и значит $V \cap F \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности V следует, что $g \in [F]_{(G, \tau)}$, а из произвольности множества F следует, что $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$, и значит, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной.

Этим достаточность доказана, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема Х.17. Пусть дано семейство $\{(G_\delta, \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ топологических групп, $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямое произведение и $\tilde{G} = \sum_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$ - прямая сумма этого семейства $\{G_\delta(\cdot) \mid \delta \in \Delta\}$ групп. Если $\hat{\tau}$ и $\tilde{\tau}$ - топологии прямого произведения и кирпичная топология в прямом произведении $\hat{G}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta} G_\delta(\cdot)$, соответственно, то следующие утверждения эквивалентны:

1. топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной;
2. каждая топологическая группа из семейства $\{(G_\delta, \tau_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ является полной;
3. топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ является полной;
4. топологическая группа $(\tilde{G}, \tilde{\tau} |_{\tilde{G}})$ является полной.

Доказательство. Доказательство проведем по схеме $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Пусть топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) = \prod_{\delta \in \Delta} (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является полной группой и $\delta_0 \in \Delta$. Если Φ_{δ_0} - фильтр Коши в топологической группе $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ и $\hat{G}_{\delta_0} = \{\hat{g} \in \hat{G} \mid \pi_\delta(\hat{g}) = e_\delta \text{ для } \delta \neq \delta_0\}$, то согласно теореме IX.5, топологические группы $(\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}})$ и $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ являются топологически изоморфными группами, причем отображение $\pi_{\delta_0}|_{\hat{G}_{\delta_0}} : (\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ будет топологическим изоморфизмом.

Тогда совокупность $\hat{\Phi}_{\delta_0} = \{(\pi_{\delta_0}|_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F) \mid F \in \Phi_{\delta_0}\}$ будет фильтром Коши в топологической группе $(\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}})$, и поскольку $(\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}})$ является подгруппой топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то совокупность $\hat{\Phi}_{\delta_0}$

будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Так как топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной группой, то $\bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [(\pi_{\delta_0} \mid_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F)]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \neq \emptyset$. Тогда, из непрерывности гомоморфизма

$$\pi_{\delta_0} : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0}) \text{ и утверждения 4 теоремы В.21 следует, что}$$

$$\emptyset \neq \pi_{\delta_0} \left(\bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [(\pi_{\delta_0} \mid_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F)]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \right) = \bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} \pi_{\delta_0} ([(\pi_{\delta_0} \mid_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F)]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}) \subseteq$$

$$\bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [\pi_{\delta_0} ((\pi_{\delta_0} \mid_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F))]_{(G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})} = \bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [F]_{(G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})}.$$

Из произвольности фильтра Φ следует полнота топологической группы $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$.

Этим доказано, что $1 \Rightarrow 2$.

Пусть теперь для каждого элемента $\delta \in \Delta$ топологическая группа $(G_{\delta}(\cdot), \tau_{\delta})$ является полной группой, и пусть $\hat{\Phi}$ - фильтр Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Тогда, поскольку для каждого $\delta \in \Delta$ гомоморфизм $\pi_{\delta} : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_{\delta}(\cdot), \tau_{\delta})$ является непрерывным, то совокупность $\Phi_{\delta} = \{\pi_{\delta}(F) \mid F \in \hat{\Phi}\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G_{\delta}(\cdot), \tau_{\delta})$. Так как топологическая группа $(G_{\delta}(\cdot), \tau_{\delta})$, является полной группой, то $\bigcap_{F \in \hat{\Phi}} [\pi_{\delta}(F)]_{(G_{\delta}, \tau_{\delta})} \neq \emptyset$.

Для каждого элемента $\delta \in \Delta$ выберем некоторый элемент $g_{\delta} \in \bigcap_{F \in \hat{\Phi}} [\pi_{\delta}(F)]_{(G_{\delta}, \tau_{\delta})}$. Тогда существует такой элемент $\hat{g} \in \hat{G}$, что $\pi_{\delta}(\hat{g}) = g_{\delta}$ для любого элемента $\delta \in \Delta$.

Для полноты топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, согласно утверждению 1 теоремы Х.5, достаточно проверить, что для любой окрестности $\hat{V}$ единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, существует такое множество $F_0 \in \hat{\Phi}$, что $F_0 \subseteq \hat{V} \cdot \hat{g}$.

Итак, если $\hat{V}$ - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то существует такое конечное подмножество $\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subseteq \Delta$, и существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ единицы в топологических группах $(G_{\delta_1}(\cdot), \tau_{\delta_1}), \dots, (G_{\delta_n}(\cdot), \tau_{\delta_n})$, соответственно, что $\bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j) \subseteq \hat{V}$.

Так как $g_\delta \in \bigcap_{F \in \hat{\Phi}} [\pi_\delta(F)]_{(G_\delta, \tau_\delta)}$ для любого элемента $\delta \in \Delta$, то, согласно утверждению 1 теоремы X.5, существуют такие подмножества $F_1, \dots, F_n \in \hat{\Phi}$, что $\pi_{\delta_j}(F_j) \subseteq U_j \cdot g_{\delta_j}$ для любого числа $1 \leq j \leq n$.

Так как $\hat{\Phi}$ является фильтром, то $F_0 = \bigcap_{j=1}^n F_j \in \hat{\Phi}$. Тогда

$$F_0 = \bigcap_{j=1}^n F_j \subseteq \bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j \cdot g_{\delta_j}) = \left(\bigcap_{j=1}^n \pi_{\delta_j}^{-1}(U_j) \right) \cdot \hat{g} \subseteq \hat{V} \cdot \hat{g}.$$

Этим доказана полнота топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и значит, $2 \Rightarrow 1$.

Итак, мы доказали, что $1 \Leftrightarrow 2$.

Пусть теперь верно утверждение 2, т.е., что для каждого элемента $\delta \in \Delta$ топологическая группа (G_δ, τ_δ) является полной, и пусть $\hat{\Phi}$ - фильтр Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Тогда, поскольку для каждого $\delta \in \Delta$ (см. теорему IX.2) гомоморфизм $\pi_\delta : (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$ является непрерывным, то совокупность $\Phi_\delta = \{\pi_\delta(F) \mid F \in \hat{\Phi}\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$. Так как топологическая группа $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$, является полной группой, то $\bigcap_{F \in \hat{\Phi}} [\pi_\delta(F)]_{(G_\delta, \tau_\delta)} \neq \emptyset$.

Для каждого элемента $\delta \in \Delta$ выберем некоторый элемент $g_\delta \in \bigcap_{F \in \hat{\Phi}} [\pi_\delta(F)]_{(G_\delta, \tau_\delta)}$. Тогда существует такой элемент $\hat{g} \in \hat{G}$, что $\pi_\delta(\hat{g}) = g_\delta$ для любого элемента $\delta \in \Delta$.

Согласно утверждению 1 теоремы X.5, для полноты топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, достаточно проверить, что для любой окрестности $\tilde{V}_0$ единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, существует такое множество $F_0 \in \hat{\Phi}$, что $F_0 \subseteq \tilde{V}_0 \cdot \hat{g}$.

Итак, пусть $\tilde{V}_0$ - окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $\tilde{V}_0 = \bigcap_{\delta \in \Delta} \pi_\delta^{-1}(U_\delta)$, где для каждого $\delta \in \Delta$ множество U_δ является окрестностью единицы в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$.

Для каждого $\delta \in \Delta$ существует такая окрестность W_δ единицы в топологической группе $(G_\delta(\cdot), \tau_\delta)$, что $W_\delta \cdot W_\delta \subseteq U_\delta$ и существует (см утверждение 1 теоремы X.5) такое множество $F_\delta \in \hat{\Phi}$, что $\pi_\delta(F_\delta) \subseteq W_\delta \cdot g_\delta$.

Так как $\hat{\Phi}$ является фильтром Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ и $\tilde{V}_1 = \bigcap_{\delta \in \Delta} \pi_\delta^{-1}(W_\delta)$ является окрестностью единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, то существует такое множество $F_0 \in \hat{\Phi}$, что $F_0 \cdot F_0^{-1} \subseteq \tilde{V}_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \pi_\delta(F_0 \cdot \hat{g}^{-1}) &= \pi_\delta(F_0) \cdot (\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} \subseteq \\ \pi_\delta(F_0) \cdot ((\pi_\delta(F_\delta \cap F_0))^{-1} \cdot \pi_\delta(F_\delta \cap F_0)) \cdot (\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} &\subseteq \\ \pi_\delta(F_0) \cdot (\pi_\delta(F_0))^{-1} \cdot \pi_\delta(F_\delta) \cdot (\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} &\subseteq \\ \pi_\delta(F_0 \cdot F_0^{-1}) \cdot \pi_\delta(F_\delta) \cdot (\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} &\subseteq \pi_\delta(F_0 \cdot F_0^{-1}) \cdot W_\delta \cdot g_\delta \cdot (\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} \subseteq \\ \pi_\delta(F_0 \cdot F_0^{-1}) \cdot W_\delta \cdot g_\delta \cdot (\pi_\delta(\hat{g}))^{-1} &= \pi_\delta(V_1) \cdot U_\delta \cdot g_\delta \cdot g_\delta^{-1} = W_\delta \cdot W_\delta \subseteq U_\delta \text{ для} \\ \text{любого } \delta \in \Delta. \end{aligned}$$

Так как $\tilde{V}_0 = \bigcap_{\delta \in \Delta} \pi_\delta^{-1}(U_\delta)$, то $F_0 \cdot \hat{g}^{-1} \subseteq \tilde{V}_0$.

Итак, мы доказали, что топологическая группа является полной группой, и значит, мы доказали, что $2 \Rightarrow 3$.

Пусть теперь топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ является полной группой. Так как, согласно утверждению 2 теореме IX.4, группа $\tilde{G}(\cdot)$ является замкнутой подгруппой в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, то из теоремы X.14 следует, что и топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ будет полной группой.

Этим мы доказали, что $3 \Rightarrow 4$.

Пусть топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ является полной группой и $\delta_0 \in \Delta$. Если Φ_{δ_0} - фильтр Коши в топологической группе $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ и $\hat{G}_{\delta_0} = \{\hat{g} \in \hat{G} \mid \pi_{\delta_0}(\hat{g}) = e_{\delta_0} \text{ для } \delta \neq \delta_0\}$, то согласно теореме IX.4, топологические группы $(\hat{G}_{\delta_0}, \hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}})$ и $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ являются топологически изоморфными группами, причем $\pi_{\delta_0}|_{\hat{G}_{\delta_0}} : (\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}}) \rightarrow (G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ является топологическим изоморфизмом.

Так как $\hat{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}} = \tilde{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}}$ и $\hat{G}_{\delta_0}(\cdot) \subseteq \tilde{G}(\cdot)$, то топологические группы $(\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\hat{G}_{\delta_0}})$ и $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$ будут топологически изоморфными, и значит, совокупность $\hat{\Phi}_{\delta_0} = \{(\pi_{\delta_0}|_{\tilde{G}_{\delta_0}})^{-1}(F) \mid F \in \Phi_{\delta_0}\}$ будет фильтром Коши в

топологической группе $(\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \tilde{\tau} |_{\hat{G}_{\delta_0}})$, и поскольку $(\hat{G}_{\delta_0}(\cdot), \tilde{\tau} |_{\hat{G}_{\delta_0}})$ является подгруппой топологической группы $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, то совокупность $\hat{\Phi}_{\delta_0}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$.

Так как топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ является полной группой, то $\bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [(\pi_{\delta_0} |_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F)]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \neq \emptyset$. Тогда, из непрерывности гомоморфизма

$\pi_{\delta_0} : (\tilde{G}, \tilde{\tau}) \rightarrow (G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})$ и утверждения 4 теоремы В.21 следует, что

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \pi_{\delta_0} \left(\bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [(\pi_{\delta_0} |_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F)]_{(\tilde{G}, \tilde{\tau})} \right) &= \bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} \pi_{\delta_0} ([(\pi_{\delta_0} |_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F)]_{(\tilde{G}, \tilde{\tau})}) \subseteq \\ &\bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [\pi_{\delta_0} ((\pi_{\delta_0} |_{\hat{G}_{\delta_0}})^{-1}(F))]_{(G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})} = \bigcap_{F \in \Phi_{\delta_0}} [F]_{(G_{\delta_0}, \tau_{\delta_0})}. \end{aligned}$$

Из произвольности фильтра Φ следует полнота топологической группы $(G_{\delta_0}(\cdot), \tau_{\delta_0})$.

Этим доказано, что $4 \Rightarrow 1$, и значит, теорема полностью доказана.

Определение Х.18. Пусть $(\Delta, \leq)$ является направленностью (см. А.19), и $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа. Тогда:

- любое множество вида $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ элементов группы $G(\cdot)$ называется *последовательностью*;

- элемент $g \in G$ называется *пределом последовательности* $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, если для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g^{-1} \in V_1$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta_0 \leq \delta$ (в этом случае будем писать $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$);

- последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ элементов группы $G(\cdot)$ называется *последовательностью Коши в топологической группе* $(G(\cdot), \tau)$, если для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} \subseteq V$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta_0 \leq \delta$.

Теорема Х.19. Пусть $(\Omega, \leq)$ - поднаправленность направленности $(\Delta, \leq)$ (см. А.19). Если $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - последовательность Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и $g \in G$, то верны следующие утверждения:

1. для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_\rho^{-1} \subseteq V$ для любых $\delta, \rho \in \Delta$ таких, что $\delta_0 \leq \delta$ и $\delta_0 \leq \rho$.

2. $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$ тогда и только тогда, когда $g = \lim_{\delta \in \Omega} g_\delta$;

3. если $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$, то последовательность $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $g^{-1} = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta^{-1}$.

Доказательство. Если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq V$, и поскольку $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} \subseteq V_1$ для любого $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_0$.

Тогда для любых $\delta, \rho \in \Delta$ таких, что $\delta_0 \leq \delta$ и $\delta_0 \leq \rho$ имеем, что $g_\delta \cdot g_\rho^{-1} = g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} \cdot g_{\delta_0} \cdot g_\rho^{-1} = (g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1}) \cdot (g_\rho \cdot g_{\delta_0}^{-1})^{-1} \subseteq V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq V$.

Из произвольности окрестности V следует, что утверждение 1 доказано.

Пусть теперь $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$ и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g^{-1} \in V$ для любого $\delta \in \Delta$ и $\delta_0 \leq \delta$.

Так как частично упорядоченное множество $(\Omega, \leq)$ является поднаправленностью направленности $(\Delta, \leq)$, то существует такой элемент $\rho_0 \in \Omega$, что $\delta_0 \leq \rho_0$. Тогда, если $\rho \in \Omega$ - такой элемент, что $\rho_0 \leq \rho$, то $\delta_0 \leq \rho$, и значит, $g_\rho \cdot g^{-1} \subseteq V$.

Из произвольности окрестности V следует, что $g = \lim_{\delta \in \Omega} g_\delta$.

Если теперь $g = \lim_{\delta \in \Omega} g_\delta$, и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, и существует такой элемент $\rho_0 \in \Omega$, что $g_\rho \cdot g^{-1} \in V_1$ для любого элемента $\rho \in \Omega$ такого, что $\rho \geq \rho_0$.

Так как последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно утверждению 1,

существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_\gamma^{-1} \subseteq V_1$ для любых $\delta, \gamma \in \Delta$ таких, что $\delta \geq \delta_0$ и $\gamma \geq \delta_0$.

Поскольку $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством и $\Omega \subseteq \Delta$, то (см. А.19) существует такой элемент $\delta_1 \in \Delta$, что $\delta_1 \geq \rho_0$ и $\delta_1 \geq \delta_0$, и поскольку $(\Omega, \leq)$ является поднаправленностью направленности $(\Delta, \leq)$, то существует такой элемент $\rho_1 \in \Omega$, что $\rho_1 \geq \delta_1$. Тогда $\rho_1 \geq \rho_0$ и $\rho_1 \geq \delta_0$, и для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \rho_1$ имеем, что $\delta \geq \delta_0$, и значит, $g_\delta \cdot g^{-1} = g_\delta \cdot g_{\rho_1}^{-1} \cdot g_{\rho_1} \cdot g^{-1} \in V_1 \cdot V_1 \subseteq V$

Из произвольности окрестности V следует, что $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$, и значит, утверждение 2 доказано.

Пусть теперь в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши и $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$.

Если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $g^{-1} \cdot V_1^{-1} \cdot g \subseteq V$, и существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g^{-1} \in V_1$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_0$. Тогда $g_\delta^{-1} \cdot (g^{-1})^{-1} =$

$$g_\delta^{-1} \cdot g = g^{-1} \cdot g \cdot g_\delta^{-1} \cdot g = g^{-1} \cdot (g_\delta \cdot g^{-1})^{-1} \cdot g \subseteq g^{-1} \cdot V_1^{-1} \cdot g \subseteq V.$$

Из произвольности окрестности V следует, что $g^{-1} = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta^{-1}$.

Для завершения доказательства утверждения 3 осталось проверить, что $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

В самом деле, пусть V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot (g^{-1} \cdot V_1 \cdot g) \subseteq V$. Так как $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$, то существует такой элемент $\delta_1 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g^{-1} \in V_1$, и значит, $g_\delta \in V_1 \cdot g$ для любого элемента $\delta \geq \delta_1$.

Аналогично, так как $g^{-1} = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta^{-1}$, то существует такой элемент $\delta_2 \in \Delta$, что $g_\delta^{-1} \cdot g = g_\delta^{-1} \cdot (g^{-1})^{-1} \in V_1$, и значит, $g_\delta^{-1} \in V_1 \cdot g^{-1}$ для любого элемента $\delta \geq \delta_2$.

Так как $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, то существует такое $\delta_3 \in \Delta$, что $\delta_3 \geq \delta_1$ и $\delta_3 \geq \delta_2$. Тогда если $\delta \geq \delta_3 \geq \delta_1$ и $\rho \geq \delta_3 \geq \delta_2$, то

$$g_\delta^{-1} \cdot (g_\rho^{-1})^{-1} = g_\delta^{-1} \cdot g_\rho \in V_1 \cdot (g \cdot V_1 \cdot g^{-1}) \subseteq V.$$

Из произвольности окрестности V следует, что $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Определение X.20. Пусть $B = \{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Если $V_\delta \neq V_\rho$ для любых элементов $\delta, \rho \in \Delta$, для которых $\delta \neq \rho$, то будем считать, что $\delta \leq \rho$, если $V_\rho \subseteq V_\delta$. Тогда частично упорядоченное множество $(\Delta, \leq)$ будет направленностью.

Направленное множество $(\Delta, \leq)$ будем называть *направленностью*, заданной базисом B окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Теорема X.21. Если $(G(\cdot), \tau)$ - топологическая группа, то следующие утверждения эквивалентны:

1. топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой;
2. для любого направленного множества $(\Lambda, \leq)$, произвольная последовательность Коши $\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ имеет предел в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$;
3. для любого базиса $\{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и направленного множества $(\Lambda, \leq)$, которое задается этим базисом окрестностей, произвольная последовательность Коши $\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ имеет предел в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Пусть утверждение 1 является верным, и пусть топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой.

Если $(\Lambda, \leq)$ - произвольное направленное множество и $\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ - произвольная последовательность Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то для каждого элемента $\lambda_0 \in \Lambda$ рассмотрим множество $F_{\lambda_0} = \{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, \lambda \geq \lambda_0\}$ элементов топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, и проверим, что совокупность $\Phi = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как $g_\lambda \in F_\lambda$, то $F_\lambda \neq \emptyset$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Кроме того, если $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, то из того, что $(\Lambda, \leq)$ является направленным множеством, следует, что существует такой элемент $\lambda_3 \in \Lambda$, что $\lambda_3 \geq \lambda_1$ и $\lambda_3 \geq \lambda_2$. Тогда $F_{\lambda_3} \subseteq F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_2}$, и значит (см. теорему А.25), совокупность $\Phi = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ является базисом некоторого фильтра $\tilde{\Phi}$.

Покажем, что $\tilde{\Phi}$ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

В самом деле, если V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то из того, что $\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и утверждения 1 теоремы Х.19, следует, что существует такой элемент $\lambda_0 \in \Lambda$, что $g_\lambda \cdot g_\sigma^{-1} \in V$ для любых $\lambda, \sigma \in \Lambda$ таких, что $\lambda \geq \lambda_0$ и $\sigma \geq \lambda_0$.

Тогда $F_{\lambda_0} \cdot F_{\lambda_0}^{-1} \subseteq V$. Так как $\Phi \subseteq \tilde{\Phi}$, то из произвольности окрестности V следует, что $\tilde{\Phi}$ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой, то $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [F_\lambda]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$ и пусть $g_0 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [F_\lambda]_{(G, \tau)}$.

Покажем, что $g_0 = \lim_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$.

Пусть V_0 - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Так как $g_0 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [F_\lambda]_{(G, \tau)}$, то, согласно утверждению 1 теоремы Х.5, существует такой элемент $\lambda_1 \in \Lambda$, что $F_{\lambda_1} \subseteq V_0 \cdot g_0$. Тогда $g_\lambda \in F_{\lambda_1} \subseteq V_0 \cdot g_0$ для любого элемента $\lambda \in \Lambda$ такого, что $\lambda \geq \lambda_1$.

Из произвольности окрестности V_0 следует, что $g_0 = \lim_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$.

Итак, мы доказали, что $1 \Rightarrow 2$.

Пусть теперь верно утверждение 2.

Если $\{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $(\Delta, \leq)$ - направленное множество, которое задается этим базисом окрестностей, то, взяв в утверждении 2 этой теоремы $(\Delta, \leq) = (\Delta, \leq)$, получим, верность утверждения 3.

Итак, мы доказали, что $2 \Rightarrow 3$.

Пусть теперь верно утверждение 3, и пусть Φ - произвольный фильтр Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Выберем в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ некоторый базис окрестностей $\{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ единицы, и рассмотрим направленное множество $(\Delta, \leq)$, которое задается этим базисом окрестностей (см. определение Х.20).

Построим последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ элементов группы $G(\cdot)$ следующим образом:

Если $\delta \in \Delta$, то, поскольку Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, существует такое множество $F_\delta \in \Phi$, что $F_\delta \cdot F_\delta^{-1} \subseteq V_\delta$. В качестве g_δ возьмем произвольный элемент из множества F_δ .

Покажем, что построенная последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ элементов является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

В самом деле, если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $V_{\delta_0} \cdot V_{\delta_0} \subseteq V$. Тогда $V_\delta \subseteq V_{\delta_0}$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_0$. Если $g \in F_\delta \cap F_{\delta_0}$, то $g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} = g_\delta \cdot g^{-1} \cdot g \cdot g_{\delta_0}^{-1} \in F_\delta \cdot F_\delta^{-1} \cdot F_{\delta_0} \cdot F_{\delta_0}^{-1} \subseteq V_\delta \cdot V_{\delta_0} \subseteq V_{\delta_0} \cdot V_{\delta_0} \subseteq V$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_0$.

Из произвольности окрестности V следует, что последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ элементов является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как, согласно допущению, верно утверждение 3, то существует такой элемент $g_0 \in G$, что $g_0 = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$.

Для завершения доказательства того, что $3 \Rightarrow 1$, осталось проверить, что $g_0 \in [F]_{(G, \tau)}$ для любого множества $F \in \Phi$.

Пусть $F \in \Phi$ и U - произвольная окрестность точки g_0 в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда (см. теорему II.2) $U \cdot g_0^{-1}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Так как $\{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $V_{\delta_0} \cdot V_{\delta_0} \subseteq U \cdot g_0^{-1}$ для некоторого элемента $\delta_0 \in \Delta$.

Так как $g_0 = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$, то существует такой элемент δ_1 , что $g_\delta \cdot g_0^{-1} \in V_{\delta_0}$ для всех $\delta \in \Delta$ таких, что $\delta \geq \delta_1$. Из того, что $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, следует, что существует такой элемент $\delta_2 \in \Delta$, что $\delta_2 \geq \delta_1$ и $\delta_2 \geq \delta_0$.

Так как Φ является фильтром и $F, F_{\delta_2} \in \Phi$, то $F \cap F_{\delta_2} \neq \emptyset$, и пусть $g \in F \cap F_{\delta_2} \neq \emptyset$. Тогда из определения множеств F_δ следует, что $F_{\delta_2} \cdot F_{\delta_2}^{-1} \subseteq V_{\delta_2}$.

Так как $\delta_2 \geq \delta_0$, то, согласно определению X.20, $V_{\delta_2} \subseteq V_{\delta_0}$, и поскольку $\delta_2 \geq \delta_1$, то (см. определение элемента δ_1) $g_{\delta_2} \cdot g_0^{-1} \in V_{\delta_0}$. Тогда $g \cdot g_0^{-1} = g \cdot g_{\delta_2}^{-1} \cdot g_{\delta_2} \cdot g_0^{-1} \in F_{\delta_2} \cdot F_{\delta_2}^{-1} \cdot g_{\delta_2} \cdot g_0^{-1} \subseteq V_{\delta_2} \cdot V_{\delta_0} \subseteq V_{\delta_0} \cdot V_{\delta_0} \subseteq U \cdot g_0^{-1}$, и значит, $g \in U$.

Итак, мы доказали, что $g \in U \cap F$, и значит, $\emptyset \neq U \cap F$.

Из произвольности окрестности U следует, что $g_0 \in [F]_{(G,\tau)}$, и значит, $3 \Rightarrow 1$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.22. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой и нормальный делитель N содержится в пересечении всех окрестностей единицы топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, то факторгруппа $(G(\cdot), \tau) / N$ является полной топологической группой.

Доказательство. Если $\omega : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ - канонический гомоморфизм и $\bar{\Phi}$ - фильтр Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$, то совокупность $\Delta = \{\omega^{-1}(\bar{F}) \mid \bar{F} \in \bar{\Phi}\}$ подмножеств группы $G(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы A.25, и значит, она является базисом некоторого фильтра Φ в группе $G(\cdot)$.

Покажем, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если V - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и V_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, то $\omega(V_1)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$, и значит, существует такое множество $\bar{F} \in \bar{\Phi}$, что $\bar{F} \cdot \bar{F}^{-1} \subseteq \omega(V_1)$. Тогда $\omega^{-1}(\bar{F}) \cdot (\omega^{-1}(\bar{F}))^{-1} = \omega^{-1}(\bar{F} \cdot \bar{F}^{-1}) \subseteq \omega^{-1}(\omega(V_1))$.

Так как $N \subseteq V_1$, то $\omega^{-1}(\omega(V_1)) = N \cdot V_1 \subseteq V_1 \cdot V_1 \subseteq V$, и значит, $\omega^{-1}(\bar{F}) \cdot (\omega^{-1}(\bar{F}))^{-1} \subseteq V$. Из произвольности окрестности V следует, что Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой, то $\emptyset \neq \bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G,\tau)} \subseteq \bigcap_{\bar{F} \in \bar{\Phi}} [\omega^{-1}(\bar{F})]_{(G,\tau)}$, и поскольку канонический гомоморфизм $\omega : (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau) / N$ является непрерывным, то (см. утверждение 4 теоремы B.21) $\omega([\omega^{-1}(\bar{F})]_{(G,\tau)}) \subseteq [\omega(\omega^{-1}(\bar{F}))]_{(G,\tau)/N} = [\bar{F}]_{(G,\tau)/N}$. Тогда $\emptyset \neq \omega(\bigcap_{\bar{F} \in \bar{\Phi}} [\omega^{-1}(\bar{F})]_{(G,\tau)}) \subseteq \bigcap_{\bar{F} \in \bar{\Phi}} [\bar{F}]_{(G,\tau)/N}$.

Из произвольности фильтра $\overline{\Phi}$ следует, что топологическая группа $(G(\cdot), \tau) / N$ является полной группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.23. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой, и обладает счетным базисом окрестностей единицы, то для любого нормального делителя A факторгруппа $(G(\cdot), \tau) / A$ (см. VIII.6) является полной топологической группой.

Доказательство. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает счетным базисом окрестностей единицы, то по индукции можно выбрать такой счетный базис $\{V_1, V_2, \dots\}$ симметричных (т.е. $V_j^{-1} = V_j$) окрестностей единицы, что $V_{j+1} \cdot V_{j+1} \subseteq V_j$ для любого натурального числа j .

Тогда, поскольку $V_{k+n} \cdot V_{k+n} \cdot V_{k+n-1} \cdot \dots \cdot V_{k+1} \subseteq V_{k+n-1} \cdot V_{k+n-1} \cdot \dots \cdot V_{k+1}$, то, проводя индукцию по числу n , легко доказывается, что $V_{k+n} \cdot V_{k+n} \cdot V_{k+n-1} \cdot \dots \cdot V_{k+1} \subseteq V_k$ для любых натуральных чисел k и n , и значит, $V_{k+n} \cdot V_{k+n-1} \cdot \dots \cdot V_{k+1} \subseteq V_k$ для любых натуральных чисел k и n .

Если $f: G(\cdot) \rightarrow G(\cdot) / A$ - канонический гомоморфизм (см. Б.11), то (см. VIII.6) совокупность $\{\overline{V}_1 = f(V_1), \overline{V}_2 = f(V_2), \dots\}$ будет базисом симметричных окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / N$, причем $\overline{V}_{j+1} \cdot \overline{V}_{j+1} \subseteq \overline{V}_j$ для любого натурального числа j .

Возможны следующие 2 случая:

I. Множество $\overline{V} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{V}_j$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / A$;

II. Множество $\overline{V} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{V}_j$ не является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / A$.

Рассмотрим каждый из этих двух случаев в отдельности.

Если $\overline{V} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{V}_j$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / A$, то в топологической группе $(G(\cdot), \tau) / A$ пересечение всех окрестностей единицы будет окрестностью единицы, и тогда, согласно теореме X.10, топологическая группа $(G(\cdot), \tau) / A$ будет полной группой.

Итак, для первого случая теорема доказана.

Пусть теперь $\bar{V} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{V}_j$ не является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$. Тогда базис $\{V_1, V_2, \dots\}$ окрестностей можно выбрать таким образом, чтобы еще выполнялось неравенство $\bar{V}_j = f(V_j) \neq \bar{V}_{j+1} = f(V_{j+1})$ для любого натурального числа j .

Так как $\bar{V}_j \supset \bar{V}_{j+1}$, то обычный порядок на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел совпадает с порядком на множестве $\mathbb{N}$, который задается базисом $\{V_1, V_2, \dots\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ (см. определение X.20) и совпадает с порядком, который задается базисом $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$.

Пусть теперь $\{\bar{g}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ - последовательность Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$.

По индукции построим такую строго возрастающую последовательность $k_1 < k_2 < \dots$ натуральных чисел, что $\bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_j}^{-1} \in \bar{V}_j$ для любого $k \geq k_j$, и для каждого натурального числа j .

Так как $\{\bar{g}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$, то, существует такое натуральное число k_1 , что $\bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_1}^{-1} \in \bar{V}_1$ для любого натурального числа $k \geq k_1$.

Допустим, что уже построены такие натуральные числа $k_1 < k_2 < \dots < k_n$, что $\bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_j}^{-1} \in \bar{V}_j$ для всех $k \geq k_j$, где $1 \leq j \leq n-1$.

Тогда, в частности, $\bar{g}_{k_{j+1}} \cdot \bar{g}_{k_j}^{-1} \in \bar{V}_j$ для всех $1 \leq j \leq n-1$. Существует такое натуральное число m , что $\bar{g}_k \cdot \bar{g}_m^{-1} \in \bar{V}_{n+1}$ для любого натурального числа $k \geq m$. Если возьмем $k_{n+1} = \max\{k_n + 1, m\}$, то $\bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_{n+1}}^{-1} = \bar{g}_k \cdot \bar{g}_m^{-1} \cdot \bar{g}_m \cdot \bar{g}_{k_{n+1}}^{-1} = (\bar{g}_k \cdot \bar{g}_m^{-1}) \cdot (\bar{g}_{k_{n+1}} \cdot \bar{g}_m^{-1})^{-1} \in \bar{V}_{n+1} \cdot \bar{V}_{n+1}^{-1} = \bar{V}_{n+1} \cdot \bar{V}_{n+1} \subseteq \bar{V}_n$ для любого $k \geq k_{n+1}$ и $\bar{g}_{k_{n+1}} \cdot \bar{g}_{k_n}^{-1} \in \bar{V}_n$, и значит, $\bar{g}_{k_{n+1}} \in \bar{V}_n \cdot \bar{g}_{k_n}$.

Итак, мы построили такую возрастающую последовательность $k_1 \leq k_2 \leq \dots$ натуральных чисел, что $\bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_j}^{-1} \in \bar{V}_j$ для любых натуральных чисел j и $k \geq k_j$. В частности, $\bar{g}_{k_{j+1}} \cdot \bar{g}_{k_j}^{-1} \in \bar{V}_j$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Теперь по индукции построим такую последовательность $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ элементов топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, что $f(h_j) = \bar{g}_{k_j}$ и $h_{i+1} \cdot h_i^{-1} \in V_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

В качестве h_1 возьмем произвольный элемент из множества $f^{-1}(g_{k_1})$ и допустим, что уже определены такие элементы $h_1, \dots, h_n$ топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, что $f(h_j) = \bar{g}_{k_j}$ и $h_{i+1} \cdot h_i^{-1} \in V_i$ для любого $1 \leq i \leq n-1$.

Так как $\bar{g}_{k_{n+1}} \in \bar{V}_n \cdot \bar{g}_{k_n} = f(V_n) \cdot f(h_n) = f(V_n \cdot h_n)$, то существует такой элемент $h_{n+1} \in V_n \cdot h_n$, что $f(h_{n+1}) = \bar{g}_{k_{n+1}}$. Тогда $h_{n+1} \cdot h_n^{-1} \in V_n$, и значит, уже элементы $h_1, \dots, h_{n+1}$ удовлетворяют требуемым условиям.

Итак, мы построили такую последовательность $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ элементов топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, что $f(h_j) = \bar{g}_{k_j}$ и $h_{i+1} \cdot h_i^{-1} \in V_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

В самом деле, пусть U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и n - такое натуральное число, что $V_{n-1} \subseteq U$.

Тогда, если $k \geq n$, то, учитывая свойства окрестностей V_i , которые были отмечены вначале доказательства теоремы, получим, что $h_k \cdot h_n^{-1} = (h_k \cdot h_{k-1}^{-1}) \cdot (h_{k-1} \cdot h_{k-2}^{-1}) \cdot \dots \cdot (h_{n+1} \cdot h_n^{-1}) \in V_{k-1} \cdot V_{k-2} \cdot \dots \cdot V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq U$.

Из произвольности окрестности U следует, что $\{h_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной, то, согласно теореме X.21, существует такой элемент $h \in G$, что $h = \lim_{j \in \mathbb{N}} h_j$.

Покажем теперь, что $f(h) = \lim_{j \in \mathbb{N}} \bar{g}_{k_j}$.

Пусть $\bar{U}$ - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$. Существует такое натуральное число n , что $\bar{V}_{n-1} \subseteq \bar{U}$, и, так как $h = \lim_{j \in \mathbb{N}} h_j$, то существует такое натуральное число m , что $h_j \cdot h^{-1} \in V_n$ для любого натурального числа $j \geq m$. Тогда для любого натурального числа $k \geq k_m \geq m$ (определение чисел k_j см. выше) имеем, $\bar{g}_k \cdot (f(h))^{-1} = \bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_m}^{-1} \cdot \bar{g}_{k_m}^{-1} \cdot (f(h))^{-1} = \bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_m}^{-1} \cdot f(h_k) \cdot f(h^{-1}) = \bar{g}_k \cdot \bar{g}_{k_m}^{-1} \cdot f(h_k \cdot h^{-1}) \in \bar{V}_m \cdot f(V_n) \subseteq \bar{V}_n \cdot \bar{V}_n \subseteq \bar{V}_{n-1} \subseteq \bar{U}$.

Из произвольности окрестности $\overline{U}$ следует, что $f(h) = \lim_{j \in \mathbb{N}} \overline{g}_j$, а из произвольности последовательности $\{\overline{g}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ следует, что $(G(\cdot), \tau) / A$ является полной топологической группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.24. Пусть на группе $G(\cdot)$ задано некоторое множество $\{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ групповых топологий и $\tau = \sup\{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Если $(\Delta, \leq)$ - произвольное направленное множество, $g \in G$ и $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - такая последовательность элементов группы $G(\cdot)$, что $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство. Если U - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существуют такое конечное подмножество $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda$, и такие окрестности $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_{\lambda_1}), \dots, (G(\cdot), \tau_{\lambda_n})$, соответственно, что $U = \bigcap_{j=1}^n V_{\lambda_j}$.

Так как $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau_{\lambda_j})$ для любого $1 \leq j \leq n$, то для каждого $1 \leq j \leq n$ существует такой элемент $\delta_j \in \Delta$, что $g_\rho \cdot g^{-1} \in V_{\lambda_j}$ для любого элемента $\rho \in \Delta$ такого, что $\rho \geq \delta_j$.

Так как $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, то существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $\delta_0 \geq \delta_j$ для любого $1 \leq j \leq n$. Тогда $g_\rho \cdot g^{-1} \in \bigcap_{j=1}^n V_{\lambda_j} = U$ для любого элемента $\rho \in \Delta$ такого, что $\rho \geq \delta_0$.

Из произвольности окрестности U следует, что $g = \lim_{\delta \in \Delta} g_\delta$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.25. Для любой отделимой, топологической коммутативной группы $(G(\cdot), \tau)$ существует такая полная топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}')$, и существует такой нормальный делитель A в группе $\tilde{G}(\cdot)$, что факторгруппа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}') / A$ и топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ будут топологически изоморфны

Доказательство. Доказательство проведем в несколько этапов.

I этап. Построение полной топологической группы $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$.

Пусть $\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел, и $\{(G_j(\cdot), \tau_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ - совокупность таких топологических групп, что $(G_j(\cdot), \tau_j) = (G(\cdot), \tau)$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим прямое произведение $\hat{G} = \prod_{j=1}^{\infty} G_j(\cdot)$ и прямую сумму

$\tilde{G} = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(\cdot)$ совокупности $\{G_j(\cdot) \mid j \in \mathbb{N}\}$ групп.

Для любой пары (k, j) натуральных чисел рассмотрим на группе G_j

групповую топологию $\tau_{(k,j)} = \begin{cases} \tau_j, & \text{если } k \neq j; \\ \text{дискретной топологии,} & \text{если } k = j, \end{cases}$ и

для любого натурального числа n , рассмотрим кирпичную топологию $\tilde{\tau}_n$ на

прямом произведении $\hat{G} = \prod_{j=1}^{\infty} G_j(\cdot)$ семейства $\{(G_j(\cdot), \tau_{n,j}) \mid j \in \mathbb{N}\}$

топологических групп, и пусть $\tilde{\tau} = \sup \{\tilde{\tau}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Покажем в начале, что топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ является полной группой.

Действительно, пусть $(\Delta, \leq)$ - произвольное направленное множество, и $\{\tilde{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - последовательность Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$. Так как $\tilde{\tau} \geq \tilde{\tau}_n$ для любого натурального числа n , то $\{\tilde{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n)$ для любого натурального числа n .

Из непрерывности гомоморфизма $\pi_n : (\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n) \rightarrow (G_n(\cdot), \tau_{(n,n)})$ следует, что $\{\pi_n(\tilde{g}_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши в топологической группе $(G_n(\cdot), \tau_{(n,n)})$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и так как $\tau_{(n,n)}$ является дискретной топологией, то существует такой элемент $\delta_n \in \Delta$, что $\pi_n(\tilde{g}_\rho \cdot \tilde{g}_\eta^{-1}) = e_n$ для любых $\rho, \eta \in \Delta$, таких что $\rho \geq \delta_n$ и $\eta \geq \delta_n$, и значит, $\pi_n(\tilde{g}_\rho) = \pi_n(\tilde{g}_\eta)$ для любых $\rho, \eta \in \Delta$, таких что $\rho \geq \delta_n$ и $\eta \geq \delta_n$.

Для каждого натурального числа n зафиксируем этот элемент $\delta_n \in \Delta$, и рассмотрим такой элемент $\hat{g}$ из группы $\hat{G}(\cdot)$, что $\pi_k(\hat{g}) = \pi_k(\tilde{g}_{\delta_k})$ для любого натурального числа k .

Покажем, что $\hat{g} = \lim_{\delta \in \Delta} \tilde{g}_\delta$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$.

Согласно теореме X.24, достаточно доказать, что $\hat{g} = \lim_{\delta \in \Delta} \tilde{g}_\delta$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n)$ для любого натурального числа n .

Итак, пусть $n \in \mathbb{N}$ и U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n)$. Тогда $U = \prod_{j=1}^{\infty} V_j$, где V_j - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_j)$, если $j \neq n$ и $V_n = \{e\}$.

Так как $\{\tilde{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n)$, то найдется такой элемент $\rho \in \Delta$, что $\rho \geq \delta_n$ и $\tilde{g}_\delta \cdot \tilde{g}_\eta^{-1} \in U$ для любых $\delta, \eta \in \Delta$ таких, что $\delta \geq \rho$ и $\eta \geq \rho$.

Если теперь $\gamma \in \Delta$ такой элемент, что $\gamma \geq \rho$, то $\gamma \geq \delta_n$. Тогда, $\pi_n(\tilde{g}_\gamma \cdot \hat{g}^{-1}) = \pi_n(\tilde{g}_\gamma) \cdot \pi_n(\hat{g}^{-1}) = \pi_n(\tilde{g}_\gamma) \cdot \pi_n(\tilde{g}_{\delta_n}^{-1}) = e$.

Кроме того, если $k \neq n$ и $\gamma' \in \Delta$ такой элемент, что $\gamma' \geq \rho$ и $\gamma' \geq \delta_k$, то $\pi_k(\tilde{g}_{\gamma'}) = \pi_k(\tilde{g}_{\delta_k})$, и тогда, $\pi_k(\tilde{g}_\gamma \cdot \hat{g}^{-1}) = \pi_k(\tilde{g}_\gamma \cdot \tilde{g}_{\gamma'}^{-1}) \cdot \pi_k(\tilde{g}_{\gamma'} \cdot \hat{g}^{-1}) = \pi_k(\tilde{g}_\gamma \cdot \tilde{g}_{\gamma'}^{-1}) \cdot \pi_k(\tilde{g}_{\gamma'}) \cdot \pi_k(\tilde{g}_{\delta_k}^{-1}) = \pi_k(\tilde{g}_\gamma \cdot \tilde{g}_{\gamma'}^{-1}) \in V_k$.

Итак, мы доказали, что $\pi_k(\tilde{g}_\gamma \cdot \hat{g}^{-1}) \in V_k$ для любого элемента $\gamma \in \Delta$ такого, что $\gamma \geq \rho$ и любого натурального числа k , и значит,

$\tilde{g}_\gamma \cdot \hat{g}^{-1} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \pi_k^{-1}(V_k) = U$. Из произвольности окрестности U следует, что

$\hat{g} = \lim_{\delta \in \Delta} \tilde{g}_\delta$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n)$, а из произвольности числа n

следует, что $\hat{g} = \lim_{\delta \in \Delta} \tilde{g}_\delta$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$.

Итак, мы показали, что любая последовательность $\{\tilde{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ имеет предел, а тогда, согласно теореме X.21, топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ является полной группой.

Так как, согласно утверждению 2 теоремы IX.4, группа $\tilde{G}$ является замкнутой подгруппой в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau}_n)$ для любого натурального числа n , то группа $\tilde{G}$ будет замкнутой подгруппой в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \tilde{\tau})$. Тогда, согласно теореме X.14, топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$ является полной группой.

Итак, мы построили полную топологическую группу $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}')$, где $\tau' = \tilde{\tau}|_{\tilde{G}}$.

II этап. Построение топологического, сюръективного гомоморфизма $f: (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$.

Так как для каждого элемента $\tilde{g} \in \tilde{G}$ множество $\{k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(\tilde{g}) \neq e\}$ является конечным и $G_j(\cdot) = G(\cdot)$, то в группе $G(\cdot)$ имеется единственный элемент $f(\tilde{g}) = \pi_1(\tilde{g}) \cdot \dots \cdot \pi_{s(\tilde{g})}(\tilde{g})$, где $s(\tilde{g}) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(\tilde{g}) \neq e\}$.

Из коммутативности группы $G(\cdot)$ легко следует, что $f(\tilde{g} \cdot \tilde{h}) = f(\tilde{g}) \cdot f(\tilde{h})$ для любых элементов $\tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{G}$, и значит, $f: \tilde{G}(\cdot) \rightarrow G(\cdot)$ является групповым гомоморфизмом.

Так как $G' = \{\tilde{g} \in \tilde{G} \mid \pi_j(\tilde{g}) = e \text{ для } j \neq 1\} \subseteq \tilde{G}$ и $\pi_1(G') = G_1 = G$, то $f: \tilde{G}(\cdot) \rightarrow G(\cdot)$ является сюръективным гомоморфизмом.

Покажем теперь, что $f: (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является непрерывным гомоморфизмом. Согласно теореме VIII.3, достаточно проверить его непрерывность в точке e .

Пусть V_0 - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. По индукции построим такую последовательность $V_1, V_2, \dots$ окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_j \cdot V_j \subseteq V_{j-1}$ для любого натурального числа j . Тогда индукцией по числу n легко доказывается, что $V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_n \cdot V_n \subseteq V_0$, и значит, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_n) \subseteq V_0$.

Так как V_j является окрестностью единицы в топологической группе $(G_j(\cdot), \tau_j)$, то $U \cap \tilde{G} = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \pi_k^{-1}(V_k) \right) \cap \tilde{G}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$, причем для любого элемента $\tilde{g} \in U \cap \tilde{G}$ имеем, что $f(\tilde{g}) = \pi_1(\tilde{g}) \cdot \dots \cdot \pi_{s(\tilde{g})}(\tilde{g}) \in V_1 \cdot \dots \cdot V_{s(\tilde{g})} \subseteq V_0$.

Из произвольности элемента $\tilde{g}$ следует, что $f(U \cap \tilde{G}) \subseteq V_0$, и значит, $f: (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является непрерывным гомоморфизмом.

Проверим теперь, что $f: (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является открытым гомоморфизмом.

Пусть W - окрестность единицы в топологической группе $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}|_{\tilde{G}})$. Тогда существуют такие натуральные числа $k_1, \dots, k_n$ и такие окрестности

$U_1, \dots, U_n$ единиц в топологических группах $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}_{k_1} |_{\tilde{G}}), \dots, (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}_{k_n} |_{\tilde{G}})$, соответственно, что $W = \bigcap_{j=1}^n U_j$.

Если $k = \max\{k_1, \dots, k_n\} + 1$, то (см. теорему IX.2) $\pi_k(U_j)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_k(\cdot), \tau_{(k, k_j)})$ для любого $1 \leq j \leq n$.

Так как $k > \max\{k_1, \dots, k_n\}$, то $\pi_k(U_j)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_k(\cdot), \tau_k)$ для любого $1 \leq j \leq n$. Тогда $\bigcap_{j=1}^n \pi_k(U_j)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G_k(\cdot), \tau_k)$, и так как $(G_k(\cdot), \tau_k) = (G(\cdot), \tau)$, то $\bigcap_{j=1}^n \pi_k(U_j)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если, теперь, $W' = \{\tilde{g} \in \tilde{G} \mid \pi_k(\tilde{g}) \in \bigcap_{j=1}^n \pi_k(U_j) \text{ и } \pi_i(\tilde{g}) = e_i \text{ для } i \neq k\}$, то

$$W' = \left(\pi_k^{-1} \left(\bigcap_{j=1}^n \pi_k(U_j) \right) \right) \cap \left(\bigcap_{j \neq k} \pi_j^{-1}(e_j) \right) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j = W, \quad \text{причем}$$

$$\pi_k(W') = \bigcap_{j=1}^n \pi_k(U_j).$$

Из определения гомоморфизма $f: \tilde{G}(\cdot) \rightarrow G(\cdot)$ следует, что $f(W) \supseteq f(W') = \bigcap_{j=1}^n \pi_k(U_j)$, и значит, $f(W)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Из произвольности окрестности W следует (см. теорему VIII.3), что $f: (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau} |_{\tilde{G}}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является открытым гомоморфизмом.

Если, теперь, $A = \{\tilde{g} \in \tilde{G} \mid f(\tilde{g}) = e\}$, то, согласно следствию VIII.11, топологические группы $(G(\cdot), \tau)$ и $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau} |_{\tilde{G}}) / A$ являются топологически изоморфными.

Этим теорема полностью доказана.

Замечание X.26. Так как имеются коммутативные, отделимые топологические группы, которые не являются полными (например, группа $Q(+)$ рациональных чисел с интервальной топологией), то предыдущая теорема показывает, что ограничения, указанные в теоремах X.22 и X.23 являются существенными и не могут быть просто опущенными.

Теорема X.27. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ имеется такой нормальный делитель A , что топологические группы $(A(\cdot), \tau|_A)$ и $(G(\cdot), \tau)/A$ являются полными, то и топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ будет полной группой.

Доказательство. Пусть Φ - фильтр Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)/A$ - канонический гомоморфизм. Тогда, согласно теореме X.2, совокупность $\Delta = \{f(F) \mid F \in \Phi\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$. Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)/A$ является полной группой, то $\bigcap_{F \in \Phi} [f(F)]_{(G(\cdot), \tau)/A} \neq \emptyset$, и пусть $\bar{g}_0 \in \bigcap_{F \in \Phi} [f(F)]_{(G(\cdot), \tau)/A}$.

Если B - совокупность всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно теореме VIII.6, совокупность $\bar{B} = \{f(U) \mid U \in B\}$ будет базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)/A$. Тогда, согласно теореме II.5, $[f(F)]_{(G(\cdot), \tau)/A} = \bigcap_{U \in B} f(U) \cdot f(F) = \bigcap_{U \in B} f(U \cdot F)$, и значит, $\bar{g}_0 \in \bigcap_{U \in B} f(U \cdot F)$ для любого множества $F \in \Phi$.

Зафиксируем некоторый такой элемент $g_0 \in G$, что $f(g_0) = \bar{g}_0$, и рассмотрим совокупность $\Phi' = \{(U \cdot F \cdot g_0^{-1}) \cap A \mid U \in B, F \in \Phi\}$, и покажем, что эта совокупность является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$.

Так как $\bar{g}_0 \in f(U \cdot F)$ для любых $U \in B$ и $F \in \Phi$, то в каждом из множеств $U \cdot F$ содержится такой элемент $g_{U,F}$, что $f(g_{U,F}) = \bar{g}_0$. Тогда $g_{U,F} \cdot g_0^{-1} \in A$, и значит, $(U \cdot F \cdot g_0^{-1}) \cap A \neq \emptyset$. Кроме того, так как $U_1 \cap U_2 \in B$ и $F_1 \cap F_2 \in \Phi$ для любых $U_1, U_2 \in B$ и $F_1, F_2 \in \Phi$, то из включения

$((U_1 \cdot F_1 \cdot g_0^{-1}) \cap A) \cap ((U_2 \cdot F_2 \cdot g_0^{-1}) \cap A) \supseteq ((U_1 \cap U_2) \cdot (F_1 \cap F_2) \cdot g_0^{-1}) \cap A$ следует (см. A.25), что совокупность Φ' является базисом некоторого фильтра $\tilde{\Phi}'$ во множестве A .

Покажем, что фильтр $\tilde{\Phi}'$ является фильтром Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$.

В самом деле, если V_0 - окрестность единицы в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, то существуют такие окрестности U_0 и U_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $V_0 = U_0 \cap A$ и $U_1 \cdot U_1 \cdot U_1^{-1} \subseteq U_0$.

Так как Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое множество $F \in \Phi$, что $F \cdot F^{-1} \subseteq U_1$. Тогда $(U_1 \cdot F \cdot g_0^{-1}) \cap A \in \Phi' \subseteq \tilde{\Phi}'$ и $((U_1 \cdot F \cdot g_0^{-1}) \cap A) \cdot ((U_1 \cdot F \cdot g_0^{-1}) \cap A)^{-1} \subseteq ((U_1 \cdot F \cdot g_0^{-1}) \cdot (U_1 \cdot F \cdot g_0^{-1})^{-1}) \cap A = (U_1 \cdot F \cdot g_0^{-1} \cdot g_0 \cdot F^{-1} \cdot U_1^{-1}) \cap A = (U_1 \cdot F \cdot F^{-1} \cdot U_1^{-1}) \cap A \subseteq (U_1 \cdot U_1 \cdot U_1^{-1}) \cap A \subseteq U_0 \cap A = V_0$.

Из произвольности окрестности V_0 следует, что $\tilde{\Phi}'$ является фильтром Коши в топологической группе $(A(\cdot), \tau|_A)$, и так как топологическая группа $(A(\cdot), \tau|_A)$ является полной группой, то $\bigcap_{\substack{U \in B, \\ F \in \Phi}} [U \cdot F \cdot g_0^{-1}]_{(A, \tau|_A)} \neq \emptyset$.

Если $g_1 \in \bigcap_{\substack{U \in B, \\ F \in \Phi}} [U \cdot F \cdot g_0^{-1}]_{(A, \tau|_A)}$, то, согласно тереме II.5, $g_1 \cdot g_0 \in$

$$\bigcap_{\substack{U \in B, \\ F \in \Phi}} [U \cdot F]_{(A, \tau|_A)} \subseteq \bigcap_{\substack{U \in B, \\ F \in \Phi}} [U \cdot F]_{(G, \tau)} \subseteq \bigcap_{\substack{U \in B, \\ F \in \Phi}} \left(\bigcap_{W \in B} (W \cdot (U \cdot F)) \right) = \bigcap_{\substack{W \in B, \\ U \in B, \\ F \in \Phi}} (W \cdot U \cdot F).$$

Так как для любой окрестности $V \in B$, существуют такие окрестности $U, W \in B$, что $U \cdot W \subseteq V$, то $\bigcap_{\substack{W \in B, \\ U \in B, \\ F \in \Phi}} (W \cdot U \cdot F) \subseteq \bigcap_{\substack{V \in B \\ F \in \Phi}} V \cdot F = \bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)}$, и

значит, $\bigcap_{F \in \Phi} [F]_{(G, \tau)} \neq \emptyset$.

Из произвольности фильтра Φ следует, что топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема X.28. Пусть даны такие отделимые топологические группы $(G(\cdot), \tau)$, $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ и $(G'(\cdot), \tau')$, что группа $G'(\cdot)$ является плотной подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ (см. B.10), и $\tau' = \tau|_{G'}$. Если топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной группой и задан непрерывный групповой гомоморфизм $f: (G'(\cdot), \tau') \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то верны следующие утверждения:

1. существует такой непрерывный групповой гомоморфизм $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, что $\hat{f}|_{G'} = f$;

2. если, кроме указанных условий, топологическая группа (G, τ) является полной группой, $f(G')$ является плотной подгруппой в топологической группе $(\hat{G}, \hat{\tau})$, и групповой гомоморфизм $f: (G'(\cdot), \tau) \rightarrow (f(G'(\cdot)), \hat{\tau}|_{f(G'(\cdot))})$

является топологическим изоморфизмом, то и гомоморфизм $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{f}(G(\cdot)), \hat{\tau}|_{\hat{f}(G(\cdot))})$ будет топологическим изоморфизмом.

Доказательство. Доказательство первого утверждения проведем в несколько этапов.

I этап. Построение отображения $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow ((\hat{G}(\cdot)), \hat{\tau})$.

Пусть $g \in G$ и $B = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ - совокупность всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда для каждого элемента $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим множество $F_{\lambda, g} = G' \cap (V_\lambda \cdot g)$.

Проверим, что совокупность $\Delta_g = \{F_{\lambda, g} \mid \lambda \in \Lambda\}$ является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Так как G' является плотным множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $V_\lambda \cdot g$ является окрестностью элемента g в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $F_{\lambda, g} \neq \emptyset$ для каждого элемента $\lambda \in \Lambda$. Кроме того, легко заметить, что $F_{\lambda_1, g} \cap F_{\lambda_2, g} = (G' \cap (V_{\lambda_1} \cdot g)) \cap (G' \cap (V_{\lambda_2} \cdot g)) = G' \cap ((V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}) \cdot g)$, и так как $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $F_{\lambda_1, g} \cap F_{\lambda_2, g} \in \Delta_g$.

Итак, мы показали, что совокупность Δ_g удовлетворяет теореме А.25, и значит, является базисом некоторого фильтра Φ_g в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Проверим, теперь, что Φ_g является фильтром Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

В самом деле, если V' - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, то существует такой элемент $\lambda_1 \in \Lambda$, что $V' = G' \cap V_{\lambda_1}$, и существует такой элемент $\lambda_2 \in \Lambda$, что $V_{\lambda_2} \cdot V_{\lambda_2}^{-1} \subseteq V_{\lambda_1}$. Тогда $F_{\lambda_2, g} \cdot F_{\lambda_2, g}^{-1} = (G' \cap V_{\lambda_2}) \cdot (G' \cap V_{\lambda_2})^{-1} = G' \cap (V_{\lambda_2} \cdot V_{\lambda_2}^{-1}) \subseteq G' \cap V_{\lambda_1} = V'$.

Из произвольности окрестности V' следует, что Φ_g является фильтром Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Тогда, согласно теореме Х.2, совокупность $\{f(F_{\lambda, g}) \mid \lambda \in \Lambda\}$ является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Так как топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной группой, то $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \neq \emptyset$, и пусть $\bar{g} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$.

Проверим, что $\{\bar{g}\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$. Допустим противное, т.е. $\bar{g}_1 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$ и $\bar{g}_1 \neq \bar{g}$.

Так как топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является отделимой, то существует такая окрестность $\hat{V}$ единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, что $\hat{V} \cdot \hat{g} \cap \hat{V} \cdot \hat{g}_1 = \emptyset$. Согласно утверждению 1 теоремы X.5, существует такой элемент $\lambda_0 \in \Lambda$, что $f(F_{\lambda_0, g}) \subseteq \hat{V} \cdot \hat{g}$ и $f(F_{\lambda_0, g}) \subseteq \hat{V} \cdot \hat{g}_1$, и значит $\hat{V} \cdot \hat{g} \cap \hat{V} \cdot \hat{g}_1 \neq \emptyset$. Получили противоречие с выбором окрестности V .

Итак, мы доказали, что $\{\hat{g}\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})}$.

Если каждому элементу $g \in G$ мы поставим соответствующий элемент $\hat{g} \in \hat{G}$, то мы определим отображение $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Проверим, что $\hat{f}(g) = \hat{g}$ для любого элемента $g \in G$.

В самом деле, если $g \in G$, то $g \in F_{\lambda, g} = G \cap (V_\lambda \cdot g)$ для любого элемента $\lambda \in \Lambda$, и значит, $f(g) \in f(F_{\lambda, g}) \subseteq [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$ для любого элемента $\lambda \in \Lambda$. Тогда $f(g) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} = \{\hat{g}\}$, и значит,

$$f(g) = \hat{g} = \hat{f}(g).$$

Из произвольности элемента g следует, что $\hat{f}|_G = f$.

II этап. Проверка, что отображение $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является групповым гомоморфизмом.

Пусть $g, g' \in G$ и $g'' = g \cdot g'$. Для каждого элемента $\lambda \in \Lambda$, рассмотрим три множества $F_{\lambda, g} = G \cap (V_\lambda \cdot g)$, $F_{\lambda, g'} = G \cap (V_\lambda \cdot g')$ и $F_{\lambda, g''} = G \cap (V_\lambda \cdot g'')$.

Тогда $\{f(g)\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})}$, $\{f(g')\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g'})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})}$ и $\{f(g'')\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda, g''})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})}$.

Так $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, то для каждой окрестности U'' элемента g'' существуют такие окрестности U и U' элементов g и g' , соответственно, что $U \cdot U' \subseteq U''$. Тогда из теоремы II.3 следует, что для

каждого элемента $\lambda'' \in \Lambda$ существуют такие элементы $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, что $(V_\lambda \cdot g) \cdot (V_{\lambda'} \cdot g') \subseteq V_{\lambda''} \cdot g''$, и значит, $F_{\lambda,g} \cdot F_{\lambda',g'} \subseteq F_{\lambda'',g''}$.

Кроме того, (см. теорему III.4) $[F_{\lambda,g}]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})} \cdot [F_{\lambda',g'}]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})} \subseteq [F_{\lambda'',g''}]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})}$.

Тогда
$$f(g) \cdot f(g') \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda,g})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})} \right) \cdot \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda,g'})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})} \right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda,g''})]_{(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})} = \{f(g'')\} = \{f(g \cdot g')\}.$$

Из произвольности элементов $g, g' \in G$ следует, что отображение $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является групповым гомоморфизмом.

III этап. Проверка, того что отображение $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является непрерывным гомоморфизмом.

Согласно утверждению 1 теоремы VIII.3, достаточно проверить его непрерывность в единице топологической группы $(G(\cdot), \tau)$.

Пусть W_0 - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и W_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, что $W_1 \cdot W_1 \subseteq W_0$.

Так как гомоморфизм $f: (G'(\cdot), \tau') \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является непрерывным гомоморфизмом, то существует такая окрестность V'_1 единицы в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$, что $f(V'_1) \subseteq W_1$.

Согласно теореме VII.8, множество $[V'_1]_{(G, \tau)}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Проверим, что $\hat{f}([V'_1]_{(G, \tau)}) \subseteq W_0$.

В самом деле, если $g \in [V'_1]_{(G, \tau)}$, то $V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g) \neq \emptyset$, и так как $(V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g)) \cap (V'_1 \cap (V_{\lambda'} \cdot g)) = V'_1 \cap ((V_\lambda \cap V_{\lambda'}) \cdot g)$, то совокупность $\Delta' = \{V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g) \mid \lambda \in \Lambda\}$ является базисом некоторого фильтра Φ' в группе $(G'(\cdot), \tau')$, и поскольку $V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g) \subseteq G' \cap (V_\lambda \cdot g) = F_{\lambda,g}$, то Φ' будет фильтром Коши в топологической группе $(G'(\cdot), \tau')$.

Тогда совокупность $\{f(V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g)) \mid \lambda \in \Lambda\}$ будет фильтром Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и поскольку топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной, то $\emptyset \neq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g)]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}$. Так как

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(V'_1 \cap (V_\lambda \cdot g))]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} [f(F_{\lambda,g})]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} = \{\hat{f}(g)\},$$
 то (см. теорему II.5)

$\hat{f}(g) \in [f(V'_1)]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \subseteq [W_1]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \subseteq W_1 \cdot W_1 \subseteq W_0$. Из произвольности элемента g следует, что $\hat{f}([V'_1]_{(\hat{G}, \hat{\tau})}) \subseteq W_0$, а из произвольности окрестности W_0 следует, что гомоморфизм $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является непрерывным гомоморфизмом.

Итак, мы построили такой непрерывный групповой гомоморфизм $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, что $\hat{f}|_G = f$.

Этим утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2.

Так как, согласно условию, $f: (G'(\cdot), \tau) \rightarrow (f(G'(\cdot)), \hat{\tau}|_{f(G'(\cdot))})$ является топологическим изоморфизмом, то отображение $f^{-1}: (f(G'(\cdot)), \hat{\tau}|_{f(G'(\cdot))}) \rightarrow (G'(\cdot), \tau)$ будет топологическим изоморфизмом. Поскольку топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой, и $f(G')$ является плотной подгруппой в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то, согласно первому утверждению, существует такой непрерывный гомоморфизм $\varphi: (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$, что $\varphi|_{f(G')} = f^{-1}$.

Покажем, что $\varphi = \hat{f}^{-1}$.

Вначале покажем, что $\varphi(\hat{f}(g)) = g$ для любого элемента $g \in G$.

Допустим противное, т.е. что $\varphi(\hat{f}(g)) \neq g$ для некоторого элемента $g \in G$. Поскольку топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является отделимой, то существует такая окрестность V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $(V \cdot g) \cap (V \cdot \varphi(\hat{f}(g))) = \emptyset$.

Так как $\varphi: (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ является непрерывным гомоморфизмом, то существует такая окрестность $\hat{U}$ единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, что $\varphi(\hat{U}) \subseteq V$, и поскольку является непрерывным гомоморфизм $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то существует такая окрестность V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $\hat{f}(V_1) \subseteq \hat{U}$.

Из того, что $G'(\cdot)$ является плотной подгруппой в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, следует, что существует элемент $g' \in G' \cap ((V_1 \cap V) \cdot g)$. Тогда $g' = f^{-1}(f(g')) = \varphi(\hat{f}(g')) \in \varphi(\hat{f}(V_1 \cdot g)) \subseteq \varphi(\hat{U} \cdot \hat{f}(g)) \subseteq V \cdot \varphi(\hat{f}(g))$, и так как $g' \in V \cdot g$, то $(V \cdot g) \cap (V \cdot \varphi(\hat{f}(g))) \neq \emptyset$. Получили противоречие с

выбором окрестности V . Следовательно, $\varphi(\hat{f}(g)) = g$ для любого элемента $g \in G$.

Аналогично доказывается, что $\hat{f}(\varphi(\hat{g})) = \hat{g}$ для любого элемента $\hat{g} \in \hat{G}$.

Итак, мы доказали, что $\varphi = \hat{f}^{-1}$.

Тогда $\hat{f}: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ будет топологическим изоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

XI. ПОПОЛНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП.

Определение XI.1. Полная топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ называется *пополнением топологической группы* $(G(\cdot), \tau)$, если в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ имеется плотная подгруппа $(G'(\cdot), \hat{\tau}|_{G'})$, которая является топологически изоморфной топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Замечание XI.2. Согласно замечанию VIII.2 мы можем отождествить топологическую группу $(G'(\cdot), \hat{\tau}|_{G'})$, указанную в определении XI.1, с топологической группой $(G(\cdot), \tau)$, мы получим, что сама топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является подгруппой полной топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Теорема XI.3. Если $\Omega = \{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и $(\Delta, \leq)$ - направленность, заданная базисом Ω окрестностей единицы (см. X.20), то для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, которая является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, последовательность $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и пусть последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является подгруппой топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши и в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Так как $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной топологической группой, то, согласно теореме X.21, последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ имеет предел в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Тогда, согласно утверждению 3 теоремы X.19, последовательность $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является подгруппой топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ и $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\} \subseteq G$, то $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любой последовательности $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, которая является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, последовательность $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ пересечение всех окрестностей единицы является окрестностью единицы, то, согласно теореме X.10, топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является полной группой, и тогда в качестве топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ можем взять саму топологическую группу $(G(\cdot), \tau)$.

Поэтому, в дальнейшем будем считать, что в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ пересечение всех окрестностей единицы не является окрестностью единицы. В этом случае в направленном множестве $(\Delta, \leq)$ нет наибольшего элемента.

Дальнейшее доказательство теоремы проведем в несколько этапов.

I этап. Построение группы $\hat{G}(\cdot)$.

Если $(\Delta, \leq)$ - направленность, указанная в формулировке теоремы, то рассмотрим множество $\hat{G}$ всех последовательностей вида $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ элементов группы $G(\cdot)$, каждая из которых является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и определим на множестве $\hat{G}$ операцию умножения следующим образом:

Если $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}, \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$, то положим

$$\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \cdot h_\delta \mid \delta \in \Delta\}.$$

Проверим, вначале, что эта операция умножения определена корректно, т.е., что $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \cdot h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$.

Пусть $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}, \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$ и V - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Существует такая окрестность U единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $U \cdot U \cdot U \subseteq V$. Так как последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши, то существует такое $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_\rho^{-1} \in U$ для любых $\delta, \rho \in \Delta$ таких, что $\delta \geq \delta_0$ и $\rho \geq \delta_0$.

Существует такая окрестность W единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $g_{\delta_0} \cdot W \cdot g_{\delta_0}^{-1} \subseteq U$, и так как последовательность $\{h_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши, то существует такое $\delta_1 \in \Delta$, что $h_\delta \cdot h_\rho^{-1} \in W$ для любых $\delta, \rho \in \Delta$ таких, что $\delta \geq \delta_1$ и $\rho \geq \delta_1$.

Так как $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, то существует такой элемент $\delta_2 \in \Delta$, что $\delta_2 \geq \delta_1$ и $\delta_2 \geq \delta_0$. Тогда для любых таких элементов $\delta, \rho \in \Delta$, что $\delta \geq \delta_2$ и $\rho \geq \delta_2$ имеем, что $(g_\delta \cdot h_\delta) \cdot (g_\rho \cdot h_\rho)^{-1} = g_\delta \cdot h_\delta \cdot h_\rho^{-1} \cdot g_\rho^{-1} \in g_\delta \cdot W \cdot g_\rho^{-1} = (g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1}) \cdot (g_{\delta_0} \cdot W \cdot g_{\delta_0}^{-1}) \cdot (g_{\delta_0} \cdot g_\rho^{-1}) \subseteq U \cdot U \cdot U \subseteq V$.

Из произвольности окрестности V следует, что последовательность $\{g_\delta \cdot h_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, т.е. $\{g_\delta \cdot h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$.

Итак, мы проверили, что операция умножения во множестве $\hat{G}$ определена корректно.

Проверим теперь, что $\hat{G}(\cdot)$ является группой.

В самом деле, так как $(\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\}) \cdot \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \cdot (h_\delta \cdot q_\delta) \mid \delta \in \Delta\} = \{(g_\delta \cdot h_\delta) \cdot q_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot (\{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\})$, то введенная операция умножения является ассоциативной.

Так как последовательность $\hat{e} = \{e_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $\hat{e} \in \hat{G}$, и поскольку для любого элемента $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$ верны равенства $\hat{e} \cdot \hat{g} = \{e_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{e_\delta \cdot g_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \hat{g}$ и $\hat{g} \cdot \hat{e} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{e_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \cdot e_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \hat{g}$, то $\hat{e}$ является единицей в $\hat{G}(\cdot)$.

Кроме того, поскольку для любого элемента $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$, по условию, последовательность $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ и $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cdot \{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\} = \{e_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, то элемент $\{g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ является обратным элементом в $\hat{G}(\cdot)$ к элементу $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$, и значит, $\hat{G}(\cdot)$ является группой.

Итак, мы построили группу $\hat{G}(\cdot)$.

II этап. Определение групповой топологии $\hat{\tau}$ на группе $\hat{G}(\cdot)$.

Для любой окрестности $V \in \Omega$ рассмотрим множество $W(V) = \{\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G} \mid \forall \hat{g}, \exists \delta_{\hat{g}} \text{ такое, что } g_\delta \in V \text{ для } \delta \geq \delta_{\hat{g}}\}\}$, и покажем, что совокупность $\hat{B} = \{W(V) \mid V \in \Omega\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1.

Так как $\hat{e} = \{e_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in W(V)$ для любого $V \in \Omega$, то для совокупности $\hat{B}$ условие 1 теоремы V.1 выполнено.

Если $W(V_1), W(V_2) \in \hat{B}$, то $V_1 \cap V_2 \in \Omega$, и значит, $W(V_1 \cap V_2) \in \hat{B}$, причем, $W(V_1) \cap W(V_2) \supseteq W(V_1 \cap V_2)$, и значит, для совокупности $\hat{B}$, выполнено условие 2 теоремы V.1.

Пусть теперь $W(V_1) \in \hat{B}$. Так как $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой, то существует такая окрестность $V_2 \in \Omega$, что $V_2 \cdot V_2 \subseteq V_1$.

Если $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}, \hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in W(V_2)$, то существуют такие элементы $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, что $g_\delta \in V_2$ и $h_\delta \in V_2$ для любого элемента $\delta \geq \delta_1$ и $\delta \geq \delta_2$, и так как $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, то существует такой элемент $\delta_3 \in \Delta$, что $\delta_3 \geq \delta_1$ и $\delta_3 \geq \delta_2$.

Тогда (см. X.20) $g_\delta \cdot h_\delta \in V_2 \cdot V_2 \subseteq V_1$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_3$, и значит, $\hat{g} \cdot \hat{h} = \{g_\delta \cdot h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in W(V_1)$.

Из произвольности элементов $\hat{g}$ и $\hat{h}$ следует, что $W(V_2) \cdot W(V_2) \subseteq W(V_1)$, и значит, для совокупности $\hat{B}$ выполнено условие 3 теоремы V.1.

Аналогично, если $W(V_1) \in \hat{B}$, то существует такая окрестность $V_2 \in \Omega$, что $V_2^{-1} \subseteq V_1$. Тогда, если $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in W(V_2)$, то существует такой элемент $\delta_1 \in \Delta$, что $g_\delta \in V_2$ для $\delta \geq \delta_1$. Тогда $g_\delta^{-1} \in V_2^{-1} \subseteq V_1$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_1$. Из произвольности элемента $\hat{g}$ следует, что $(W(V_2))^{-1} \subseteq W(V_1)$, и значит, для совокупности $\hat{B}$ выполнено условие 4 теоремы V.1.

Пусть теперь $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$ и $W(V) \in \hat{B}$. Существует такая окрестность $V_1 \in \Omega$, что $V_1 \cdot V_1 \cdot V_1 \subseteq V$. Так как последовательность $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} \in V_1$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_0$, и поскольку $(G(\cdot), \tau)$ является

топологической группой, то существует такая окрестность $V_2 \in \Omega$, что $g_{\delta_0} \cdot V_2 \cdot g_{\delta_0}^{-1} \subseteq V_1$.

Так как последовательность $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такой элемент $\delta_1 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_{\delta_1}^{-1} \in V_2$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_1$.

Если теперь, $\hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in W(V_2)$, то существует такой элемент $\delta_2 \in \Delta$, что $h_\delta \in V_2$ для любого элемента $\delta \in \Delta$ такого, что $\delta \geq \delta_2$, и так как $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, то существует такой элемент $\delta_3 \in \Delta$, что $\delta_3 \geq \delta_0$, $\delta_3 \geq \delta_1$ и $\delta_3 \geq \delta_2$.

Тогда, если $\delta \geq \delta_3$, то $g_\delta \cdot h_\delta \cdot g_\delta^{-1} = g_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} \cdot g_{\delta_0} \cdot h_\delta \cdot g_{\delta_0}^{-1} \cdot g_{\delta_0} \cdot g_\delta^{-1} \in V_1 \cdot g_{\delta_0} \cdot V_2 \cdot g_{\delta_0}^{-1} \cdot V_1 \subseteq V_1 \cdot V_1 \cdot V_1 \subseteq V$. Из произвольности элемента $\hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in W(V_2)$ следует, что $\hat{g} \cdot W(V_2) \cdot \hat{g}^{-1} \subseteq W(V)$, и значит, для совокупности $\hat{B}$ выполнено условие 5 теоремы V.1.

Итак, мы доказали, что совокупность $\hat{B}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1, и значит, на группе $\hat{G}(\cdot)$ существует такая групповая топология $\hat{\tau}$, что $\hat{B}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

III этап. Проверка того, что в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ имеется такая плотная подгруппа $\tilde{G}(\cdot)$, что топологические группы $(G(\cdot), \tau)$ и $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ являются топологически изоморфными.

Для каждого элемента $g \in G$ рассмотрим элемент $f(g) = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta, \text{ где } g_\delta = g \text{ для всех } \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$.

Если $\tilde{G} = \{f(g) \mid g \in G\}$, то легко заметить, что $\tilde{G}(\cdot)$ является подгруппой группы $\hat{G}(\cdot)$, причем $f: G(\cdot) \rightarrow \tilde{G}(\cdot)$ является групповым изоморфизмом.

Проверим, что подгруппа $\tilde{G}(\cdot)$ является плотной подгруппой в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

В самом деле, Пусть $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$ и $\hat{W}$ - произвольная окрестность элемента $\hat{g}$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Тогда существует такое множество $W(V) \in \hat{B}$, что $W(V) \in \hat{W} \cdot \hat{g}^{-1}$.

Если $\hat{g} = \{g_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$, то существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $g_\delta \cdot g_\rho^{-1} \in V$ для любых таких элементов $\delta, \rho \in \Delta$, что $\delta \geq \delta_0$ и $\rho \geq \delta_0$. Тогда $\hat{h} = f(g_{\delta_0}) \in \tilde{G}$, и $\hat{h} \cdot \hat{g}^{-1} = \{g_{\delta_0} \cdot g_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\} \in W(V) = \hat{W} \cdot \hat{g}^{-1}$, и значит, $\hat{h} \in \tilde{G} \cap \hat{W}$. Из произвольности окрестности $\hat{W}$ и элемента $\hat{g}$ следует, что подгруппа $\tilde{G}(\cdot)$ является плотной подгруппой в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Так как совокупности Ω и $\{W(V) \mid V \in B\}$ являются базисами окрестностей единиц в топологических группах $(G(\cdot), \tau)$ и $(\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$, соответственно, то из равенства $f(V) = \{f(g) = g_\delta \mid \delta \in \Delta, \text{ где } g_\delta = g \text{ для всех } \delta \in \Delta\} \mid g \in V\} = W(V) \cap \tilde{G}$ следует, что изоморфизм $f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (\tilde{G}(\cdot), \hat{\tau}|_{\tilde{G}})$ является топологическим изоморфизмом.

Итак, мы доказали, что в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ содержится такая плотная подгруппа, которая является топологически изоморфной топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

IV этап. Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной группой.

Покажем вначале, что $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, которое задается и базисом $\hat{B} = \{W_\delta = W(V_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Из определения множества $W(V)$ легко следует, что $W_{\delta_1} \subseteq W_{\delta_2}$ если $V_{\delta_1} \subseteq V_{\delta_2}$.

Обратно, если $W_{\delta_1} = W(V_{\delta_1}) \subseteq W_{\delta_2} = W(V_{\delta_2})$, то из определения изоморфизма $f: G(\cdot) \rightarrow \tilde{G}(\cdot)$ следует, что $V_{\delta_1} = f^{-1}(\tilde{G} \cap W(V_{\delta_1})) \subseteq f^{-1}(\tilde{G} \cap W(V_{\delta_2})) = V_{\delta_2}$.

Итак, мы доказали, что $W_{\delta_1} \subseteq W_{\delta_2}$ тогда и только тогда, когда $V_{\delta_1} \subseteq V_{\delta_2}$, и значит, направленное множество $(\Delta, \leq)$ задается и базисом $\hat{B} = \{W_\delta = W(V_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Перейдем к доказательству полноты топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Пусть $\{\hat{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - произвольная последовательность Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$. Каждый элемент $\hat{g}_\delta$ этой последовательности, в свою очередь, является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и пусть $\hat{g}_\delta = \{g_{\delta, \rho} \mid \rho \in \Delta\}$.

Тогда для каждого $\delta \in \Delta$ существует такой элемент $\rho_\delta \in \Delta$, что $g_{\delta, \rho} \cdot g_{\delta, \gamma}^{-1} \in V_\delta$ для любых таких элементов $\rho, \gamma \in \Delta$, что $\rho \geq \rho_\delta$ и $\gamma \geq \rho_\delta$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $\rho_\delta \geq \delta$ для каждого элемента $\delta \in \Delta$.

Для каждого элемента $\delta \in \Delta$ зафиксируем этот элемент $\rho_\delta \in \Delta$.

Рассмотрим последовательность $\hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$, где $h_\delta = g_{\delta, \rho_\delta} \in G$ и покажем, что $\hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$, т.е., что последовательность $\{h_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Итак, пусть U_0 - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то $U_0 \supseteq V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0}$ для некоторого элемента $\lambda_0 \in \Delta$.

Так как $\{\hat{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то существует такой элемент $\delta_1 \in \Delta$, что $\hat{g}_\delta \cdot \hat{g}_\lambda^{-1} \in W(V_{\lambda_0})$ для любых таких элементов $\delta, \lambda \in \Delta$, что $\delta \geq \delta_1$ и $\lambda \geq \delta_1$.

Поскольку $(\Delta, \leq)$ является направленным множеством, то существует такой элемент $\delta_2 \in \Delta$, что $\delta_2 \geq \lambda_0$ и $\delta_2 \geq \delta_1$, и существует такой элемент $\delta_3 \in \Delta$, что $\delta_3 \geq \delta_2$ и $\delta_3 \geq \rho_{\delta_2}$ (определение элемента $\rho_\delta \in \Delta$ см. выше).

Покажем, что $h_\delta \cdot h_{\delta_2}^{-1} = g_{\delta, \rho_\delta} \cdot g_{\delta_2, \rho_{\delta_2}}^{-1} \in V_{\lambda_0}$ для любого такого элемента $\delta \in \Delta$, что $\delta \geq \delta_3$.

Так как $\delta \geq \delta_3 \geq \delta_1$ и $\delta_2 \geq \delta_1$, то $\hat{g}_\delta \cdot \hat{g}_{\delta_2}^{-1} \in W(V_{\delta_0})$, и значит, существует такой элемент $\eta_{\delta, \delta_2} \in \Delta$, что $g_{\delta, \lambda} \cdot g_{\delta_2, \lambda}^{-1} \in V_{\lambda_0}$ для любого такого элемента $\lambda \in \Delta$, что $\lambda \geq \eta_{\delta, \delta_2}$.

Зафиксируем некоторый такой элемент $\lambda_1 \in \Delta$, что $\lambda_1 \geq \eta_{\delta, \delta_2}$ и $\lambda_1 \geq \delta_3$. Тогда:

- так как $\lambda_1 \geq \rho_\delta$ и $\rho_\delta \geq \delta$, то $g_{\delta, \rho_\delta} \cdot g_{\delta, \lambda_1}^{-1} \in V_\delta \subseteq V_{\lambda_0}$;
- так как $\lambda_1 \geq \eta_{\rho, \delta_2}$, то $g_{\delta, \lambda_1} \cdot g_{\delta_2, \lambda_1}^{-1} \in V_{\lambda_0}$.

- так как $\lambda_1 \geq \delta_3 \geq \rho_{\delta_2}$, то $g_{\delta_2, \lambda_1} \cdot g_{\delta_2, \rho_{\delta_2}}^{-1} \in V_{\lambda_0}$

Тогда, учитывая эти 3 включения, получим $h_\delta \cdot h_{\rho_{\delta_2}}^{-1} = g_{\delta, \rho_\delta} \cdot g_{\delta_2, \rho_{\delta_2}}^{-1} = (g_{\delta, \rho_\delta} \cdot g_{\delta, \lambda_1}^{-1}) \cdot (g_{\delta, \lambda_1} \cdot g_{\delta_2, \lambda_1}^{-1}) \cdot (g_{\delta_2, \lambda_1} \cdot g_{\delta_2, \rho_{\delta_2}}^{-1}) \in V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0}$.

Если теперь $\delta \geq \delta_3 \geq \delta_1$ и $\lambda \geq \delta_3 \geq \rho_{\delta_2}$, то $h_{\rho_{\delta_2}} \cdot h_\lambda^{-1} \in V_{\lambda_0}$, и значит, $h_\delta \cdot h_\lambda^{-1} = (h_\delta \cdot h_{\rho_{\delta_2}}^{-1}) \cdot (h_{\rho_{\delta_2}} \cdot h_\lambda^{-1}) \in V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0} \cdot V_{\lambda_0} \subseteq U_0$.

Из произвольности окрестности U_0 следует, что последовательность $\{h_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, $\hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\} \in \hat{G}$.

Покажем теперь, что $\hat{h} = \lim_{\delta \in \Delta} \hat{g}_\delta$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

В самом деле, если $\hat{W}$ - окрестность элемента $\hat{h}$ в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $W(V_{\delta_0}) \subseteq \hat{W} \cdot \hat{h}^{-1}$.

Так как $\hat{h} = \{h_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши, то существует такой элемент $\delta_1 \in \Delta$, что $h_\delta \cdot h_{\delta_1}^{-1} \in V_{\lambda_0}$ для любого такого элемента $\delta \in \Delta$, что $\delta \geq \delta_1$, и значит, $g_{\sigma, \rho_\sigma} \cdot h_{\delta_1}^{-1} = h_\sigma \cdot h_{\delta_1}^{-1} \in V_{\delta_0}$ для любого $\sigma \geq \delta_1$.

Из определения множества $W(V)$ следует, что $\hat{g}_\sigma \cdot \hat{h}^{-1} \in W(V_{\delta_0})$. Тогда $\hat{g}_\sigma \in W(V_{\delta_0}) \cdot \hat{h} \subseteq \hat{W} \cdot \hat{h}^{-1} \cdot \hat{h} = \hat{W}$ для любого элемента $\sigma \in \Delta$ такого, что $\sigma \geq \delta_1$.

Из произвольности окрестности $\hat{W}$ следует, что $\hat{h} = \lim_{\delta \in \Delta} \hat{g}_\delta$, а из произвольности последовательности $\{\hat{g}_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ и теоремы X.21 следует, что топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной группой.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема XI.4. Для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение тогда и только тогда, когда для любой совокупности $\Phi = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, которая является базисом некоторого фильтра Коши, совокупность $\Phi' = \{F_\lambda^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши.

Доказательство. Пусть для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ и совокупность $\Phi = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Тогда

совокупность $\Phi = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ подмножеств множества $\hat{G}$ будет базисом некоторого фильтра $\hat{\Phi}$ Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и так как топологическая группа $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$ является полной группой, то $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} [F_\lambda]_{(\hat{G}, \hat{\tau})} \neq \emptyset$.

Тогда, согласно утверждению 2 теоремы X.5, совокупность $\Phi' = \{F_\lambda^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, и так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является подгруппой топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то совокупность $\Phi' = \{F_\lambda^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим необходимость доказана.

Пусть теперь, для любой совокупности $\Phi = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, которая является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, совокупность $\Phi' = \{F_\lambda^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши.

Если $B = \{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и $(\Delta, \leq)$ - направленность, которая задается базисом $B = \{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ - произвольная последовательность Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Для каждого элемента $\delta \in \Delta$ рассмотрим подмножество $F_\delta = \{g_\rho \mid \rho \in \Delta, \rho \geq \delta\} \subseteq G$. Как при доказательстве теоремы X.21 доказывается, что совокупность $\Phi = \{F_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. По допущению, совокупность $\Phi' = \{F_\delta^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Тогда для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такой элемент $\delta_0 \in \Delta$, что $F_{\delta_0}^{-1} \cdot (F_{\delta_0}^{-1})^{-1} \subseteq V$, и значит, $g_\delta^{-1} \cdot g_{\delta_0}^{-1} \in V$ для любого $\delta \geq \delta_0$.

Из произвольности окрестности V следует, что последовательность $\{g_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ является последовательностью Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и согласно предыдущей теореме, для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема XI.5. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ имеется такая окрестность V_0 единицы, что для любой окрестности V_1 единицы существует такая окрестность V_2 единицы, что $v^{-1} \cdot V_2 \cdot v \subseteq V_1$ для любого элемента $v \in V_0$, то для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение.

Доказательство. Согласно теореме XI.4, достаточно проверить, что для любого фильтра Коши Φ в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ фильтр $\Phi' = \{F^{-1} \mid F \in \Phi\}$ будет фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Итак, пусть Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$. Согласно теореме X.4, существуют такое множество $F_0 \in \Phi$ и такой элемент $g_0 \in G$, что $F_0 \subseteq V_0 \cdot g_0$.

Если V_1 - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существуют такие окрестности V_2 и V_3 в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, что $g_0^{-1} \cdot V_2 \cdot g_0 \subseteq V_1$ и $v^{-1} \cdot V_3 \cdot v \subseteq V_2$ для любого элемента $v \in V_0$.

Так как Φ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то существует такое множество $F_1 \in \Phi$, что $F_1 \subseteq F_0 \subseteq V_0 \cdot g_0$ и $F_1 \cdot F_1^{-1} \subseteq V_3$.

Если теперь $g, h \in F_1$, то $g \in F_1 \subseteq V_0 \cdot g_0$, и значит, $g = v_0 \cdot g_0$ для некоторого элемента $v_0 \in V_0$. Тогда $g^{-1} = g_0^{-1} \cdot v_0^{-1}$, и значит, $g^{-1} \cdot h = g^{-1} \cdot (h \cdot g^{-1}) \cdot g = g_0^{-1} \cdot v_0^{-1} \cdot (h \cdot g^{-1}) \cdot v_0 \cdot g_0 \in g_0^{-1} \cdot (v_0^{-1} \cdot V_3 \cdot v_0) \cdot g_0 \subseteq g_0^{-1} \cdot V_2 \cdot g_0 \subseteq V_1$.

Из произвольности элементов $g, h \in F_1$ следует, что $F_1^{-1} \cdot (F_1^{-1})^{-1} = F_1^{-1} \cdot F_1 \subseteq V_1$, а из произвольности окрестности V_1 следует, что фильтр $\Phi' = \{F^{-1} \mid F \in \Phi\}$ является фильтром Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Этим теорема полностью доказана.

Замечание XI.6. В каждой топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ можно определять несколько равномерных структур (в частности, левую равномерную структуру и правую равномерную структуру), каждая из которых согласуется с групповой топологией.

Вопрос о существовании пополнения для топологической группы, в некоторой мере связан с вопросом о совпадении в этой топологической группе левой равномерной структуры с правой равномерной структурой.

Мы не будем определять эти равномерные структуры (желающие могут познакомиться с ними, например в [6]). Отметим только, что совпадение равномерных структур в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ эквивалентно

следующему условию (которое можно взять за определение совпадения равномерных структур):

Для любой окрестности V единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ существует такая окрестность U единицы, что $g^{-1} \cdot U \cdot g \subseteq V$ для любого элемента $g \in G$.

Из замечания XI.6 и теоремы XI.5 следует

Следствие XI.7. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ совпадают левая и правая равномерные структуры, то существует пополнение этой топологической группы.

Так как в коммутативной группе $G(\cdot)$ выполнено равенство $g^{-1} \cdot U \cdot g = U$ для любого элемента $g \in G$ и произвольного подмножества $U \subseteq G$, то из предыдущего следствия следует

Следствие XI.8. Если группа $G(\cdot)$ является коммутативной, то для любой групповой топологии τ существует пополнение топологической группы $(G(\cdot), \tau)$.

Из утверждения 4 теоремы III.13 и теоремы XI.5 следует

Следствие XI.9. Если топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает такой окрестностью V_0 единицы, которая является предкомпактным множеством, то для топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует пополнение.

Теорема XI.10. Если для отделимой топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует некоторое ее пополнение $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то верны следующие утверждения:

1. существует отделимая, полная топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, для которой топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является плотной подгруппой;
2. полная, отделимая топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, содержащая топологическую группу $(G(\cdot), \tau)$, определена единственным образом с точностью до топологического изоморфизма, который тождественен на группе $G(\cdot)$

Доказательство. Пусть для отделимой топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ существует ее пополнение $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Если Ω - множество всех окрестностей единицы в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, то, согласно утверждению 3 теоремы II.5, $\hat{N} = \bigcap_{\hat{V} \in \Omega} \hat{V}$ является замкнутым нормальным делителем в топологической группе $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$.

Тогда, согласно теореме VIII.9, топологическая группа $(\hat{G}(\cdot)/N, \tilde{\tau}) = (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})/\hat{N}$ будет отделимой топологической группой, и, согласно теореме X.22, она будет полной топологической группой. Если $\omega: (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau}) \rightarrow (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})/\hat{N}$ - канонический гомоморфизм, и $(G'(\cdot), \tau')$ - плотная подгруппа топологической группы $(\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})$, которая топологически изоморфна топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, то из отделимости топологической группы $(G(\cdot), \tau)$ следует, что топологическая группа $(G'(\cdot), \tau')$ будет отделимой, и значит, $\hat{N} \cap G' = \bigcap_{\hat{V} \in \Omega} (\hat{V} \cap G') = \hat{e}$.

Так как $\hat{N} = \bigcap_{\hat{V} \in \Omega} \hat{V}$, то, согласно утверждению 4 теоремы VIII.16, топологическая группа $(G'(\cdot), \tau') = (G'(\cdot), \tau')/\{\hat{e}\}$ будет топологически изоморфной топологической группе $(\omega(G'(\cdot)), \tilde{\tau}|_{\omega(G'(\cdot))})$, и значит, топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}) = (\hat{G}(\cdot), \hat{\tau})/\hat{N}$ содержит в качестве плотной подгруппы топологическую группу $(\tilde{G}'(\cdot), \tilde{\tau}')$, которая является топологически изоморфной топологической группе $(G(\cdot), \tau)$.

Отождествляя топологическую группу $(G(\cdot), \tau)$ с топологической группой $(\tilde{G}'(\cdot), \tilde{\tau}')$, получим, что полная, отделимая топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ содержит в качестве полной подгруппы топологическую группу $(G(\cdot), \tau)$.

Итак, мы доказали, что существует отделимая, полная топологическая группа $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, для которой топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является плотной подгруппой.

Этим утверждение 1 доказано.

Для завершения доказательства теоремы, осталось проверить единственность топологической группы $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$ с точностью до топологического изоморфизма тождественного на группе $(G(\cdot), \tau)$.

Пусть $(\bar{G}(\cdot), \bar{\tau})$ - произвольная полная, отделимая топологическая группа, которая содержит топологическую группу $(G(\cdot), \tau)$ в качестве плотной подгруппы.

Тогда, поскольку топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ является плотной подгруппой в каждой из топологических групп $(\bar{G}(\cdot), \bar{\tau})$ и $(\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau})$, то, согласно, утверждению 2 теоремы X.28, тождественный изоморфизм

$f: (G(\cdot), \tau) \rightarrow (G(\cdot), \tau)$ продолжается до топологического изоморфизма $\hat{f}: (\tilde{G}(\cdot), \tilde{\tau}) \rightarrow (\bar{G}(\cdot), \bar{\tau})$.

Этим теорема полностью доказана.

ХII.РЕШЕТКИ ГРУППОВЫХ ТОПОЛОГИЙ.

Обозначение XII.1. Так как мы будем рассматривать различные решетки, то для решетки $(\Omega, \leq)$ и для подмножества $S \subseteq \Omega$ будем писать $\inf_{\Omega} S$ и $\sup_{\Omega} S$ вместо $\inf S$ и $\sup S$, соответственно.

Замечание XII.2. Пусть $G(\cdot)$ - группа, и $(T, \leq)$ - решетка всех топологий на множестве G (см. В.16). Если S - некоторое множество групповых топологий на группе $G(\cdot)$, то (см. теорему I.6) топология $\tau_0 = \sup_T S$ тоже будет групповой топологией на группе $G(\cdot)$, а (см. замечание V.5) топология $\tau_1 = \inf_T S$ может не быть групповой топологией, и значит, частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$ не является подрешеткой (см. А. 15) решетки $(T, \leq)$.

Однако, как будет показано в этом параграфе, частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, а также и некоторые его подмножества, являются решетками, т.е. в них существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$.

Изучению этих частично упорядоченных множеств групповых топологий и посвящен настоящий параграф.

Обозначения XII.3. Если $G(\cdot)$ - группа, то рассмотри следующие множества:

$(T, \leq)$ - решетка всех топологий на множестве G ;

$(\mathfrak{M}, \leq)$ - частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$;

$(\mathfrak{M}_{гр}, \leq)$ - частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых топологическая группа обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп;

$(\mathfrak{M}_{н.д}, \leq)$ - частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых топологическая группа обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из нормальных подгрупп;

$(\mathfrak{M}_{пк}, \leq)$ - частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых топологическая группа является предкомпактной (см. III.12);

$(\mathfrak{M}_{р.с}, \leq)$ - частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых совпадают правая и левая равномерные структуры (см. замечание XI. 6);

$(\mathfrak{M}_{пл}, \leq)$ - частично упорядоченное множество всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых топологическая группа имеет пополнение.

Теорема XII.4.. Для произвольной группы $G(\cdot)$ верны следующие утверждения:

1. частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}, \leq)$ является полной решеткой;
2. частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_{гр}, \leq)$ является полной решеткой;
3. частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_{н.д}, \leq)$ является полной решеткой;
4. частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_{пк}, \leq)$ является полной решеткой;
5. частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_{р.с}, \leq)$ является полной решеткой;
6. частично упорядоченное множество $(\mathfrak{M}_{ин}, \leq)$ является полной решеткой $(\mathfrak{M}_{ин}, \leq)$

Доказательство. Если $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}$, то $(G(\cdot), \tau)$ является топологической группой для любой топологии $\tau \in \mathfrak{M}$. Тогда, согласно теореме I.6, для любого $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}$ топология $\sup_{\tau} S$ является групповой топологией на группе $G(\cdot)$.

Легко заметить, что элемент $\sup_{\tau} S$ для частично упорядоченного множества $(\mathfrak{M}, \leq)$ удовлетворяет условиям определения $\sup_{\mathfrak{M}} S$ (см. А. 13), и значит, в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}, \leq)$, существует $\sup_{\mathfrak{M}} S$.

Покажем теперь, что в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}, \leq)$ существует $\inf_{\mathfrak{M}} S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}$.

Рассмотрим множество $S' = \{\tau' \in \mathfrak{M} \mid \tau' \leq \tau \text{ для всех } \tau \in S\}$.

Так как совокупность S' содержит антидискретную топологию, то $S' \neq \emptyset$. Тогда, как было доказано выше, в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}, \leq)$ существует $\tilde{\tau} = \sup_{\mathfrak{M}} S'$.

Покажем, что $\tilde{\tau} = \inf_{\mathfrak{M}} S$.

Если $\tau \in S$, то $\tau' \leq \tau$ для любой топологии $\tau' \in S'$, и значит (см. А.I.3), $\tilde{\tau} = \sup_{\mathfrak{M}} S' \leq \tau$ для любой топологии $\tau \in S$.

Кроме того, если $\tau'' \in \mathfrak{M}$ и $\tau'' \leq \tau$ для любой топологии $\tau \in S$, то $\tau'' \in S'$, и тогда $\tau'' \leq \sup_{\mathfrak{M}} S' = \tilde{\tau}$. Следовательно (см. А. 13) $\tilde{\tau}$ удовлетворяет условиям определения $\inf_{\mathfrak{M}} S$, и значит, $\tilde{\tau} = \inf_{\mathfrak{M}} S$.

Этим утверждение 1 доказано.

Если теперь $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}_{\epsilon}$, то, согласно утверждению 1, существует $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}} S = \sup_T S$.

Так как для каждой топологии $\tau \in S$ топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом Δ_τ окрестностей единицы, который состоит из подгрупп группы $G(\cdot)$, то из утверждения 2 теоремы В. 17 легко следует, что топологическая группа $(G(\cdot), \tau^*)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из подгрупп группы $G(\cdot)$, и значит, $\tau^* \in \mathfrak{M}_{\epsilon}$.

Тогда, легко заметить, что топология τ^* для частично упорядоченного множества $(\mathfrak{M}_{\epsilon}, \leq)$ удовлетворяет условиям определения $\sup S$ (см. А. 13), и значит, в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{\epsilon}, \leq)$, существует $\sup_{\mathfrak{M}_{\epsilon}} S$.

Итак, мы доказали, что для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}_{\text{гр}}$ существует $\sup_{\mathfrak{M}_{\epsilon}} S$.

Покажем теперь, что в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{\epsilon}, \leq)$ существует $\inf_{\mathfrak{M}_{\epsilon}} S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}_{\text{гр}}$.

Аналогично, как и при доказательстве утверждения 1 этой теоремы рассмотрим совокупность $S' = \{\tau' \in \mathfrak{M}_{\text{гр}} \mid \tau' \leq \tau \text{ для всех } \tau \in S\}$.

Так как антидискретная топология принадлежит совокупности S' , то $S' \neq \emptyset$. Выше было доказано, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{\text{гр}}} S'$. Тогда, как и при доказательстве утверждения 1, доказывается, что $\sup_{\mathfrak{M}_{\text{гр}}} S' = \inf_{\mathfrak{M}_{\text{гр}}} S$.

Этим утверждение 2 доказано.

Пусть теперь $\emptyset \neq S \in (\mathfrak{M}_{\text{н.д.}}, \leq)$. Так как $\emptyset \neq S \in (\mathfrak{M}_{\text{н.д.}}, \leq) \subseteq (\mathfrak{M}_{\text{гр}}, \leq)$, то, согласно утверждению 1, существует $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}} S = \sup_T S$.

Покажем, что $\tau^* \in \mathfrak{M}_{\text{н.д.}}$. Если U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$

Так как для каждой топологии $\tau \in S$ топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает базисом Δ_τ окрестностей единицы, который состоит из нормальных делителей группы $G(\cdot)$, то из утверждения 2 теоремы В. 17 легко следует, что и топологическая группа $(G(\cdot), \tau^*)$ обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из нормальных делителей группы $G(\cdot)$, и значит, $\tau^* \in \mathfrak{M}_{\text{н.д.}}$.

Тогда, легко заметить, что топология τ^* для частично упорядоченного множества $(\mathfrak{M}_{\text{н.д.}}, \leq)$ удовлетворяет условиям определения $\sup S$ (см. А. 13),

и значит, в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{н.д}, \leq)$, существует $\sup_{\mathfrak{M}_{н.д}} S$.

Итак, мы доказали, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{н.д}} S$ для любого непустого подмножества $\emptyset \neq S \subseteq (\mathfrak{M}_{н.д}, \leq)$.

Покажем теперь, что в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{н.д}, \leq)$ существует $\inf_{\mathfrak{M}_{н.д}} S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}_{н.д}$.

Аналогично, как и при доказательстве утверждения 1 этой теоремы рассмотрим совокупность $S' = \{\tau' \in \mathfrak{M}_{н.д} \mid \tau' \leq \tau \text{ для всех } \tau \in S\}$.

Так как антидискретная топология принадлежит совокупности S' , то $S' \neq \emptyset$. Выше было доказано, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{н.д}} S'$. Тогда, как и при доказательстве утверждения 1, доказывается, что $\sup_{\mathfrak{M}_{н.д}} S' = \inf_{\mathfrak{M}_{н.д}} S$.

Этим утверждение 3 доказано.

Пусть теперь $\emptyset \neq S \subseteq (\mathfrak{M}_{пк}, \leq)$ и $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}} S = \sup_T S$. Тогда, из теоремы III.15, следует, что $\tau^* \in \mathfrak{M}_{пк}$, и так как $\mathfrak{M}_{пк} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}_{пк}} S$.

Итак, мы доказали, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{пк}} S$ для любого непустого подмножества $\emptyset \neq S \subseteq (\mathfrak{M}_{пк}, \leq)$.

Покажем теперь, что в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{пк}, \leq)$ существует $\inf_{\mathfrak{M}_{пк}} S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}_{пк}$.

Согласно утверждению 1, существует $\tau^* = \inf_{\mathfrak{M}} S$. Если $\tau_0 \in S$, то $\tau^* \leq \tau_0$. Тогда из утверждения 6 теоремы III.13 следует, что $\tau^* \in \mathfrak{M}_{пк}$, и так как $\mathfrak{M}_{пк} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\tau^* = \inf_{\mathfrak{M}_{пк}} S$.

Этим утверждение 4 доказано

Пусть теперь $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}_{p.c}$ и $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}} S = \sup_T S$.

Покажем, что $\tau^* \in \mathfrak{M}_{p.c}$. В самом деле, если U - окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$, то, согласно утверждению 2 теоремы В. 17, существует такое конечное подмножество $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \subseteq S$ топологий и для каждого натурального числа $1 \leq i \leq n$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau_i)$ существует такая окрестность U_i единицы, что $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Так как для каждого натурального числа $1 \leq i \leq n$ в топологической группе $(G(\cdot), \tau_i)$ совпадают левая и правая равномерные структуры, то (см. замечание

XI.6) существует такая окрестность V_i единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_i)$, что $g \cdot V_i \cdot g^{-1} \subseteq U_i$ для любого элемента $g \in G$.

Тогда $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$, причем $g \cdot V \cdot g^{-1} \subseteq U_i$ для любого элемента $g \in G$, и значит, $\tau^* \in \mathfrak{M}_{p.c}$. Так как $\mathfrak{M}_{p.c} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}_{p.c}} S$.

Итак, мы доказали, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{p.c}} S$ для любого подмножества $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}_{p.c}$.

Покажем теперь, что в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{p.c}, \leq)$ существует $\inf_{\mathfrak{M}_{p.c}} S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}_{p.c}$.

Пусть $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}_{p.c}$ и $S' = \{\tau' \in \mathfrak{M}_{p.c} \mid \tau' \leq \tau \text{ для всех } \tau \in S\}$.

Так как антидискретная топология принадлежит совокупности S' , то $S' \neq \emptyset$. Выше было доказано, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{p.c}} S'$.

Тогда, как и при доказательстве утверждения 1, доказывается, что $\sup_{\mathfrak{M}_{p.c}} S' = \inf_{\mathfrak{M}_{p.c}} S$.

Этим утверждение 5 доказано.

Пусть теперь $\emptyset \neq S \subseteq (\mathfrak{M}_{\text{ин}}, \leq)$ и $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}} S = \sup_{\text{Т}} S$. Согласно теореме XI.4 достаточно проверить, что совокупность $\Phi' = \{F_{\delta}^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$ для любой совокупности $\Phi = \{F_{\delta} \mid \delta \in \Delta\}$, которая является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$.

Итак, пусть совокупность $\Phi = \{F_{\delta} \mid \delta \in \Delta\}$, является базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$.

Так как $\tau \leq \tau^*$ для любой топологии $\tau \in S$, то совокупность $\Phi = \{F_{\delta} \mid \delta \in \Delta\}$, будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ для любой топологии $\tau \in S$, и поскольку для любой топологии $\tau \in S$, существует пополнение топологической группы $(G(\cdot), \tau)$, то, согласно теореме XI.4, совокупность $\Phi' = \{F_{\delta}^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$ для любой топологии $\tau \in S$.

Тогда, согласно теореме X.6, совокупность $\Phi' = \{F_{\delta}^{-1} \mid \delta \in \Delta\}$ будет базисом некоторого фильтра Коши в топологической группе $(G(\cdot), \tau^*)$, и значит, существует пополнение топологической группы $(G(\cdot), \tau^*)$.

Так как $\mathfrak{M}_{\text{III}} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\tau^* = \sup_{\mathfrak{M}_{\text{III}}} S$.

Итак, мы доказали, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{\text{III}}} S$ для любого подмножества $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}_{\text{III}}$.

Покажем теперь, что в частично упорядоченном множестве $(\mathfrak{M}_{\text{III}}, \leq)$ существует $\inf_{\mathfrak{M}_{\text{III}}} S$ для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathfrak{M}_{\text{III}}$.

Пусть $\emptyset \neq S \subseteq \mathfrak{M}_{\text{III}}$ и $S' = \{\tau' \in \mathfrak{M}_{\text{III}} \mid \tau' \leq \tau \text{ для всех } \tau \in S\}$.

Так как антидискретная топология принадлежит совокупности S' , то $S' \neq \emptyset$. Выше было доказано, что существует $\sup_{\mathfrak{M}_{\text{III}}} S'$.

Тогда, как и при доказательстве утверждения 1, доказываем, что $\sup_{\mathfrak{M}_{\text{III}}} S' = \inf_{\mathfrak{M}_{\text{III}}} S$.

Этим утверждение 6 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема XII.5. Пусть $G(\cdot)$ - группа, τ_1 и τ_2 - групповые топологии на группе $G(\cdot)$. Если Ω_1 и Ω_2 - некоторые базисы окрестностей единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \tau_2)$, соответственно, то следующие утверждения эквивалентны:

1. для любых окрестностей единицы $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$ существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $V_2 \cdot U_2 \subseteq U_1 \cdot V_1$;
2. для любых окрестностей единицы $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$ существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $U_2 \cdot V_2 \subseteq V_1 \cdot U_1$;
3. совокупность $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе (G, τ_3) где $\tau_3 = \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\}$;
4. для любой окрестности единицы $V_1 \in \Omega_1$ существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $g^{-1} \cdot V_2 \cdot g \subseteq V_1$ для любого элемента $g \in U_2$.

Доказательство. Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Пусть для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполнено утверждение 1.

Если $V_0 \in \Omega_1$ и $U_0 \in \Omega_2$, то существуют такие окрестности $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$, что $V_1^{-1} \subseteq V_0$ и $U_1^{-1} \subseteq U_0$. Так как для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполнено утверждение 1, то существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $V_2 \cdot U_2 \subseteq U_1 \cdot V_1$. Поскольку (G, τ_1) и (G, τ_2) являются топологическими группами, то существуют такие окрестности единицы $V_3 \in \Omega_1$ и $U_3 \in \Omega_2$, что $V_3^{-1} \subseteq V_2$ и $U_3^{-1} \subseteq U_2$.

Тогда, поскольку $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ для любых элементов $a, b \in G$, то $U_3 \cdot V_3 = (U_3^{-1})^{-1} \cdot (V_3^{-1})^{-1} = (V_3^{-1} \cdot U_3^{-1})^{-1} \subseteq (U_1 \cdot V_1)^{-1} \subseteq (U_1 \cdot V_1)^{-1} \subseteq V_1^{-1} \cdot U_1^{-1} \subseteq V_0 \cdot U_0$, и значит для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполнено утверждение 2.

Итак, мы доказали, что $1 \Rightarrow 2$.

Докажем, что $2 \Rightarrow 3$.

Пусть для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполнено утверждение 2.

Проверим, вначале, что совокупность $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1.

Если $V \in \Omega_1$ и $U \in \Omega_2$, то $e = e \cdot e \in V \cdot U$, и значит, для совокупности $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ условие 1 теоремы V.1 выполняется.

Пусть $V_0, V_1 \in \Omega_1$ и $U_0, U_1 \in \Omega_2$. Существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $V_2 \subseteq V_0 \cap V_1$ и $U_2 \subseteq U_0 \cap U_1$. Тогда $V_2 \cdot U_2 \subseteq (V_0 \cap V_1) \cdot (U_0 \cap U_1) \subseteq (V_0 \cdot U_0) \cap (V_1 \cdot U_1)$, и значит, для совокупности $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ условие 2 теоремы V.1 выполняется.

Пусть $V_0 \in \Omega_1$ и $U_0 \in \Omega_2$. Так как для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполнено утверждение 2, то существуют такие окрестности единицы $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$, что $U_1 \cdot V_1 \subseteq V_0 \cdot U_0$.

Из того, что $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \tau_2)$ являются топологическими группами, следует что существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $V_2^{-1} \subseteq V_1$ и $U_2^{-1} \subseteq U_1$. Тогда $(V_2 \cdot U_2)^{-1} \subseteq (U_2^{-1}) \cdot (V_2^{-1}) \subseteq U_1 \cdot V_1 \subseteq V_0 \cdot U_0$, и значит, для совокупности $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ условие 3 теоремы V.1 выполняется.

Пусть $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$.

Так как для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполняется утверждение 2, то существуют такие окрестности $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $U_2 \cdot V_2 \subseteq V_1 \cdot U_1$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $V_2 \subseteq V_1$ и $U_2 \subseteq U_1$. Тогда $(V_2 \cdot U_2) \cdot (V_2 \cdot U_2) \subseteq V_2 \cdot (U_2 \cdot V_2) \cdot U_2 \subseteq (V_1 \cdot V_1) \cdot (U_1 \cdot U_1) \subseteq V_0 \cdot U_0$, и значит, для совокупности $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ условие 4 теоремы V.1 выполняется.

Пусть $V_0 \in \Omega_1$, $U_0 \in \Omega_2$ и $g \in G$. Существуют такие окрестности $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$, что $g \cdot V_1 \cdot g^{-1} \subseteq V_0$ и $g \cdot U_1 \cdot g^{-1} \subseteq U_0$. Тогда $g \cdot (V_1 \cdot U_1) \cdot g^{-1} =$

$(g \cdot V_1 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot U_1 \cdot g^{-1}) \subseteq V_0 \cdot U_0$, и значит, для совокупности $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ условие 5 теоремы V.1 выполняется.

Итак, мы проверили, что совокупность $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы V.1, и значит, на группе $G(\cdot)$ существует такая групповая топология τ_3 , что совокупность Ω_3 является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_3)$.

Так как $V = V \cdot e \subseteq V \cdot U$ и $U = e \cdot U \subseteq V \cdot U$ для любых $V \in \Omega_1$ и $U \in \Omega_2$, то $\tau_3 \leq \tau_1$ и $\tau_3 \leq \tau_2$, и значит (см. А. 13), $\tau_3 \leq \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\}$.

Пусть теперь W - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G, \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$ и W_1 - такая окрестность единицы в топологической группе $(G, \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$, что $W_1 \cdot W_1 \subseteq W$.

Так как $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} \leq \tau_1$ и $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} \leq \tau_2$, то существуют такие окрестности $V \in \Omega_1$ и $U \in \Omega_2$, что $V \subseteq W_1$ и $U \subseteq W_1$. Тогда $V \cdot U \subseteq W_1 \cdot W_1 \subseteq W$, и значит, $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} \leq \tau_3$. Следовательно, $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \tau_3$, и значит, совокупность $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ будет базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G, \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$.

Этим мы доказали, что $2 \Rightarrow 3$.

Проверим теперь, что $3 \Rightarrow 4$.

В самом деле, пусть для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполняется утверждение 3, и пусть $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$.

Так как совокупность $\Omega_3 = \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G, \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$, то существуют такие окрестности единицы $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $(V_2 \cdot U_2)^{-1} \cdot (V_2 \cdot U_2) \cdot (V_2 \cdot U_2) \subseteq V_1 \cdot U_1$.

Тогда для любого элемента $g \in U_2$ имеет место включение $g^{-1} \cdot V_2 \cdot g \subseteq U_2^{-1} \cdot V_2 \cdot U_2 \subseteq (V_2 \cdot U_2)^{-1} \cdot (V_2 \cdot U_2) \cdot (V_2 \cdot U_2) \subseteq V_1 \cdot U_1$, и значит, для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполняется утверждение 4, т.е. $3 \Rightarrow 4$.

Проверим теперь, что $4 \Rightarrow 1$.

Пусть для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполняется утверждение 4. Если $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$, то существуют такие окрестности $V_2 \in \Omega_1$ и $U_2 \in \Omega_2$, что $g^{-1} \cdot V_2 \cdot g \in V_1$ для любого элемента $g \in U_2$. Не нарушая общности, можем считать, что $U_2 \subseteq U_1$. Тогда $V_2 \cdot g \in g \cdot V_1 \subseteq U_2 \cdot V_1 \subseteq U_1 \cdot V_1$ для любого элемента $g \in U_2$.

Из произвольности элемента $g \in U_2$ следует, что $V_2 \cdot U_2 \subseteq U_1 \cdot V_1$.

Этим мы доказали, что для групповых топологий τ_1 и τ_2 выполняется утверждение 1, т.е. $4 \Rightarrow 1$, и значит теорема полностью доказано.

Следствие XII. 6. Если в топологической группе $(G(\cdot), \tau_1)$ совпадают правая и левая равномерные структуры (см. замечание XI. 6), то для любой групповой топологии τ_2 в группе $G(\cdot)$, пара топологий τ_1 и τ_2 удовлетворяет каждому из утверждений теоремы XII. 5.

В самом деле, для любой групповой топологии τ_2 множество $U = G$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_2)$, причем для любой окрестности V_1 единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_1)$ существует окрестность единицы V_2 в топологической группе $(G(\cdot), \tau_1)$ такая, что $g \cdot V_2 \cdot g^{-1} \subseteq V_1$ для любого $g \in G = U$. Тогда, из предыдущей теоремы, следует верность настоящего следствия.

Теорема XII. 7. Для произвольной группы $G(\cdot)$ являются подрешетками решетки $(\mathfrak{M}, \leq)$ всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$ следующие решетки:

1. решетка $(\mathfrak{M}_{н.д.}, \leq)$ всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых топологическая группа обладает базисом окрестностей единицы, который состоит из нормальных делителей группы $G(\cdot)$;
2. решетка $(\mathfrak{M}_{р.с.}, \leq)$ всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых совпадают правая и левая равномерные структуры;
3. решетка $(\mathfrak{M}_{пк}, \leq)$ всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$, в каждой из которых топологическая группа является предкомпактной группой.

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{M}_{н.д.}$. Если Ω_1 и Ω_2 - некоторые базисы окрестностей единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \tau_2)$, соответственно, которые состоят из нормальных делителей группы $G(\cdot)$, то из доказательства утверждения 5 теоремы XII.4 следует, что $\sup_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \sup_{\mathfrak{M}_{н.д.}} \{\tau_1, \tau_2\}$.

Кроме того, из теоремы XII.5 следует, что совокупность $\{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G, \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$. Поскольку произведение $U \cdot V$ двух нормальных делителей U и V является нормальным делителем, то $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} \in \mathfrak{M}_{н.д.}$.

Тогда, так как $\mathfrak{M}_{н.д.} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \inf_{\mathfrak{M}_{н.д.}}$.

Этим утверждение 1. доказано.

Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{M}_{p.c.}$. Если Ω_1 и Ω_2 - некоторые базисы окрестностей единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \tau_2)$, соответственно, которые состоят из нормальных делителей группы $G(\cdot)$, то из доказательства утверждения 5 теоремы XII.4 следует, что $\sup_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \sup_{\mathfrak{M}_{p.c.}} \{\tau_1, \tau_2\}$.

Кроме того, из следствия XII.6 и теоремы XII.5 следует, что совокупность $\{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$.

Покажем, что в топологической группе $(G(\cdot), \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\})$ левая и правая равномерные структуры совпадают.

В самом деле, если $W = V_0 \cdot U_0 \in \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$, то существуют такие окрестности единицы $V_1 \in \Omega_1$ и $U_1 \in \Omega_2$, что $g \cdot U_1 \cdot g^{-1} \subseteq U_0$ и $g \cdot V_1 \cdot g^{-1} \subseteq V_0$ для любого элемента $g \in G$. Тогда $W_1 = V_1 \cdot U_1 \in \{V \cdot U \mid V \in \Omega_1, U \in \Omega_2\}$ и $g \cdot W_1 \cdot g^{-1} = g \cdot (U_1 \cdot V_1) \cdot g^{-1} = (g \cdot U_1 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot V_1 \cdot g^{-1}) \subseteq U_0 \cdot V_0 = W_0$ для любого элемента $g \in G$, и значит, $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} \in \mathfrak{M}_{p.c.}$.

Тогда, так как $\mathfrak{M}_{p.c.} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \inf_{\mathfrak{M}_{p.c.}}$.

Этим утверждение 2. доказано.

Если теперь $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{M}_{пк}$, то из доказательства утверждения 4 теоремы XII.3 следует, что $\sup_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \sup_{\mathfrak{M}_{пк}} \{\tau_1, \tau_2\}$.

Кроме того, из определения III.12 следует, что всякая групповая топология, которая слабее некоторой предкомпактной топологии сама является предкомпактной топологией, и значит, $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} \in \mathfrak{M}_{пк}$.

Тогда, так как $\mathfrak{M}_{пк} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\} = \inf_{\mathfrak{M}_{пк}}$.

Этим утверждение 3 доказано, и значит, теорема полностью доказана.

Теорема XII. 8. Если для группы $G(\cdot)$ задана такая решетка $(\Omega, \leq)$ групповых топологий, что для любых двух топологий $\tau_1, \tau_2 \in \Omega$ выполняется утверждение 3, указанное в теореме XII. 5 и $\sup_{\Omega} \{\tau_1, \tau_2\} = \sup_{\mathfrak{M}} \{\tau_1, \tau_2\}$, то решетка $(\Omega, \leq)$ является модулярной.

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \Omega$ - такие групповые топологии, что $\tau_2 \leq \tau_1$, и пусть $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - базисы окрестностей единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1)$, $(G(\cdot), \tau_2)$ и $(G(\cdot), \tau_3)$, соответственно.

Так как $\tau_1 \geq \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}$ и, согласно условию теоремы, $\tau_1 \geq \tau_2$, то (см. А.13) $\tau_1 \geq \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\}$. Кроме того, так как $\sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\} \geq \tau_2$ и $\sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\} \geq \tau_3 \geq \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}$, то $\sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\} \geq \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\}$. Тогда $\inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\} \geq \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что $\inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\} \leq \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\}$.

Так как любая групповая топология единственным образом определяется множеством всех окрестностей единицы, то достаточно проверить, что любая окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\})$ будет окрестностью единицы и в топологической группе $(G(\cdot), \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\})$.

Итак, пусть W - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\})$. Так как, согласно условию теоремы, топологии τ_1 и $\sup \{\tau_2, \tau_3\}$ удовлетворяют утверждению 3 теоремы XII. 5, то существуют такие окрестности V_1 и U единицы в топологических группах $(G(\cdot), \tau_1)$ и $(G(\cdot), \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\})$, соответственно, что $V_1 \cdot U \subseteq W$.

Тогда (см. теоремы В.17 и I.6) существуют такие окрестности $V_2 \in \Delta_2$ и $V_3 \in \Delta_3$, что $V_2 \cap V_3 \subseteq U$, и значит, $V_1 \cdot (V_2 \cap V_3) \subseteq W$.

Существует такая окрестность $V_2' \in \Delta_2$, что $(V_2')^{-1} \cdot V_2' \subseteq V_2$, и так как $\tau_1 \geq \tau_2$, то существует такая окрестность $V_1' \in \Delta_1$, что $V_1' \subseteq V_1 \cap V_2'$.

Если теперь $d \in V_2' \cap (V_1' \cdot V_3)$, то существуют такие элементы $a \in V_1'$ и $b \in V_3$, что $d = a \cdot b$. Тогда $b = a^{-1} \cdot d \in (V_1')^{-1} \cdot V_2' \subseteq (V_2')^{-1} \cdot V_2' \subseteq V_2$, и значит, $b \in V_3 \cap V_2$. Тогда $d = a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) \in V_1 \cdot (V_3 \cap V_2) \subseteq W$. Из произвольности элемента $d \in V_2' \cap (V_1' \cdot V_3)$ следует, что $V_2' \cap (V_1' \cdot V_3) \subseteq W$.

Так как множество $V_2' \cap (V_1' \cdot V_3)$ является окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\})$, то и множество W будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\})$.

Итак, мы доказали, что любая окрестность единицы в топологической группе $\inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\}$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\})$, и значит, $\inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\} \leq \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\}$.

Так как обратное неравенство было доказано раньше, то $\inf_{\Omega} \{\tau_1, \sup_{\Omega} \{\tau_2, \tau_3\}\} = \sup_{\Omega} \{\tau_2, \inf_{\Omega} \{\tau_1, \tau_3\}\}$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема XII. 9. Если для группы $G(\cdot)$ задана такая полная решетка $(\Omega, \leq)$ групповых топологий, что дискретная топология принадлежит множеству Ω , то для любой топологии $\tau_0 \in \Omega$ в решетке $(\Omega, \leq)$ имеется такой коатом τ^* (см. А.17), что $\tau_0 \leq \tau^*$.

Доказательство. Если τ' - дискретная топология на группе $G(\cdot)$, то рассмотрим множество $\Omega' = \Omega \setminus \{\tau'\}$. Тогда, легко заметить, что любой максимальный элемент (см. А. 13) в частично упорядоченном множестве $(\Omega', \leq)$ является коатомом в решетке $(\Omega, \leq)$, и, согласно теореме Куратовского-Цорна (см. А.14) достаточно доказать, что для любого линейно упорядоченного подмножества $(C, \leq) \subseteq (\Omega', \leq)$ во множестве $(\Omega', \leq)$ имеется такой элемент d , что $d \geq c$ для любого элемента $c \in C$.

Итак, пусть $(C, \leq) \subseteq (\Omega', \leq) \subseteq (\Omega, \leq)$ и $(C, \leq)$ является линейно упорядоченным множеством. Так как $(\Omega, \leq)$ является полной решеткой, то существует $\sup_{\Omega} C$.

Покажем, что $\sup_{\Omega} C \in \Omega'$, т.е., что $\sup_{\Omega} C$ не является дискретной топологией. Так как $(C, \leq) \subseteq (\Omega', \leq)$, то множество C не содержит дискретную топологию τ_1 .

Если U - произвольная окрестность единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup_{\Omega} C)$, и T - множество всех топологий на множестве G то, из того, что $(\Omega', \leq) \subseteq (T, \leq)$ следует, что $\sup_{\Omega} C \leq \sup_T C$, и значит, U будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \sup_T C)$.

Тогда, согласно теореме В. 17, существует такое конечное подмножество $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \subseteq C$, и для каждого натурального числа $1 \leq i \leq n$ существует такая окрестность U_i единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_i)$, что $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Так как множество $(C, \leq)$ является линейно упорядоченным множеством, то во множестве $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ имеется наибольший элемент, и пусть τ_n будет этим наибольшим элементом. Тогда каждого натурального числа $1 \leq i \leq n$ множество U_i будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_n)$, и значит, U будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_n)$.

Так как множество C не содержит дискретную топологию, то топологическая группа $(G(\cdot), \tau_n)$ не является дискретной группой, и значит, $U \neq \{e\}$.

Из произвольности окрестности U следует, что $\sup_{\Omega} C \in \Omega'$, и поскольку $\sup_{\Omega} C \geq \tau$ для любой топологии $\tau \in C$, то мы доказали, что для любого линейно упорядоченного подмножества $(C, \leq) \subseteq (\Omega', \leq)$ во множестве $(\Omega', \leq)$ имеется такой элемент d , что $d \geq c$ для любого элемента $c \in C$.

Тогда, согласно теореме Куратовского-Цорна (см. А.14), в решетке $(\Omega, \leq)$ для любой топологии $\tau_0 \in \Omega$ имеется такой коатом τ^* (см. А.17), что $\tau_0 \leq \tau^*$.

Этим теорема полностью доказана.

Теорема XII. 9. Если $(\Omega, \leq)$ - такая решетка групповых топологий на группе $G(\cdot)$, что для каждой топологии $\tau \in \Omega$ топологическая группа $(G(\cdot), \tau)$ обладает конечным базисом $\Delta(\tau)$ окрестностей единицы, то эта решетка является антиизоморфной (см. А.18) решетке $(\Lambda, \leq)$ всех нормальных делителей группы $G(\cdot)$ (см. Б.6).

Доказательство. Если $\tau \in \Omega$ то из конечности множества $\Delta(\tau)$ и утверждения 3 теоремы II.5 следует, что множество $N(\tau) = \bigcap_{V \in \Delta(\tau)} V$ является открытым нормальным делителем группы $G(\cdot)$, и значит $N(\tau) \in \Lambda$.

Тогда совокупность $\{N(\tau)\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau)$, и значит, можем считать, что $\Delta(\tau) = \{N(\tau)\}$.

Если каждой групповой топологии $\tau \in \Omega$ поставим в соответствии нормальный делитель $N(\tau) \in \Lambda$, то мы определим отображение $N \in \Lambda$.

Покажем, что $\psi : (\Omega, \leq) \rightarrow (\Lambda, \leq)$ является антиизоморфизмом.

В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2 \in \Omega$ и $\tau_1 \neq \tau_2$. Так как любая групповая топология определяется единственным образом любым базисом окрестностей единицы, то $\{N(\tau_1)\} \neq \{N(\tau_2)\}$, и значит, $N(\tau_1) \neq N(\tau_2)$, т.е. отображение $\psi : \Omega \rightarrow \Lambda$ является инъективным.

Если теперь, $N \in \Lambda$, то (см. пример V.3.1) совокупность $\{N\}$ задает на группе $G(\cdot)$ такую групповую топологию τ_N , для которой совокупность $\{N\}$ является базисом окрестностей единицы. Тогда $\tau_N \in \Omega$, причем $\psi(\tau_N) = N$. Из произвольности $N \in \Lambda$ следует, что отображение $\psi : \Omega \rightarrow \Lambda$ является сюръективным, и значит, $\psi : \Omega \rightarrow \Lambda$ является биекцией.

Пусть теперь $\tau_1, \tau_2 \in \Omega$ и $\tau_1 \leq \tau_2$. Тогда $N(\tau_1)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_2)$, и, так как совокупность $\{N(\tau_2)\}$ является базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_2)$, то $N(\tau_2) \subseteq N(\tau_1)$, и значит, $N(\tau_2) \leq N(\tau_1)$.

Если теперь $\tau_1, \tau_2 \in \Omega$ и $N(\tau_2) \leq N(\tau_1)$, т.е. $N(\tau_2) \subseteq N(\tau_1)$, то, $N(\tau_1)$ будет окрестностью единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_2)$, и значит, $\tau_1 \leq \tau_2$.

Итак, мы доказали, что отображение $\psi : (\Omega, \leq) \rightarrow (\Lambda, \leq)$ является антиизоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

Следствие. XII. 11. Если $G(\cdot)$ - конечная группа, то решетка всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$ антиизоморфна решетке всех нормальных делителей группы $G(\cdot)$.

Теорема. XII. 12. Если счетная группа $G(\cdot)$ допускает групповую топологию τ_0 , в которой топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)$ не имеет конечный базис окрестностей единицы, то решетка $(\mathfrak{M}, \leq)$ всех групповых топологий на группе $G(\cdot)$ содержит подрешетку, которая изоморфна решетке всех действительных чисел с обычным порядком.

Доказательство. Пусть Ω - некоторый базис окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)$, и $N = \bigcap_{V \in \Omega} V$. Тогда, согласно утверждению 3 теоремы II.5, множество N является замкнутым нормальным делителем, и согласно теореме VIII.9, топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)/N$ будет отделимой топологической группой.

Если $f : (G(\cdot), \tau_0) \rightarrow (G(\cdot), \tau_0)/N$ - канонический гомоморфизм, то совокупность $\bar{\Omega} = \{f(V) \mid V \in \Omega\}$ будет базисом окрестностей единицы в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)/N$, и так как топологическая группа $(G(\cdot), \tau_0)$ не имеет конечный базис окрестностей единицы, то N не является открытым множеством в топологической группе $(G(\cdot), \tau_0)$.

Тогда топологическая группа $(\bar{G}(\cdot), \bar{\tau}_0) = (G(\cdot), \tau_0)/N$ является отделимой и неискретной группой. Согласно теореме V.4, группа $\bar{G}(\cdot) = G(\cdot)/N$ допускает такую групповую топологию $\bar{\tau}_1$, что топологическая группа $(\bar{G}(\cdot), \bar{\tau}_1)$ является неискретной и обладает счетным базисом окрестностей единицы.

Из доказательства теоремы VI.15 следует, что для любого действительного числа r в группе $\bar{G}(\cdot) = G(\cdot)/N$ существует такая групповая топология $\bar{\tau}_r$, что $\bar{\tau}_{r_1} \leq \bar{\tau}_{r_2}$ тогда и только тогда когда $r_1 \leq r_2$, причем $\bar{\tau}_{r_1} \neq \bar{\tau}_{r_2}$ тогда и только тогда, когда $r_1 \neq r_2$.

Если $f: G(\cdot) \rightarrow \overline{G}(\cdot) = G(\cdot)/N$ - канонический гомоморфизм (Б.11), и для каждого действительного числа r обозначим через τ_r прообраз топологии $\overline{\tau}_r$ относительно гомоморфизма f , то, согласно теореме VIII.4, топология τ_r будет групповой топологией на группе $G(\cdot)$.

Кроме того, легко заметить, что $\tau_{r_1} \leq \tau_{r_2}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\tau}_{r_1} \leq \overline{\tau}_{r_2}$, причем $\tau_{r_1} \neq \tau_{r_2}$ тогда и только тогда, когда $r_1 \neq r_2$ и значит, $\tau_{r_1} \leq \tau_{r_2}$ тогда и только тогда когда $r_1 \leq r_2$, причем $\tau_{r_1} \neq \tau_{r_2}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\tau}_{r_1} \neq \overline{\tau}_{r_2}$.

Так как всякое линейно упорядоченное множество является решеткой, то множество $(\{\tau_r \mid r - \text{действительное число}\}, \leq)$ будет решеткой, причем она является изоморфной решетке действительных чисел с обычным порядком.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что решетка $(\Delta, \leq) = (\{\tau_r \mid r - \text{действительное число}\}, \leq)$ является подрешеткой решетки $(\mathfrak{M}, \leq)$.

В самом деле, так как $(\Delta, \leq) \subseteq (\mathfrak{M}, \leq)$ и $(\Delta, \leq)$ является линейно упорядоченным множеством, то $\tau_{r_1} \leq \tau_{r_2}$, или $\tau_{r_1} \leq \tau_{r_2}$ для любых топологий $\tau_{r_1}, \tau_{r_2} \in \Delta$. Будем считать, для определенности, что $\tau_{r_1} \leq \tau_{r_2}$. Тогда $\inf_{\Delta} \{\tau_{r_1}, \tau_{r_2}\} = \tau_{r_1} = \inf_{\mathfrak{M}} \{\tau_{r_1}, \tau_{r_2}\}$ и $\sup_{\Delta} \{\tau_{r_1}, \tau_{r_2}\} = \tau_{r_2} = \sup_{\mathfrak{M}} \{\tau_{r_1}, \tau_{r_2}\}$.

Этим теорема полностью доказана.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\{x P\}$ и $\{a\}$	-----	A.1
$A \subseteq B$ и $A \subset B$	-----	A.2
$f: A \rightarrow B$	-----	A.4
$f _C$	-----	A.4
$f(C)$ и $f^{-1}(B)$	-----	A.4
$(\varphi f)(a)$	-----	A.6
$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$	-----	A.9
$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ и $\prod_{i=1}^n X_i$	-----	A.10
π_{γ_0}	-----	A.11
$(A, \leq)$	-----	A.12
$\inf S$ и $\sup S$	-----	A.13
$G(\cdot)$	-----	Б.1
e	-----	Б.1
$G(+)$	-----	Б.2
R_a, L_a и ε	-----	Б.3
A^{-1}	-----	Б.4
$f: G(\cdot) \rightarrow G'(\cdot)$	-----	Б.8
$\ker_f$	-----	Б.9
$G(\cdot)/N$	-----	Б.10
$\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma(\cdot)$	-----	Б.17
$\sum_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma(\cdot)$	-----	Б.18
(X, τ)	-----	Б.1
$\tau_{\text{инт}}$	-----	Б.3
$[M]_{(X, \tau)}$	-----	Б.8
$\tau _A$ и $(A, \tau _A)$	-----	Б.11
$\rho(x, y)$ и (X, ρ)	-----	Б.13
τ_ρ	-----	Б.14
$\tau_1 \leq \tau_2$	-----	Б.15

$$f:(X,\tau_1)\rightarrow (Y,\tau_2) \text{ ----- B.18}$$

$$T_0, \; T_1 \; \text{и} \; T_2 \text{-----B.22}$$

$$\tau_f \text{ -----B.25}$$

$$C_a \text{ -----B.22}$$

$$\prod_{\gamma \in \Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma) \text{ ----- B.42}$$

$$\hat{\tau}_\delta \text{ ----- B.42}$$

$$(G(\cdot), \tau) \text{ ----- I.1}$$

$$\tau_N \text{ ----- V.3.1}$$

$$F_k(V_1, \ldots, V_k; \; S_1, \ldots, S_k) \text{----- VI.1}$$

$$G(x) \text{ ----- VI.3}$$

$$V_{(i,j)}, \; S_{(i,j)} \; \text{и} \; \Phi_{(i,j,k)}(x) \text{----- VI.7}$$

$$f:(G(\cdot), \tau) \rightarrow (G'(\cdot), \tau') \text{ ----- VIII.1}$$

$$(G(\cdot), \tau)/N \text{----- VIII.7}$$

$$\prod_{\delta \in \Delta}(G_\delta(\cdot), \tau_\delta) \text{ ----- IX.1}$$

$$\inf_\Omega S \; \text{и} \; \sup_\Omega S \text{----- XII.1}$$

$$(T, \leq) \text{ ----- XII.2}$$

$$(\mathfrak{M}, \leq), (\mathfrak{M}_{rp}, \leq), (\mathfrak{M}_{\text{н.д}}, \leq), (\mathfrak{M}_{\text{нк}}, \leq), (\mathfrak{M}_{p.c}, \leq), (\mathfrak{M}_{\text{ин}}, \leq) \text{ ----- XII.3}$$

СПИСОК ПОНЯТИЙ

Абелева группа -----	Б.2
Аксиомы отделимости в топологическом пространстве -----	В.22
Аксиома отделимости T_0 -----	В.22
Аксиома отделимости T_1 -----	В.22
Аксиома отделимости T_2 -----	В.22
Аксиома отделимости T_3 -----	В.22
Антиизоморфные решетки -----	А.18
Антидискретная топология -----	В.3
Антидискретное пространство -----	В.3
Атом в решетке -----	А.17
Базис окрестностей точки в топологическом пространстве -----	В.5
Базис фильтра -----	А.24
Биекция, или биективное отображение -----	А.5
Вполне несвязное топологическое пространство -----	В.32
Вполне регулярное топологическое пространство -----	В.22
Гомеоморфизм, или гомеоморфное отображение -----	В.24
Группа -----	Б.1
Групповой гомоморфизм -----	Б.8
Групповой изоморфизм -----	Б.8
Дискретная топология -----	В.3
Дискретное топологическое пространство -----	В.3
Естественный изоморфизм -----	Б.15
Замкнутое множество топологического пространства -----	В.2
Замыкание множества в топологическом пространстве -----	В.8
Замкнутое отображение топологических пространств -----	В.24
$\inf B$ -----	А.13
Изоморфные решетки -----	А.18
Интервальная топология -----	В.3
Инъекция или инъективное отображение -----	А.5
Канонический гомоморфизм -----	Б.11
Кирпичная топология в прямом произведении семейства топологических групп -----	IX.3
Коатом в решетке -----	А.17
Коммутативная группа -----	Б.2
Компактное множество в топологическом пространстве -----	В.35
Компактное топологическое пространство -----	В.35
Корень уравнения над группой -----	VI.6
Линейно упорядоченное множество -----	А.12
Локально компактное пространство -----	В.40
Метрика на множестве -----	В.13
Метрическое пространство -----	В.13

Метризуемое топологическое пространство-----	B.14
Множество действительных чисел с интервальной топологией -----	B.3
Множество порождает подгруппу-----	B.7
Модулярная решетка -----	A.16
Мощность континуума-----	A.28
Направленность, задаваемая базисом фильтра -----	A.27
Наибольший элемент -----	A.13
Наименьший элемент-----	A.13
Направленное множество, или направленность -----	A.19
Непрерывный гомоморфизм -----	VIII.1
Непрерывный изоморфизм-----	VIII.1
Непрерывное отображение-----	B.20
Непрерывное отображение в точке -----	B.18
Нормальный делитель-----	B4
Образ подмножества-----	A.4
Ограничение отображения -----	A.4
Отделимая топологическая группа-----	IV.2
Окрестность точки в топологическом пространстве-----	B.4
Открытый гомоморфизм-----	VIII.1
Открытый изоморфизм -----	VIII.1
Открытое множество топологического пространства -----	B.1
Открытое покрытие множества в топологическом пространстве -----	B.34
Открыто-замкнутое множество в топологическом пространстве-----	B.2
Открытое отображение топологического пространства -----	B.24
Отображения множеств -----	A.3
Плотное подмножество в топологическом пространстве-----	B.10
Подгруппа группы -----	B4
Подгруппа топологической группы-----	VII. 4
Поднаправленность -----	A.19
Подпокрытие открытого покрытия-----	B.34
Подпространство топологического пространства -----	B.11
Подпрямое произведение семейства групп -----	B.20
Подпрямое произведение семейства топологических групп-----	IX.12
Подрешетка -----	A.15
Полная топологическая группа -----	X.8
Последовательность Коши в топологической группе -----	X.18
Последовательность элементов группы по направленности -----	X.18
Пополнение топологической группы -----	XI.1
Предел последовательности в топологической группе-----	X.18
Проекция произведения множеств -----	A.11
Произведение множеств -----	A.9
Произведение совокупности топологических пространств -----	B.42
Прообраз подмножества -----	A.4
Прообраз топологии относительно отображения-----	B.25

Предкомпактное множество в топологической группе -----	III.12
Прямая сумма семейства групп -----	B.18
Прямая сумма семейства топологических групп -----	IX.3
Прямое произведение семейства групп -----	B.17
Прямое произведение семейства топологических групп -----	IX.3
Псевдометрика на множестве -----	B.13
Псевдометризуемое топологическое пространство -----	B.14
Псевдометрическое пространство -----	B.13
Разбиение множества -----	A.20
Регулярное пространство -----	B.22
Решетка -----	A.15
$\sup B$ -----	A.13
Связная компонента точки в топологическом пространстве -----	B.32
Связное множество в топологическом пространстве -----	B.26
Связное топологическое пространство -----	B.26
Симметричное множество группы -----	B.4
Слово от переменной x над группой -----	VI.3
Совпадение левой и правой равномерных структур в топологической группе -----	XI.6
Суперпозиция отображений -----	A.6
Счетная мощность -----	A.28
Сюръекция, или сюръективное отображение -----	A.5
Топологическая группа -----	I.1
Топологическая структура, или топология -----	B.1
Топологический гомоморфизм -----	VIII.1
Топологический изоморфизм -----	VIII.1
Топологическое пространство -----	B.1
Топология, задаваемая метрикой -----	B.14
Топология, задаваемая псевдометрикой -----	B.14
Топология произведения топологических пространств -----	B.42
Точка прикосновения к множеству -----	B.7
Ультрафильтр на множестве -----	A.22
Уравнение над группой -----	VI.5
Факторгруппа -----	B.10
Факторгруппа топологической группы -----	VIII.7
Фильтр Коши в топологической группе -----	X.1
Фильтр на множестве -----	A.21
Центр группы -----	B.5
Циклическая группа -----	B.2
Частично упорядоченное множество -----	A.12
Ядро гомоморфизма -----	B.9

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнаутов В.И., Ермакова Г.Н., Кардинальные и трансфинитные числа, Государственный университет Молдовы, центр образования и исследований по математике и информатики, серия «учебники и монографии», Кишинэу – 2010, с. 76.
2. Арнаутов В.И., Ермакова Г.Н., Кардинальные и трансфинитные числа (электронный вариант), www.math.md.
3. Арнаутов В.И., Малютина Н.Н., Общая топология, Государственный университет Молдовы, центр образования и исследований по математике и информатики, серия «учебники и монографии», Кишинэу – 2010, с. 108.
4. Арнаутов В.И., Малютина Н.Н., Общая топология, (электронный вариант), www.math.md.
5. Г.Биркгоф, Теория решеток, Москва «Наука», 1984.
6. Н.Бурбаки, Общая топология, (Основные структуры) Москва 1958.
7. А.Г.Курош, Лекции по общей алгебре, (Учебник) Издание второе, стереотипное, Санкт-Петербург *Москва*Краснодар, 2007.
8. А.Г.Курош, Теория групп, Москва «Наука» 1967. с.648.
9. А.А.Марков, Об абсолютно замкнутых множествах, Мат.сб. т.18, № 1 1945, (3 – 28).
10. А.Ю.Ольшанский, Замечание о счетных не топологизируемых группах, Вестник МГУ, сер. Матем. и мех., № 3 (103) 1980.
11. Л.С.Понтрягин, Непрерывные группы, Москва 1954, с. 516.
12. Р.Энгелькинг, Общая топология, Москва «Мир» 1986, с. 752.